

数学分析习题课讲义

（上册）

谢惠民　恽自求
易法槐　钱定边　编






ISBN 7-04-011922-6
9 787040 119220 >
定价 28.80 元

数学分析习题课讲义

(上　册)

谢惠民 恽自求
易法槐 钱定边　编



图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课讲义/谢惠民等编.—北京:高等教育出版社,2003.7
ISBN 7-04-011922-6

Ⅰ.数… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037783 号

策　　划 王　瑜　　**责任编辑** 薛春玲
封面设计 于　涛　　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www hep edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	27.5	印　　次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	510 000	定　　价	28.80 元

内 容 简 介

本书是教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”的研究成果，其目的是为数学分析的习题课教学提供一套具有创新特色的教材和参考书

本书以编著者们近20年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础，吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果，非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸，在例题的讲解中强调启发式和逐步深入，在习题的选取中致力于对传统内容的更新、补充与层次化

本书分上下两册出版 上册内容为极限理论和一元微积分，下册内容为无穷级数和多元微积分

本书可作为高等院校理工科教师和学生在数学分析习题课方面的教材或参考书，也可以作为研究生入学考试和其他人员的数学分析辅导书

序

数学教育本质上是一种素质教育. 学习数学的目的, 不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论, 更重要的, 是要了解数学的思想方法和精神实质, 真正掌握数学这门学科的精髓. 只有这样, 所学的数学知识才不致沦为一堆僵死的教条, 变得似乎毫无作用, 相反, 能做到触类旁通, 在现实世界中提出的种种问题面前显示出无穷无尽的威力, 终生受用不尽.

要做到这一点, 单靠教师把课讲好是远远不够的. 只有调动学生学习的积极性和主动性, 促使他们自觉地接受经常、充分而又严格的数学训练, 才能使他们真正走近数学,取得切身的体会, 从而加深对数学的理解. 这些数学训练的内容, 在大学学习阶段, 包括复习课文、做习题、阅读参考书、相互切磋、讨论班报告以及参加与数学有关的实践活动等等, 其中，在认真复习的基础上做好习题, 是和课堂教学联系最直接与紧密、同时也最利于经常实施和长期坚持的一项重要的数学训练. 多讲不如多练, 对数学这样一门注重思考的学科, 情况更是如此. 老师讲课再好, 多媒体等先进教学手段用得再五彩纷呈, 也代替不了学生自己的思考和领悟. 只有通过严格的训练, 使学生手脑并用, 才能启迪心智, 推动思维, 使认识不断深入.

由于解题在训练数学思维方面的极端重要性, 更由于对学生的解题 (至少在初期阶段) 必须进行必要的指引, 长期以来, 对一些大学基础数学课程都开设了相应的习题课, 并安排老师精心指导. 实践证明, 这对保证和提高教学质量是一个颇有成效的培养方式. 然而也毋庸讳言, 近些年来这一个重要的教学环节在一部分学校中却有明显削弱的趋势: 老师布置的习题在数量及质量两方面都降低了要求; 老师批改作业只是象征性的, 有的甚至干脆不改, 简单地公布一个标准答案了事; 习题课不少已名存实亡, 有的干脆已经取消; 极个别的学校甚至将数学课程的考试也采用了TOEFL考试的方式等等. 这样做的结果, 在硕士研究生的入学考试中也已经可以很清楚地看得出来: 有些平时学习成绩“优秀”的学生、甚至一些免试直升的优等生, 对一些基本概念和重要基础理论的似是而非的回答, 对一些基本运算的生疏和迟疑, 往往使主考老师大失所望, 更使他们本人入学后的深造面临重重的困难. 所有这些, 不能不使众多的有识之士深表忧虑和关切.

就数学分析这样的课程来说, 一方面, 它是一门重要的大学基础课程, 很多后继课程都以它为基础, 可视为它的延伸、深化和应用, 而它的基本概念、思想和方法更是无所不在. 因此, 牢固地掌握它的基本内容, 熟练地运用它的基本方法, 透彻地理解它的基本思想, 是打开大学阶段数学学习局面的关键. 另一方面, 为了帮助学生掌握学习的主动权, 尽快实现由初等数学阶段进入高等数学阶段的飞跃, 作为学生最早面对的一门高等数学课程, 它在培养学生养成思考的习惯、

提高理解的能力等方面,更负有重大的启蒙责任. 正因为如此, 上好数学分析的课程, 做好数学分析的习题, 努力提高数学分析习题课的质量, 就具有特别重要的意义. 前辈数学大师苏步青教授告诉我们他曾做过一万道微积分的习题, 他能得心应手地在微分几何的前沿领域作出举世瞩目的重大贡献, 与他通过这样严格的训练所打下的坚实基础、所培养的顽强毅力以及所积累的对数学思想的洞察是分不开的.

现在的这一本书, 是在作者们长期从事与指导习题课教学的基础上, 为加强数学分析习题课建设而认真撰写的教材与课外读物. 它的着眼点, 不是像现在充斥市面的各种各样的习题解答那样, 消极地为老师或学生提供一些习题的解答, 而是利用习题课这种教学形式, 引导学生深入理解课程内容, 启发学生深入思考, 扩大学生知识视野, 力求使学生达到举一反三、由小见大、由表及里的境界, 较快地熟悉高等数学的思想方法, 迈步走进高等数学的广阔天地. 对于学生, 这是一本富于启发性且颇有新意的辅导读物; 对于担任数学分析授课或习题课的老师, 更是一本独具特色且不可多得的参考书籍. 在已经出版了大量似曾相识的数学分析教材之后, 本书以其鲜明的特色、新颖的视角和丰富的内容, 给我们以耳目一新的感受. 它的出版, 对帮助广大教师提高习题课的教学质量, 对推动学生自觉重视解题的训练, 均可望带来积极的影响, 很值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2003 年 4 月 3 日

前 言

本书是以适应多层次需要和具有多种用途为指导思想编写的数学分析习题课教材.

首先, 本书的直接目的是为上数学分析习题课的教师和学生同时提供服务. 为此在书中对于基本例题和基本方法作了比较详细的讲解, 特别注重如何帮助初学者入门和逐步提高 (例如 §1.3、§1.4 节和 2.1.3 小节), 按照难度的不同层次收入相当数量的习题, 并在每一章的最后一节总结学习要点. 对许多经典性的内容采取比较新颖的证明和分析方法, 在例题和习题的选取中也力求创新, 改变过去微积分学教程和吉米多维奇习题集一统天下的传统格局. 在编写中非常重视一题多解和前后呼应, 并对学生中常见的典型错误进行分析. 此外, 特别为教师提供的服务还有在 1.1 节中对组织习题课教案的意见, 在第二章末尾的数列极限的习题课教案, 以及每一章后对习题课的建议等.

其次, 本书可作为学生在解题和扩大知识领域方面的参考书. 我们不赞成像工厂生产标准化产品那样来开展教学工作. 千人一面的做法不可能造就具有高度创造性的人才. 能力的培养不可能离开解题的训练. 学生根据自己的情况, 做一些有难度的课外题是非常必要的. 本书所收入的习题按照其难度和灵活性大致分为练习题和参考题. 每节末有练习题, 每章末有参考题 (一般有两组). 这样安排是为了帮助初学者逐步提高分析问题和解决问题的能力. 此外, 本书对于教材中的一系列问题作了较深入的讨论, 还包括了一些提高部分的内容, 例如第二章的迭代生成数列, 第五章的 Li-Yorke 混沌, 第八章和第十一章的凸函数和不等式中的部分材料等. 它们既是课程内容的自然延伸, 又是进一步学习的起跳板. 本书与一般教科书不同的另一特点是, 文中有大量的引用, 其中除了书末的参考文献外, 还有国内外与数学分析有关的杂志上的大量教学研究论文. 我们认为这种旁征博引对读者是有益的.

学生对较难的题一时做不出是十分正常的现象. 建议学生要学会将问题记在心里经常思考. 如能通过自己的不懈努力做出一道较难的题, 那才是真正的收获. 若能持之以恒, 自己的能力和素质就会有切实的提高. 不要养成急于从书本上或他人处寻找现成解答的习惯. 这样看似省力, 实际上往往转身就忘, 反而失去了很好的学习机会. 来得快则去得更快. 没有经过自己的努力, 即使将现成答案放在面前, 也往往不知所云, 一无所得. 本书不附习题解答就是出于以上考虑. 为了对读者提供帮助, 书中附有较多的注解, 经常指出有关例题和习题的意义、与其他题的联系等. 书中对所有参考题均给出提示, 集中放在书末. 但请注意, 该提示中指出的方法未必高明, 更不一定是惟一的方法.

本书也可作为考研的复习教材. 就我们所见, 许多学生在考研前对课程的基

本内容已遗忘甚多，面对茫茫题海不知所措. 本书可以帮助他们对基本内容和方法进行复习，然后通过数量并不很大的习题训练得到较快的提高.

本书还可作为已经学过一般高等数学的读者进一步提高的进修教材. 本书在许多基本方法的讲解上较为细致，起点不高，对自学比较合适.

苏州大学数学系长期以来非常重视数学分析的习题课建设. 1987–1989 年由吴茂庆和卫瑞霞编写的习题课教材，分上、中、下三册，在数学分析教学中起了重要的作用；但由于当时只油印了几十份，仅供上习题课的青年教师使用，目前已很难得到，而十年以来的形势发展很需要一套全新的习题课教材，并供广泛得多的读者使用，这便是编写本书的由来. 本书从 1998 年底开始编写，并经多次试用和征求同行的意见，逐步形成现在的面貌. 当然，数学分析习题课教材的建设是一个长期积累的过程，不可能毕其功于一役. 希望本书的编写能够起到承前启后的作用，使数学分析习题课的教学质量得到稳步的提高.

本书分上、下两册出版. 上册的内容为极限理论和一元微积分，下册的内容为无穷级数和多元微积分.

为简明起见，正文内只设命题与例题，并在每一章节内分别依次编号. 例如，例题 2.1.5 就是第二章第一节的第五个例题. 命题一般是有独立存在价值的定理或结论. 有的例题很重要，实际上也可以作为命题. 这里没有绝对的界线.

在几年的编写和试用过程中，得到了兄弟院校和本校许多同行的关心和帮助，并尽可能地吸取了他们对几次初稿的宝贵意见；上海交通大学的沐定夷教授承担了全书的审阅，其中包括几年来的每次修改稿，提出了许多重要意见和建议；在本书的编写中利用了很多参考文献，其中包括教科书、习题课教材、习题集和对数学分析中许多课题和方法的研究性材料；本书的排版采用天元和LaTeX系统，并得到了华东师范大学陈志杰教授的多次热情帮助；本书的编写得到了教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”和苏州大学数学系的资助；本书的出版得到了高等教育出版社理工分社的大力支持，特别是得益于高级策划王瑜和责任编辑薛春玲的辛勤工作和热情指导；对于以上种种帮助，在此一并致以深切的感谢.

本书编写组的成员是谢惠民、恽自求、易法槐和钱定边. 极限和一元微分学的执笔人是谢惠民，一元积分学和无穷级数的执笔人是恽自求和谢惠民，多元微积分的执笔人是易法槐和钱定边. 此外上册的数列极限习题课教案和对习题课的多数建议是由钱定边提供的.

由于编者水平所限，在目前的版本中必然还会有许多错误和不妥之处，这完全是执笔人的问题. 本书的许多新的设想和特点也还不成熟. 我们恳切地希望读者对本书批评指正，提出进一步改进的宝贵意见，以利于本书今后的修正.

数学分析习题课教材编写组
2003 年 2 月

附: 上册内容简介

这里将分章介绍本书上册正文中的部分内容. 建议读者广泛使用书末的两个索引, 即中文名词索引和外文名词索引, 从中可以查到许多在目录上不易寻找到的材料.

第一章为引论. §1.3 节介绍了一系列初等不等式, 其中特别是平均值不等式在书中将多次应用. 在 §1.4 节中对两个逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$ 的由来和用处作了详细的讲解. 这都是在一般教科书中不可能花很多篇幅来介绍的内容.

第二章为数列极限. 在 2.1.3 小节中对适当放大法作详细讨论. 例题 2.2.1 在一般教科书中是少见的. §2.2 节中提前引入无穷级数, 并对调和级数的发散性给出多个证明. §2.5 节用两个通俗问题引入数 e. §2.6 节对于迭代生成的数列介绍了"蛛网工作法", 总结出具有相当普遍性的两条规律.

第三章为实数系的基本定理. 除了单调有界数列的收敛定理是上一章的主要工具外, 在这一章中分节详细介绍其余 5 个基本定理的内容、证明和应用. 对区间套定理的"凝聚"特点作了细致的分析. 凝聚定理的证明依赖于一般教科书中不常见的"任何数列必有单调子列"的结论. 用三分法证明 Cauchy 收敛准则仅见于 [41]. Lebesgue 数的存在性证明是易法槐提出的. 介绍了上、下极限的三种不同视角, 还包括它们在多个方面的应用. 在 3.7.2 小节举出用本章定理一题多解的例题.

第四章为函数极限. 其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的证明取自**数学的实践与认识**上的论文. 对于使用等价量代换法中的常见错误进行了分析, 指出了正确使用的两条规则.

第五章为连续函数. 其中除了对基本定理作细致的处理外, 还在 §5.6 节介绍了混沌, 作为第二章中迭代生成数列的现代发展. 为了理解这些最新发展所需的知识只限于连续性和上、下极限的概念.

第六章为导数与微分. 其中对几个基本结果采用了 [17] 中的处理方法. 对于一阶微分的形式不变性作了详细讨论.

第七章为微分中值定理. 对于 Fermat 定理, Rolle 定理和 Lagrange 中值定理都采用了不同于一般书中的新的证明方法. 根据沐定夷的建议, 提出并证明了 Taylor 多项式的最优性.

第八章为微分学的应用. 这里分 7 个专题作介绍. §8.4 和 §8.5 节对于凸函数以及凸性在证明不等式中的应用有丰富的材料, 其中包括大量练习题. 作图题中收入了燕尾突变的例题.

第九章为不定积分. 对于第二换元法作出一个严格证明 (取自美国数学月刊上的论文). 对于求有理函数的不定积分举出两种比较灵活的计算方法 (其中之一来自 [68]).

第十章为定积分. 不正面介绍零测度概念而给出关于 Riemann 可积充要条件的 Lebesgue 定理的证明 [7]. 对积分第一中值定理的中值可以在开区间中取到的结论作出证明 (与 [52, 56] 类似). 计算定积分的例题 10.4.1 是较新的. 在利用对称性计算定积分方面利用了 [48] 的分析, 这比传统的说法更为透彻, 列举了较多的例题, 并通过例题 10.4.8 和后面的例题 12.3.1 与广义积分计算相联系.

第十一章为积分学的应用. 在几何应用中推荐用 Green 公式的一个特例 [42]. §11.2 节与 §8.4 和 §8.5 节呼应, 为凸函数和不等式提供了丰富的内容. 对于积分估计给出了较多的例题. Wallis 公式的证明虽然是传统的, 但具有新的视角. Stirling 公式采用 [7] 中比较严格的证明. 改写了 Niven 对于 π 的无理性的证明.

第十二章为广义积分. 对 Dirichlet 判别法的必要性给出证明. 采用较新的方法计算概率积分. 对于无穷限广义积分收敛时被积函数在无穷远处的性质作了详细讨论.

由于篇幅所限, 本书没有介绍插值多项式的丰富内容, 在数值积分方面也未作详细介绍, 但仍收入了关于近似计算的许多材料. 从收敛数列的数列速度出发, 正式引入算法的阶, 讨论了对圆周率的多种算法, 对数 e 的两种近似计算的比较, 方程求根的不同算法等.

目　　录

第一章 引　论

这一章只是一些准备工作.读者可先浏览一下,然后根据自己的需要来使用.

在 §1.1 节中对于如何上习题课提出一些建议. 在 §1.2 节中列出了本书中的常用记号. 在 §1.3 节中介绍几个常用的初等不等式, 供自学. 根据我们的经验,在学期开始时如能关于初等不等式组织一次课外讲座是很合适的. 就初学者而言, 化点力气学好这一节 (包括练习题) 对今后大有好处. 这不仅因为其中的平均值不等式、三点不等式和 Cauchy 不等式是以后的常用工具, 而且还可以通过这些不等式的证明熟悉所用的方法. §1.4 节的对偶法则很重要, 也可自学.

§1.1　关于习题课教案的组织

除第二章外, 本书不提供具体的习题课教案. 附有教案的参考书已有很多, 例如 [13, 58, 62, 66] 等. 我们认为担任习题课的教师应当根据所用的具体教材、大课内容和学生的动态情况来写出自己的习题课教案. 与主讲教师所上的大课相比, 这里有更为广阔的天地可以发挥教师的创造性. 我们在下面先提出一些原则性的建议供参考, 然后从第二章起, 于每章的最后一节提出学习要点和对习题课的建议, 并附有一定难度的若干参考题供选择使用. 注意: 较难的参考题, 特别是第二组参考题, 可供学有余力的学生或考研使用, 对习题课则不尽合适.

在讨论习题课的内容之前, 需要强调指出: 上习题课的教师必须自己动手解题和选题. 随随便便从一本书上抄个题, 不明白它的来龙去脉, 就拿来作为习题课上的例题或练习题，这不是对学生负责的做法, 效果也一定不会好. 一旦出了问题, 就会砸锅, 使自己下不了台. 以其昏昏, 怎能使人昭昭?

写教案的另一个依据则是掌握学生不断变化的具体情况, 特别是作业批改中出现的活材料. 教师认真批改作业和思考其中出现的问题是上好习题课的必要条件. 对于学习中出现的情况是不可能举尽的, 完全要靠教师的辛勤劳动和对教学内容的把握来作出正确的处理. “教无常法”在这里是非常合适的.

一、课堂提问与讨论　这方面可以参考本书中为部分章节安排的思考题. 但往往最好的材料来自习题批改和学习中出现的具体情况. 要从一开始引导学生学习数学的思维方式. 例如, 对于所提出的问题, 若回答“一定”, 则要求能给出证明; 若回答“不一定”, 则要求会举出反例. 用来推翻某个论断的例子就叫做“反例”. 要引导学生学会举例子来支持自己的观点.

二、课内例题的选取　首先应当注意, 不要将习题课变成例题讲解课, 一讲到底. 这样做的效果往往不一定好. 实际上, 不论例题的选择和讲解是怎样的如花似锦, 学生还是必须经过自己的实践才能吸收其中的营养. 这就是 Pólya 所说

的“模仿加实践”的意思 (见 [44]). “精讲多练, 加强实践” 的提法在这里是完全正确的. 关于例题的选取可以参考本章各节的例题和所用教材的内容, 还要根据学生情况来决定其难度和强度. 在一定条件下, 多即是少, 少即是多. 脱离实际讲难度过大的题, 使得绝大多数学生都听不懂, 这完全背离了教学的基本原则. 要学生听不懂, 这是最差的教师都能做得到的事. 教学中困难的恰恰是其反面, 即能够深入浅出, 将重要的基本内容讲得使绝大多数学生都懂. 总之, 在教学上如何为好, 应当根据实际效果作出裁决.

三、对课内练习题的备课 课内练习题的选取应当考虑到同学的实际情况, 不宜过难. 指导教师要精心考虑如何启发和引导学生, 根据现场情况对有困难的学生给以帮助, 进行个别指导. 要避免使很多学生束手无策或在错误的道路上浪费太多的时间. 还应当在现场及时总结情况, 发现和介绍较好的解法. 这里有一个与上大课不同之处是, 在习题课上经常会出现事先不曾料到的情况. 例如有学生提出新的解法, 它的正确与否, 以及它的意义和价值, 需要习题课教师当场作出判断和处理. 由此可见, 上好习题课对教师来说, 无论是刚上讲台的青年教师还是老教师, 都不是简单的工作. 要做到因势利导与随机应变, 真是谈何容易. 当然, 关键还在于充分备课和积累经验. 习题课教师对于所布置的课内练习题的意义、解法和所要达到的目的应当有清楚的了解和充分的准备. 要积极鼓励学生中的创造性思维.

§1.2 书中常用记号

凡本书中用文字符号表示的数, 如未加说明, 均为实数. 对于实数, 本书一开始采取与中学教材中相同的理解, 即可以用十进有尽小数和无尽小数表示的数.

1. $\mathbf{N}_+$: 所有正整数所成的集合.
2. $\mathbf{R}$: 所有实数所成的集合 (同时也用于表示无限区间 $(-\infty,+\infty)$).
3. $\mathbf{Q}$: 所有有理数所成的集合.
4. $\mathbf{C}$: 所有复数所成的集合.
5. $\Longleftrightarrow$ 是等价关系的记号. $A \Longleftrightarrow B$ 表示 A 和 B 等价. 例如, A 代表 $x>3$, B 代表 $x-3>0$, 则 $x>3 \Longleftrightarrow x-3>0$.
6. $[x]$ 是实数 x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数. 例如 $[\sqrt{2}]=1$, $[-\sqrt{2}]=-2$. 关于 $[x]$ 的基本不等式是: $[x] \leqslant x < [x]+1$, 或 $x-1<[x] \leqslant x$.
7. □ 表示一个证明或解的结束.
8. $\displaystyle\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
9. 记号 $\approx$ 表示近似值. 例如 $\sqrt{2} \approx 1.4$.

10. 复合函数 $f(g(x))$ 也写成 $(f\circ g)(x)$ 或 $f\circ g$.
11. 若 A 和 B 为两个集合, 则记号 $A-B$ 为 A 与 B 的差集, 也就是 $A-B=\{\,x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\,\}$. 在有的文献中也用记号 $A\backslash B$ 表示 A 与 B 的差集.
12. 用 $O_\delta(a)$ 表示以 a 为中心, 以 $\delta>0$ 为半径的邻域. 它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ (也可用 $U_\delta(a)$ 等记号). 如不必指出半径, 则可简记为 $O(a)$ (或 $U(a)$).

§1.3 几个常用的初等不等式

本节的不等式只要有中学数学基础就能理解, 但在中学时学生不一定都学过, 更谈不上熟悉, 而在大学学习时老师又可能认为这些内容很容易, 学生早就该会了. 在多数的数学分析教材中往往对此不加证明 (或只放在一个注解中). 其实这些不等式, 尤其是算术平均值 - 几何平均值不等式, 以及它们的一些常见的证明方法, 具有深刻的意义, 从一开始就应当重视. 本节以命题的形式介绍它们的完整内容, 作为学习数学分析的准备工作.

1.3.1 几个初等不等式的证明

命题 1.3.1 (Bernoulli 不等式) 设 $h>-1$, $n\in\mathbf{N}_+$, 则成立不等式

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh,$$

其中当 $n>1$ 时成立等号的充分必要条件是 $h=0$.

证 由于 $n=1$ 或 $h=0$ 时不等式明显成立 (且其中均成立等号), 以下只需讨论 $n>1$ 和 $h\neq 0$ 的情况.

将 $(1+h)^n-1$ 作因式分解, 就可以得到

$$(1+h)^n-1=h\,[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]. \tag{1.1}$$

当 $h>0$ 时, 在右边方括号内从第二项起都大于 1, 因此就有 $(1+h)^n-1>nh$.

在 $-1<h<0$ 时在 (1.1) 右边方括号中从第二项起都小于 1, 因此方括号中表达式之和小于 n. 由于 $h<0$, 因此又得到 $(1+h)^n-1>nh$. □

为了应用的方便, 可将 Bernoulli 不等式推广为双参数的形式.

令 $h=B/A$, 其中 $A>0$, $A+B>0$, 则条件 $1+h>0$ 成立. 将这个 h 代入 Bernoulli 不等式中, 就可以得到下一个不等式.

命题 1.3.2 设有 $A>0$, $A+B>0$, $n\in\mathbf{N}_+$, 则成立不等式 $(A+B)^n\geqslant A^n+nA^{n-1}B$, 而且当 $n>1$ 时其中成立等号的充分必要条件是 $B=0$.

下面要介绍的就是著名的**算术平均值－几何平均值不等式**, 也简称为**平均值不等式**. 它在两个实数的情况包含了中学数学中的三个基本不等式:

(1) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b) \quad (a,b \geqslant 0)$, (2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2 \quad (a,b$ 同号$)$,

(3) $a^2+b^2 \geqslant 2ab \quad (a,b \in \mathbf{R})$,

且仅当 $a=b$ 时, 以上三个不等式中等号成立.

平均值不等式 "可能是最重要的不等式, 并无疑地是不等式理论的基石" (见 [2]). 关于平均值不等式的证明非常多, 据说在 50 个以上. 在有关不等式的名著 [22, 2] 中都有许多讨论. 读者还可以从 [30] 中找到关于平均值不等式的许多推广和新的研究. 有些数学杂志, 如 数学通报、中学数学月刊 和 美国数学月刊 等, 还经常发表关于平均值不等式的新证明.

命题 1.3.3 (算术平均值－几何平均值不等式) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则成立不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证 1 一开始可以看出, 如果在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中出现 0, 则不等式已经成立. 又可以看出, 这时成立等号的充分必要条件是其中每个数为 0. 因此以下只要对 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数的情况来进行证明就够了.

应用数学归纳法. 在 $n=1$ 时结论是平凡的. 在 $n=2$ 时的结论是中学数学已包含的内容. 现设 $n=k$ 时不等式已成立, 然后讨论 $n=k+1$. 将 $k+1$ 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ 的算术平均值分解如下:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{k a_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k(k+1)}. \tag{1.2}$$

然后将上式右边的两项分别记为 A 和 B. 这时条件 $A>0, A+B>0$ 满足, 因而就可以应用命题 1.3.2 中的不等式作以下计算

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} &= (A+B)^{k+1} \geqslant A^{k+1}+(k+1)A^k B \\
&= A^k(A+(k+1)B) \\
&= \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k \cdot a_{k+1} \\
&\geqslant a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}.
\end{aligned}$$

在不等式中成立等号的条件也可用数学归纳法得到. 在 $n=1$ 时已成立. 设在 $n=k$ 时结论为真, 则在 $n=k+1$ 时可从上述推导看出等号成立的条件是

$$ka_{k+1}=a_1+a_2+\cdots+a_k \quad 和 \quad a_1=a_2=\cdots=a_k,$$

也就是 $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$. □

证 2 这个证明与第一个证明基本上是一样的, 只是多用了一个技巧, 从而就可以不必用 Bernoulli 不等式, 而只要用二项式展开定理就够了.

只写出与第一个证明不同之处. 在归纳法第二步中, 对 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 可根据需要重新编号, 使得 a_{k+1} 是其中的最大数 (之一). 然后再作分解 (1.2). 这个分解式右边的第二项一定是非负数, 从而满足条件 $A>0, B\geqslant 0$. 从二项式展开定理就有 $(A+B)^{k+1}\geqslant A^{k+1}+(k+1)A^kB$, 其后的证明不变. □

证 3 现在介绍用向前–向后 (Forward and Backward) 数学归纳法的证明. 这是由 Cauchy 于 1897 年给出的. 由于这个证明十分精彩, 也有人将平均值不等式称为 Cauchy 平均值不等式.s

从 $n=2$ 的已知情况出发, 可以得到如下 $n=4$ 时的平均值不等式.

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}&=\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right]\\&\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}\\&\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.\end{aligned}$$

同样可知, 若 $n=2^k$ 时不等式已成立, 则可得到 $n=2^{k+1}$ 时的不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}a_i&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}a_i+\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}a_i\right]\\&\geqslant\sqrt{\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}a_i\right)\cdot\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}a_i\right)}\\&\geqslant\sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k}a_i}\sqrt[2^k]{\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}a_i}}=\sqrt[2^{k+1}]{\prod_{i=1}^{2^{k+1}}a_i}.\end{aligned}$$

这样就证明了当 n 为 2 的所有方幂时平均值不等式已成立. 这是"向前"部分.

第二步要证明, 当平均值不等式对某个 $n>2$ 成立时, 则它对 $n-1$ 也一定成立. 这是证明中的"向后"部分. 写出

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n-1}a_i=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}a_i+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right].$$

将方括号中的第二项看成为 a_n, 就可以利用 n 时已成立的平均值不等式得到

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geqslant \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)},$$

将以上不等式两边升高 n 次幂, 就有

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)^n \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n-1}a_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right),$$

然后在两边约去公因子 $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i$, 再开 $n-1$ 次根, 就得到所要的不等式. 合并以上向前和向后两部分, 可见平均值不等式对每个自然数 n 成立. □

注 以上用数学归纳法给出了平均值不等式的三个证明. 如前所说, 实际上还有许多其他用和不用数学归纳法的初等证明. 读者可以从前述参考资料中找到比这里丰富得多的材料. 可能今后你自己也会发现一个新的证明.

下面的不等式常称为三点不等式. 实际上, 它不仅在实数范围中成立, 在复数以及更为一般的空间 (例如在高等代数中的线性空间或向量空间) 中也成立, 并因此又被形象化地称为三角形不等式.

命题 1.3.4 (三点不等式) 若 a, b 为实数, 则成立不等式 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, 在其中成立等号的充分必要条件是 a 和 b 同号 (将数 0 看为和任何数同号).

证 写出不等式 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ 和 $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, 将它们相加, 得到

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|),$$

即是 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. 其中等号成立的讨论可类似进行, 请读者补充说明. □

下面的不等式在线性空间中有漂亮的几何意义, 它也称为 Schwarz 不等式.

命题 1.3.5 (Cauchy 不等式) 对实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

证 引进变量 λ, 写出如下的非负二次三项式

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i - b_i)^2 = \lambda^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为 0, 则可以发现 Cauchy 不等式已成立. 否则, λ^2 项的系数不会是 0, 因此它的判别式非正, 这就导致

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

两边开方, 就得到所要求证的不等式. □

注 在 Cauchy 不等式中成立等号的充分必要条件是两个序列 $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 和 $\{b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 成比例. 其证明请读者完成.

以下是关于三角函数的一个初等不等式, 在其中角度 x 用弧度作为单位.

命题 1.3.6 如果 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\sin x < x < \tan x$.

注 由于这个不等式在数学分析教材中都有证明 (例如 [14]), 这里从略. 大多数教科书中采用几何方法, 即利用三角形和扇形的面积关系来导出上述不等式. 在 [41] 中的第 65–66 页中有新的证明, 在一定的意义上更严格一些.

1.3.2 练习题

下面的题用于熟悉以上的初等不等式, 进一步的材料见 [30].

1. 关于 Bernoulli 不等式的推广:

   (1) 证明: 当 $-2 \leqslant h \leqslant -1$ 时 Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ 仍成立;

   (2) 证明: 当 $h \geqslant 0$ 时成立不等式 $(1+h)^n \geqslant \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$, 并推广之;

   (3) 证明: 若 $a_i > -1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 且同号, 则成立不等式

   $$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

2. 阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现, 以下是几个有关的不等式, 它们都可以从平均值不等式得到:

   (1) 证明: 当 $n > 1$ 时成立 $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$;

   (2) 利用 $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdots (1 \cdot n)$ 证明: 当 $n > 1$ 时成立

   $$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n;$$

   (3) 比较 (1) 和 (2) 中两个不等式的优劣, 并说明原因;

(4) 证明: 对任意实数 r 成立 $\left(\sum_{k=1}^{n} k^r\right)^n \geqslant n^n (n!)^r$.

(在第二章的参考题中还有关于 $n!$ 的不等式. 这方面的深入讨论见本书 11.4.2 小节的 Wallis 公式和 Stirling 公式.)

3. 证明**几何平均值 − 调和平均值不等式**: 若 $a_k > 0, k = 1, 2, \cdots, n$, 则有

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

4. 证明: 当 a, b, c 为非负数时成立 $\sqrt[3]{abc} \leqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$.

(这个结果还可以推广到 n 个非负数的情况.)

5. 证明以下几个不等式:

(1) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$ 和 $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$;

(2) $|a_1| - \sum_{k=2}^{n} |a_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$; 又问: 左边可否为 $\left||a_1| - \sum_{k=2}^{n} |a_k|\right|$?

(3) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$;

(4) $|(a+b)^n - a^n| \leqslant (|a| + |b|)^n - |a|^n$.

(特别要注意其中的 (1) 是应用三点不等式时的常见形式.)

6. 试按下列提示, 给出 Cauchy 不等式的几个不同证明:

(1) 用数学归纳法;

(2) 用 Lagrange 恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (|a_k||b_i| - |a_i||b_k|)^2;$$

(3) 用不等式 $|AB| \leqslant \dfrac{A^2+B^2}{2}$;

(4) 构造复的辅助数列 $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2\mathrm{i}\,|a_k b_k|, k = 1, 2, \cdots, n$, 再利用

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

7. 用向前–向后数学归纳法证明: 设 $0 < x_i \leqslant \dfrac{1}{2}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^n}.$$

(这个不等式是由在美国数学界有重大影响的华裔数学家樊畿 (Fan Ky) 得到的, 关于它的许多研究和推广见 [30].)

8. 设 a, c, g, t 均为非负数, $a + c + g + t = 1$, 证明 $a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geqslant 1/4$, 且其中等号成立的充分必要条件是 $a = c = g = t = 1/4$.

(本题来自 DNA 序列分析.)

§1.4 逻辑符号与对偶法则

在数学中广泛使用从数理逻辑中借用来的两个逻辑符号, 即 $\forall$ 和 $\exists$. 这样就可以将许多带有变元的数学命题或叙述 (Statement) 符号化, 从而得到既简单又准确的表达方式. 更为重要的是, 在学习了本节所介绍的**对偶法则**后, 可以很容易将否定的命题或叙述用正面的方式 (即肯定的方式) 表达出来, 这在数学分析和其他许多课程的学习中是很基本的一种方法.

首先要了解这两个逻辑符号的确切意义.

符号 $\forall$ 是从大写字母 A 绕中心旋转而得到的. 它的意义与英文单词 All 直接有关, 译成中文就是 "对所有"、"对任意"、"对任何" 或 "对每一个".

符号 $\exists$ 是从大写字母 E 绕中心旋转而得到的. 它的意义与英文单词 Exist 一致, 译成中文就是 "存在" 或 "有".

举例来说, 如何刻画一个数列 $\{a_n\}$ 有界? 如果不用数学符号的话, 则可说成为: 存在一个正数, 使数列的每一项的绝对值都以它为界, 也就是说都不超过这个正数. 如果用上述逻辑符号, 则可以写为

$$\exists\, M > 0, \forall n, \text{ 使得 } |a_n| \leqslant M \text{ (成立)}. \tag{1.3}$$

当然初学者很可能会觉得这两个不同说法并没有多大差别, 而且在后一个说法中还引进了两个陌生的符号, 何必呢?

现在提出一个新的问题, 即如何刻画一个数列 $\{a_n\}$ 无界?

从定义知道, 数列无界的概念是作为数列有界概念的否定而引进的. 因此问题就变成如何去刻画数列 $\{a_n\}$ 不是有界的? 这在很多场合是不能避免的问题.

例如, 假定你要证明的一个命题是: 若数列满足条件 P, 则必定有界. 如果你打算用反证法, 则证明的第一句话应当是: 设有一个数列 $\{a_n\}$ 满足条件 P, 但同时 $\{a_n\}$ 无界. 如果你不能够将 "$\{a_n\}$ 无界" 这个反证法的前提用正面方式表达出来, 而只知道无界就是有界的否定的话, 那么你的反证法证明就做不下去了.

现在我们从 (1.3) 出发来看如何导出无界的正面叙述. 在 (1.3) 中的第一句话 "$\exists M > 0$", 即存在一个正数, 它具有后两句中所规定的性质. 因此数列 $\{a_n\}$ 无界就应当是它的反面, 即不存在由后两句规定的性质的正数 (这里我们仍然没有前进一步). 换一个说法, 即每一个正数都不具有由 (1.3) 后两句所规定的性质. 这样就可以将数列 $\{a_n\}$ 无界从 "不是有界的" 改写成

$$\forall M > 0,\ 不成立\ \text{“}\forall n,\ 使得\ |a_n| \leqslant M\text{”}.$$

然后再看, 如何将 "$\forall n$, 使得 $|a_n| \leqslant M$" 的否定说法改为正面叙述. 可以看出, 既然不是对每个 n, 成立 $|a_n| \leqslant M$, 那么就等于说至少存在一个 n, 使得 $|a_n| \leqslant M$ 不成立. 这样我们又前进了一步, 即可以将数列 $\{a_n\}$ 无界写为

$$\forall M > 0, \exists n,\ 不成立\ \text{“}|a_n| \leqslant M\text{”}.$$

最后, $|a_n| \leqslant M$ 的否定当然是 $|a_n| > M$, 因此就得到数列 $\{a_n\}$ 无界的新的叙述

$$\forall M > 0, \exists n,\ 使得\ |a_n| > M. \tag{1.4}$$

由于其中不出现否定性的词, 因此将它称为无界概念的正面叙述. 又由于它是从叙述 (1.3) 的否定得来的, 因此这就是否定说法的正面叙述的一个例子.

比较 (1.3) 和 (1.4), 可见前一个叙述中的 $\forall$ 和 $\exists$ 在后一个叙述中的对应位置上恰好改为 $\exists$ 和 $\forall$, 还有最后一句从 "$|a_n| \leqslant M$" 换为恰恰相反的 "$|a_n| > M$". 这就是对偶法则.

它的一般形式可以表达如下. 设命题 P 可写为

$$p_1q_1, p_2q_2, \cdots p_nq_n,\ 使得\ q_{n+1}\ (成立), \tag{1.5}$$

其中 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为逻辑符号 $\forall$ 或 $\exists$; 而 q_i $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 代表普通的数学表达式, 如在 (1.3) 中的 $M > 0$, n, $|a_n| \leqslant M$ 等. 这里对 "命题" 作广义理解, 它可以是数学中任何叙述、断言、定义等等[①]. 例如, P 可以是数列有界的定义, 也可以是对一个数列的有界性的断言.

对偶法则 设命题 P 为 (1.5) 所表示. 则为了得到命题 P 的否命题的正面叙述, 只要将 (1.5) 中的所有逻辑符号 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 从 $\forall$ ($\exists$) 改成 $\exists$ ($\forall$), 并将最后的 q_{n+1} 改为它的否定式即可.

再举几个例子. 其中后两个例子取自数列极限理论, 初学者可以在今后参考.

① 对于 $\forall$ 后只有一个表达式或断言的简单情况, 按照文献中的习惯, 常将 $\forall$ 移到最后. 例如: "$\forall x \in (0,1)$, $f(x) > 0$" 常写为 "$f(x) > 0\ \forall x \in (0,1)$."

例题 1.4.1 数集 A 有界, 即是

$$\exists M>0,\forall x\in A,\text{ 使得 }|x|\leqslant M.$$

它的否定, 即数集 A 无界, 就是

$$\forall M>0,\exists x\in A,\text{ 使得 }|x|>M.$$

例题 1.4.2 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 按定义为

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\text{ 使得 }|a_n-a|<\varepsilon.$$

它的否定, 即数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a, 就是

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N,\text{ 使得 }|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

在这里的第一句是存在一个特定的数 ε, 按照习惯, 将它记为 ε_0 是有好处的.

例题 1.4.3 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 按定义为

$$\exists a,\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\text{ 使得 }|a_n-a|<\varepsilon.$$

它的否定, 即数列 $\{a_n\}$ 发散, 就是

$$\forall a,\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N,\text{ 使得 }|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

最后, 以注解的形式对本节的内容作几点补充.

注 1 前面已经讲到, 符号 "∀" 用中文表达时有多种方式. 同样在英文中它可以表达为 "for any", "for all", "for every", "for each" 等. 著名数学家 Halmos 在 "如何写数学" 一文 (见 [20] 的 142 页) 中提出, 在数学写作中决不要用 "for any", 而应当用 "for every" 或 "for each". 我们觉得这是很有见地的建议. 因为 "任意" 或 "任何" 的意思太不清楚, 到底是指一个还是指所有的? 笔者曾经检查了一些数学著作和论文, 发现 Halmos 的意见已为绝大多数作者所采纳. 因此, 我们建议初学者在看到 ∀ 时也以理解为 "对每一个" 或 "对每一个给定的" 为好.

注 2 符号 ∀ 和 ∃ 在数理逻辑中分别称为**全称量词**和**存在量词**. 对偶法则是数理逻辑中的一个规则 (的重复使用). 它实际上来自日常生活中的逻辑思维, 只是经过上述改造后在数学中更便于使用而已. 有了这个工具之后, 不论 (1.5) 有多长, 都可以轻而易举地将它的否定说法的正面叙述立即写出来, "脑筋都不要动". 这比起重复从 (1.3) 到 (1.4) 的思维过程要方便得多了. 如果读者对数理逻辑有兴趣, 这里可以推荐获得 "普利策文学奖" 的一本著名的科普读物 [23]. 读者在其中不仅会找到逻辑, 还会遇到许多意想不到的内容, 包括美术和音乐.

练习题 以正面方式写出下列命题或叙述的否定 (有几题可在学了有关概念后再做):

(1) 数集 A 有上界;

(2) 数集 A 的最小值是 b;

(3) f 是区间 (a,b) 上的单调增加函数;

(4) f 是区间 (a,b) 上的单调函数;

(5) $A\subset B$;

(6) $A-B\neq\varnothing$;

(7) $\{x_n\}$ 是无穷小量;

(8) $\{x_n\}$ 是正无穷大量.

第二章 数列极限

极限理论是数学分析的核心, 贯穿在数学分析的全部内容中. 本章只限于介绍数列极限的基础部分, 其他内容将在以后有关章节中介绍.

本章的前三节为数列极限的最基本的内容. 在 §2.1 节中含有收敛数列的定义和用适当放大法验证一些给定的数列收敛于已知极限. 在 §2.2 节中围绕数列收敛和发散的讨论举了一些基本的例题. 由于单调数列在本章占有中心地位, 关于单调数列的讨论单独列为 §2.3 节. 在 §2.4 节和 §2.5 节, 分别对 Stolz 定理、自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ 作专题讨论, 并给出有关命题的完整证明. 在 §2.6 节重点介绍关于迭代生成数列的几何方法. §2.7 节为学习要点和两组参考题. 在 §2.8 节中收入了关于数列极限的四次习题课教案, 供教师参考.

数列极限的基础是实数系的基本定理, 其中除单调有界数列的收敛定理外均放在下一章中. 数列的上极限和下极限、压缩映射原理等也在下一章中介绍.

§2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 基本定义

1. 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的定义是: 对于每一个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对满足条件 $n > N$ 的每个自然数 n, 成立不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$.
   (1) 上述定义用逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$ 可简写为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$.
   (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的记号为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 也可简记为 $a_n \to a\ (n \to \infty)$ 或 $a_n \to a$.
   (3) 数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限的几何意义: 对实轴上点 a 的每个邻域, 在 $\{a_n\}$ 中最多只有有限项落在这个邻域之外.
   (4) 数列可以看成是以自然数集 $\mathbf{N}_+$ 为定义域的函数. 数列的极限是自变量 n 趋于无穷大时因变量值的一种趋势.
   (5) 在极限定义中的 N 与 ε 有关, 因此有时记为 $N(\varepsilon)$. N 可以不是自然数, 但一般的习惯往往取 $N \in \mathbf{N}_+$.
2. 称极限为 0 的数列为**无穷小量**, 可以记为 $o(1)$.
3. 称数列 $\{a_n\}$ 为**无穷大量**, 如果对每一个给定的正数 G, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|a_n| > G$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 也可记为 $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ 或 $a_n \to \infty$.

   这个定义用逻辑符号可简写为: $\forall G > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n| > G$.

正无穷大量和负无穷大量是带有确定符号的无穷大量, 即从某项开始后为正数或负数的无穷大量, 分别记为 $+\infty$ 和 $-\infty$.

若一个数列是无穷大量, 则称该数列为无穷大数列. 这时可以称该数列有**广义极限** (或**非正常极限**), 以与收敛数列相区别. 在数列 $\{a_n\}$ 收敛或有广义极限时, 认为记号 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 均有意义.

4. 记号 o, O 和 $\sim$ 在极限理论中是很有用的, 它们的全面论述见本书第四章函数极限的 §4.4 节, 这里只列出以下用法:

 (1) 记号 $o(1)$ 表示无穷小量. 例如 $\dfrac{1}{n}=o(1)$, 就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

 (2) 记号 $O(1)$ 表示有界量. 例如 $\sin n=O(1)$, 就是说 $\{\sin n\}$ 是有界数列.

 (3) 记号 $a_n\sim b_n$ 的定义是: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$.

5. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 又设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$ 是严格单调增加的自然数列, 则就可以得到另一个数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots,$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列, 记为 $\{a_{n_k}\}$. 这就是说取数列 $\{a_n\}$ 的第 n_1 项作为子列的第一项, 取 $\{a_n\}$ 的第 n_2 项作为子列的第二项, $\cdots$. 根据定义, 自然数列 $\{n_k\}$ 一定是严格单调增加的正无穷大量. 不等式 $n_k\geqslant k$ 对一切 $k\in\mathbf{N}_+$ 成立. 例如 $n_3=2$ 是不可能的.

2.1.2 思考题

为了掌握数列收敛的定义, 对以下一些问题作思考和讨论是有益的.

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

 (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+, \forall n\geqslant N$, 成立 $|a_n-a|<\varepsilon$;

 (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall m\in\mathbf{N}_+, \exists N\in\mathbf{N}_+, \forall n>N$, 成立 $|a_n-a|<1/m$;

 (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+, \forall n>N$, 成立 $|a_n-a|<K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数;

 试证明以上定义与上一小节列出的定义的等价性.

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?
3. 判断正确与否: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.
4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?
5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

6. 问: 一个很小很小的量, 例如取 1 米为单位长度时几个纳米大小的量, 是否是无穷小量? 如何刻画一个无穷小量的大小?
7. 问: 正无穷大数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定是无穷大量?
8. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?
9. 判断正确与否: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是正数.

2.1.3 适当放大法

在学习数列收敛的定义时, 一开始遇到的问题就是, 对于给定的数列 $\{a_n\}$ 和数 a, 如何按照定义证明 (验证) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 或是其反面. 我们这里主要关心前面一种情况, 因为许多基本的数列极限都可以用验证的方法得到. 这就是要对每一个给定的正数 ε 证明存在一个自然数 N, 使得它满足下列要求:

$$\text{当 } n > N \text{ 时, 不等式 } |a_n - a| < \varepsilon \text{ 成立.} \tag{2.1}$$

如果将不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中的 n 看成未知量, 对于一些简单的情况有可能直接解出这个不等式. 最简单的例子就是数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 和 $a = 0$. 这时对于给定的 $\varepsilon > 0$, 不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 就是 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. 它等价于 $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. 因此若取 $N = [1/\varepsilon]$, 则当 $n > N$ 时, 就成立

$$n \geqslant N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

从而得到 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. 这里利用了整数部分 $[x]$ 所满足的基本不等式 $[x] \leqslant x < [x]+1$.

但是能否将这个方法用于一般的 $\{a_n\}$ 和 a, 从而对给定的 $\varepsilon > 0$ 求出符合要求 (2.1) 的自然数 N? 对于初学者也许会感到奇怪的是, 对上述问题的回答是否定的. 除了一些最简单的例子以外, 对一般的问题来说, 不可能采用解不等式的方法从 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中求出符合要求 (2.1) 的 N.

事实上, 如果要将关于 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 和 $a = 0$ 的上述做法加以推广, 那就要对给定的 $\{a_n\}$ 和数 a 去寻找 $\varphi(\varepsilon)$, 它是 ε 的一个表达式, 满足下列等价关系:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \varphi(\varepsilon). \tag{2.2}$$

容易看出, 如果有了 (2.2), 则当 $\varphi(\varepsilon) \geqslant 1$ 时, 取 $N = [\varphi(\varepsilon)]$ 即可, 否则取 $N = \max\{1, [\varphi(\varepsilon)]\}$, 总可以满足要求 (2.1). 还可以看出, 这样求出的 N 就是对于给定的 $\varepsilon > 0$ 满足要求 (2.1) 的最小的自然数.

但是从数学的角度来看,这里有两个不能回避的问题: (1) 符合等价关系 (2.2) 的 $\varphi(\varepsilon)$ 存在吗? (2) 如果存在的话,有办法计算它吗?

不幸的是,关于这两个问题的回答都是否定的. 首先,满足 (2.2) 的 $\varphi(\varepsilon)$ 可能根本不存在. 这就是说,满足不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 的所有 n 的全体并不能用形式为 $n > \varphi(\varepsilon)$ 的不等式来刻画.

其次,即使存在这样的 $\varphi(\varepsilon)$,要想求出它往往是很困难的,或者是根本做不到的. 只要试几个比刚才的数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 稍稍复杂一点的例子就可以看出这一点.

既然如此,出路何在? 实际上从数列收敛的定义可以发现,对于 (每个) 给定的 $\varepsilon > 0$,只需求出满足要求 (2.1) 的 "一个" N 就够了,完全没有必要去求出满足要求 (2.1) 的所有 N 或其中最小的 N. 这就是 "适当放大法" 的出发点.

所谓 "适当放大法",就是先找 n 的一个函数 $f(n)$,使得 $|a_n - a| \leqslant f(n)$ 成立,这就是"放大". 然后再对于每个 $\varepsilon > 0$,证明存在 N,使得当 $n > N$ 时成立 $f(n) < \varepsilon$. 由此可以看出,如果将 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 看成一个新的数列 $\{f(n)\}$,则这个数列一定收敛于 0,也就是说数列 $\{f(n)\}$ 必须是无穷小量. 初学者用适当放大法时容易犯的一个错误就是 $\{f(n)\}$ 不满足基本要求 $f(n) = o(1)$,也就是说放大过了头.

当然,这个方法的成功还取决于 $\{f(n)\}$ 为无穷小量的证明必须很容易. 实际上我们总是取尽可能简单的 $f(n)$ 以满足这个要求. 所以适当放大也就是简化,要使得 $f(n)$ 比 $|a_n - a|$ 简单得多,从而很容易验证 $f(n) = o(1)$. 在具体问题中,最后所取的 $f(n)$ 往往很简单,可以从 $f(n) < \varepsilon$ 中直接解出 n,确定 N.

再换一个角度,可以从两个不等式,即 $|a_n - a| \leqslant f(n)$ 和 $f(n) < \varepsilon$,来观察这个方法. 其中的第一个不等式是 "放大",要求所取的 $f(n)$ 使这个不等式对于所有的 n 都成立,或至少当 n 充分大时成立. 第二个不等式的意思则完全不同. 它是在取定 $f(n)$ 后,问是否对每一个给定的 $\varepsilon > 0$ 存在 N,使得当 $n > N$ 时这个不等式能够成立. 这个方法的成功与否在于: 所选取的 $f(n)$ 既要满足第一个不等式,又要使第二个不等式在上述意义下容易处理. 将两个不等式联系起来,如果当 $n > N$ 时有 $f(n) < \varepsilon$ 成立,则由于 $|a_n - a| \leqslant f(n)$,就得到 $|a_n - a| < \varepsilon$.

2.1.4 例题

下面是用适当放大法的两个基本例题.

例题 2.1.1 证明数列 $\left\{\dfrac{n^5}{2^n}\right\}$ 收敛于 0.

证 利用 $2^n = (1+1)^n = 1 + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + \cdots + \dbinom{n}{n}$,在 $n > 6$ 时有

$2^n > \binom{n}{6}$, 因此可以放大如下:

$$\frac{n^5}{2^n} < \frac{n^5 6!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} < \frac{n^4 6!}{(n-5)^5}.$$

然后在 $n > 10$ 时, 将上式最右方的表达式中的分母 $(n-5)^5$ 用较小的 $(n/2)^5$ 代替, 进一步放大为

$$\frac{n^5}{2^n} < \frac{n^4 2^5 6!}{n^5} < \frac{10^5}{n}.$$

可以看出, 为了使最后一个表达式小于 ϵ, 只要取 $N = \max\{10, [10^5/\varepsilon]\}$. □

注 初学者要注意, 如果将分子 n^5 换为 n^{100}, 或者 n 的任意次多项式, 结论仍成立. 又如果将分母 2^n 换为 3^n 或 10^n, 结论也成立. 因此就可以知道, 在以 n 为自变量时, 多项式与基数大于 1 的指数函数之比是无穷小量. 从学习数学分析一开始就需要注意各种不同函数之间的极限关系.

在例题 2.1.1 中的主要工具是二项式展开. 在下一个例题中则用到一个基本不等式, 即在第一章 §1.3 节中的算术平均值-几何平均值不等式 (即命题 1.3.3). 以下的方法也都可用于证明基本题 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1\ (b > 0)$ (证明从略).

例题 2.1.2 证明数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限是 1.

证 1 在 $n \geqslant 2$ 时, 我们有

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-2\text{ 个 }1})^{\frac{1}{n}} < \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

因此得到估计

$$0 \leqslant \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [4/\varepsilon^2]$ 即可.

证 2 本题也可以用类似于例题 2.1.1 的方法来证明. 由于 $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, 只要关心不等式 $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. 令 $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $y_n \geqslant 0$ 成立, 且当 $n > 1$ 时有

$$n = (1 + y_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} y_n^2.$$

从这个不等式中解出 y_n, 就找到了在 $n > 1$ 时的"适当放大"

$$\sqrt[n]{n} - 1 = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

因此取 $N = [2/\varepsilon^2] + 1$ 即可. □

注 请读者注意, 以上两个基本例题还有很多解法 (即一题多解). 例如用后面的单调有界数列的收敛定理或 Stolz 定理都可以解决这两个问题.

2.1.5 练习题

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=3$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(a>0)$.

2. 设 $a_n\geqslant 0$, $n\in\mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之如何?

4. 下面一组题在本章的许多极限计算中有用 (并与第五章的连续性概念有关):

(1) 设 $p(x)$ 是 x 的多项式. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}p(a_n)=p(a)$;

(2) 设 $b>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$;

(3) 设 $b>0$, $\{a_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b a_n=\log_b a$;

(4) 设 b 为实数, $\{a_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^b=a^b$;

(5) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$.

(例如上面提到过的题: 若 $b>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{1/n}=1$. 它是第 (2) 题的特例.)

5. 设 $a>1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$.

(可以利用已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.)

§2.2 收敛数列的基本性质

关于收敛数列有下列基本性质和定理:

1. 收敛数列的极限是唯一的;
2. 收敛数列一定有界;
3. 收敛数列的比较定理, 包括保号性定理;
4. 收敛数列满足一定的四则运算规则;
5. 收敛数列的每一个子列一定收敛于同一极限.

对以上内容不仅要会用, 还应学习它们的证明, 因为其中的方法在数学分析中都是基本的, 学会了这些方法才能说真正懂得了数列收敛的定义和实质.

这里还应指出, 在数列敛散性的讨论中我们经常利用的一个基本事实, 这就是数列的收敛或发散与它的 (任意) 有限多项无关. 实际上, 从定义即可看出, 一

个数列 $\{a_n\}$ 是否收敛, 在收敛时它的极限是什么, 当然和数列的第一项 a_1 无关. 将这一个简单事实推而广之, 就得到一个很有用的结论, 即数列是否收敛 (以及在收敛时的极限是什么) 和数列中的有限多项无关. 例如, 对一个给定的数列, 改变它的前 100 项, 或将它们统统去掉, 或在它们之前再增加若干项, 这样我们就得到了新的数列. 从极限的定义可知, 所有这些新的数列的敛散性与原来的数列完全相同. 若原数列收敛, 则所有新数列不但收敛, 而且还有相同的极限.

对于这一事实的用法举几个例子. 实际上, 在前面讲适当放大法时已经提到, 不等式 $|a_n - a| < f(n)$ 并不一定要对所有自然数成立, 只要对足够大的 n 成立就可以了. 在两个例题中我们都是这样做的. 又如在今后的许多定理中, 其中的条件均可以修改为在 n 充分大时成立即可. 以下面将多次使用的单调有界数列的收敛定理为例, 一个给定的数列虽然并非单调, 但从某项以后单调, 则就可以使用这个定理.

2.2.1 思考题

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: 数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?
2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: 数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?
3. 设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n \in \mathbf{N}_+$, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?
4. 找出下列运算中的错误:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又对每个 n 有 $b < a_n < c$, 问: 是否成立 $b < a < c$?
6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又有 $b \leqslant a \leqslant c$, 问: 是否存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leqslant a_n \leqslant c$?
7. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 问: 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

2.2.2 例题

下一个例题的结论很不平常, 它是收敛数列的一个特点, 它的证明方法与收敛数列的有界性定理的证明方法几乎相同. (请思考: 为什么说这个结论不平常?)

例题 2.2.1 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则在此数列中一定有最大数或最小数, 但不一定同时有最大数和最小数.

证 设此数列的极限为 a. 若此数列的每一项等于 a, 则不必再说. 否则, 设数列的某一项 $a_m \neq a$. 若有 $a_m > a$, 则取 $\varepsilon = a_m - a$. 从收敛数列的定义知道

有 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $|a_n - a| < \varepsilon$. 由于有 $a_m - a = \varepsilon$, 显然 $m \leqslant N$. 从图 2.1 可见, 在区间 $[a_m, +\infty)$ 中至少含有数列 $\{a_n\}$ 中的一项 a_m, 但至多含有该数列中的 N 项.

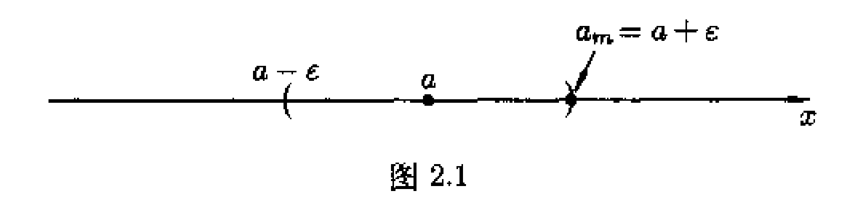


图 2.1

令 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$, 则在 $n > N$ 时, 有

$$a_n < a + \varepsilon = a + (a_m - a) = a_m \leqslant M,$$

可见 M 是数列 $\{a_n\}$ 的最大数. 同样可证在 $a_m < a$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 有最小数.

很容易举出不同时存在最大数和最小数的收敛数列的例子. 例如数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0, 它有最大数, 但没有最小数. □

注 容易举出发散数列的例子, 它没有最大数, 也没有最小数. 此外, 如果利用下一章的确界存在定理等工具, 则可以写出完全不同的证明. 请读者试之.

下面一个例题有很多解法. 这里举出两种不同解法.

例题 2.2.2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{x_n + a} = 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 1 由题设可见 $a \neq 0$. 由条件可知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left|\frac{x_n - a}{x_n + a}\right| < \varepsilon.$$

由此可估计出 $|x_n - a| < \varepsilon|x_n + a| = \varepsilon|(x_n - a) + 2a| \leqslant \varepsilon(|x_n - a| + 2|a|)$. 若限制 $\varepsilon < 1$, 则可得出 $|x_n - a| < 2\varepsilon|a|/(1-\varepsilon)$. 又若限制 $\varepsilon < 1/2$, 则又可得到

$$|x_n - a| < \frac{2\varepsilon|a|}{1-\varepsilon} < 4|a|\varepsilon.$$

由于上式右边是 ε 乘以固定常数, 可见成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

证 2 作代换

$$y_n = \frac{x_n - a}{x_n + a},$$

则从 $y_n = o(1)$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立 $|y_n| < 1$. 然后在 $n > N$ 时可得出

$$x_n = a \cdot \frac{1 + y_n}{1 - y_n}.$$

最后根据数列极限的四则运算法则就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

注 1 与适当放大法的例题不同，那里只是从数列收敛的定义出发，但在这两个证明中我们已经用到了收敛数列的许多基本知识，初学者要看到这个变化.

注 2 在证 2 中用了变量代换法. 这值得注意. 实际上，若要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则就可以令 $y_n = x_n - a$，然后去证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. 这就是变量代换的最简单例子. 应当指出，即使是如此平凡的代换，对于考虑问题也是有帮助的.

如何证明数列收敛和计算收敛数列的极限是这一章中的主要问题. 一般说来，除了少数情况外，对于给定的一个数列 $\{a_n\}$，即使它是收敛的，我们也不知道它的极限是什么. 这时在数列收敛定义中的 a 不是一个已知量，不可能用来验证数列 $\{a_n\}$ 收敛. 因此当然需要新的工具.

在研究数列收敛方面有两个工具是很基本的，这就是:

- 夹逼定理 (也称为两面夹定理等)，
- 单调有界数列的收敛定理.

其中单调有界数列的收敛定理在理论上和应用上都非常重要，是本章的重点学习内容，我们将在下面 2.3 节中专门讨论.

夹逼定理是求极限的有力工具. 其中包含的思想是，对难以直接处理的数列表达式，寻找两个较为简单的数列从两边夹住. 如果这两个数列收敛于同一极限，则问题就解决了. 能否找到这样两个数列是成功应用夹逼定理的关键.

下面是一个有代表性的例子，且有许多推广 (参见例题 10.2.5).

例题 2.2.3 设 $a>0, b>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 不妨先假定 $a \leqslant b$. 这时就有两面夹的不等式

$$b=(b^n)^{\frac{1}{n}}<(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(2b^n)^{\frac{1}{n}},$$

也就是 $b<(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant \sqrt[n]{2}\,b$. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ 和夹逼定理，可见极限为 b. 对 $a>b$ 可作类似讨论. 最后的答案是 $\max\{a,b\}$. □

例题 2.2.4 求数列 $\{a_n\}$ 的极限，其中 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}, n\in\mathbf{N}_+$.

解 将分子 (设 $n>2$) 中的前 $n-2$ 项适当放大，就有估计

$$1!+2!+\cdots+n!\leqslant(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!,$$

因此知道在 $n>2$ 时有

$$1<\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}<\frac{2}{n}+1,$$

令 $n\to\infty$ 即可知极限为 1. □

2.2.3 判定数列发散的方法

这里的基本方法有:

1. 无界数列一定发散.
2. 从数列收敛的定义出发, 用对偶法则就可得到 (参考 §1.4 节):
$$\{a_n\} \text{ 发散} \iff \forall\, a, \exists\, \varepsilon_0, \forall\, N, \exists\, n > N, \text{ 使得 } |a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$
3. 有一个发散子列的数列一定发散.
4. 如果发现有两个子列不可能收敛于相同极限, 则这个数列一定发散.
5. Cauchy 收敛准则也是判定数列发散的充分必要条件 (见下一章 §3.4 节).

在下面的例题中不但证明所给定的数列无界, 而且证明它是正无穷大量.

例题 2.2.5 根据无穷大量的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n-7}{n+3} = +\infty$.

证 要对每个给定的 $G > 0$, 证明有 N, 当 $n > N$ 时, 有 $(n^3+n-7)/(n+3) > G$. 不妨令 $n > 3$, 这样分母就可用 $2n$ 代替而使分式变小. 由于这时分子中的 $n^3 - 7 > \frac{1}{2}n^3$, 又弃去分子中的 n, 这样就可以估计出

$$\frac{n^3+n-7}{n+3} > \frac{\frac{1}{2}n^3}{2n} = \frac{1}{4}n^2 > \frac{1}{4}n.$$

为使最后一式大于 G, 只要取 $N = \max\{3, [4G]\}$ 即可. □

注 这里所用的方法与前面的 "适当放大法" 完全一样, 但或许应称为 "适当缩小法" 了. 容易看出, 本题的关键在于分子的最高次数高于分母的最高次数. 只要保持这一特点, 在简化时就可以慷慨地缩小, 最后得到 N 的简单表达式.

接下来的例题是数学分析中的一个重要结果, 这里将给出 3 个证明, 并在几个注解中作进一步的补充.

例题 2.2.6 设 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明数列 $\{S_n\}$ 发散.

数列 $\{S_n\}$ 发散是不容易猜出来的. 如果读者 (用计算器或计算机) 试算一下这个数列的前若干项, 就会发现这个数列增长得很慢. 从第一项 $S_1 = 1$ 开始, 到 S_{83} 才第一次大于 5, 到 S_{12367} 才刚超过 10. 今后在 2.5.3 小节中学了有关 Euler 常数的知识后我们就能够准确估计 S_n 的近似值. 这里的精彩故事见数学通俗读物 [12] 的第八章.

历史上的证明最早是 Oresme (约 1323–1382) 在 1360 年左右发表的 (见 [29]). 后来 Bernoulli 兄弟, James Bernoulli (1655–1705) 和 John Bernoulli (1667–1748), 在 1689 年左右又给出了两个证明.

证 1 较为常见的证明就是 Oresme 的方法, 其实质是利用不等式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

这样就可以得到:

$$S_2=1+\frac{1}{2},\quad S_4=S_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>S_2+2\left(\frac{1}{4}\right)=2,$$
$$S_8=S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>S_4+4\left(\frac{1}{8}\right)>1+\frac{3}{2}=2.5,$$
$$\cdots\cdots.$$

不难用数学归纳法证明 (请读者完成): 对每一个 n 成立不等式

$$S_{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

可见数列 $\{S_n\}$ 无上界, 因此发散. □

证 2 这是 James Bernoulli 的证明 (引自 [29]). 他发现对任意的正整数 n, 有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{n^2-n}{n^2}=1-\frac{1}{n},$$

因此得到不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1. \tag{2.4}$$

由于 n 是任意的, 这样就知道

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2,$$
$$S_{25}=S_4+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{25}>3,$$

依此类推, 可见数列 $\{S_n\}$ 不可能收敛. □

证 3 用反证法. 若 $\{S_n\}$ 收敛, 记 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 分拆 $S_{2n}=A_n+B_n$, 其中

$$A_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$
$$B_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

由于 $B_n=\dfrac{1}{2}S_n$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\dfrac{1}{2}S$. 但由此又可以计算出

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-B_n)=\frac{1}{2}S.$$

比较 A_n 和 B_n, 则对每个 n 都有 $A_n - B_n > \dfrac{1}{2}$, 因此 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 收敛于同一个极限值是不可能的. □

注 $\{S_n\}$ 是严格单调增加数列. 在前两个证明的基础上不难证明 $\{S_n\}$ 是正无穷大量. 此外, 例题 2.2.6 还有许多其他解法. 在例题 2.3.4 中将会证明数列 $\left\{\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right\}$ 收敛, 而且极限大于 0. 由于这个数列的通项就是 $S_{2n}-S_n$, 如果数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$. 这与例题 2.3.4 的结论矛盾, 可看成是本题的第 4 个证明. 在下一章用 Cauchy 收敛准则还会对本题给出新证明.

下一个例题将介绍如何用构造两个子列的方法来证明数列发散.

例题 2.2.7 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散.

证 1 (几何方法) 从正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像 (如图 2.2) 可以设法构造出两个子列. 虽然我们并不知道它们是否收敛, 但却有把握知道它们 (如果收敛的话) 决不可能收敛于同一极限. 现在观察 $y=\sin x$ 在一个周期上的几何图像:

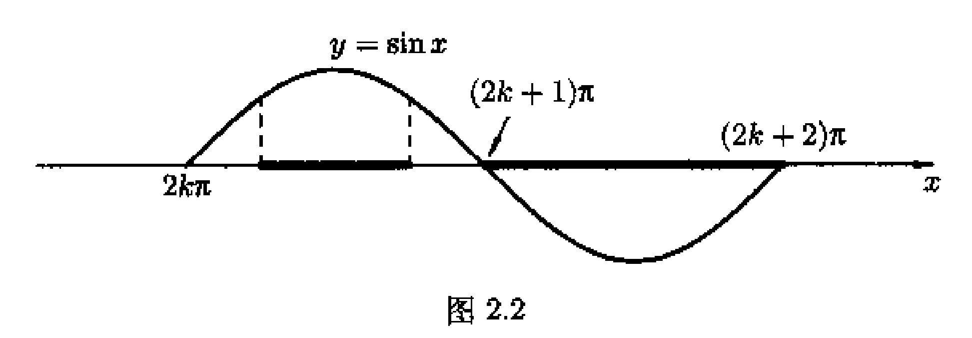


图 2.2

先看图 2.2 中介于 $2k\pi$ 和 $(2k+1)\pi$ 之间的 (加黑的) 区间 $[2k\pi+(\pi/4), 2k\pi+(3\pi/4)]$. 由于函数 $\sin x$ 在这个区间上的取值不小于 $\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, 同时区间长度又大于 1, 因此在该区间中一定存在一个自然数, 记为 n_k'. 对每个 k 都这样做, 就得到一个子列 $\{\sin n_k'\}$. 如果它收敛的话, 其极限一定不小于 $\sqrt{2}/2$.

类似地可以在图 2.2 上的区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ 中选出自然数 n_k'', 得到第二个子列 $\{\sin n_k''\}$. 它如果收敛的话, 极限一定不会大于 0.

因为收敛数列的每个子列都收敛于同一极限, 而现在所构造出的两个子列即使都收敛, 也不可能收敛于同一极限, 从而就推知 $\{\sin n\}$ 是发散数列. □

利用正弦函数的特殊性, 本题也可解答如下.

证 2 用反证法. 设存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, 则就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin(n))=0$. 由于 $\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1)$, 因此得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0$. 再利用 $\cos(n+1)=\cos n\cos 1-\sin n\sin 1$, 又导出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$. 这样一来就有

$$\lim_{n\to\infty}\sin n=\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

这与恒等式 $\sin^2 n+\cos^2 n=1$ 相矛盾. □

注 本例题的解法还有很多, 见下一章的例 3.4.3.

下一例题中的方法与上面完全不同. 在 2.6 节将对这类数列作专题讨论.

例题 2.2.8 设 $x_1=\dfrac{c}{2}$, $x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: 若 $c>1$, 则 $\{x_n\}$ 发散.

证 用反证法. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 记其极限为 A. 在递推公式

$$x_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{x_n^2}{2}$$

两边令 $n\to\infty$, 就得到

$$A=\frac{c}{2}+\frac{A^2}{2}.$$

这表明极限值 A 应当满足二次方程 $A^2-2A+c=0$. 但由于这个二次方程的判别式 $\Delta=4-4c<0$, 因此无实根. 这表明 A 不存在, 因此数列 $\{x_n\}$ 发散. □

注 1 实际上可以证明数列 $\{x_n\}$ 严格单调增加, 因此也是正无穷大量.

注 2 这个例题是 [14] 的第一卷的第 35 小节中的例 5 的一部分. 在那里对参数 c 的其他情况作了详细研究. 但其中对于 $c<-3$ 时未做深入讨论就说数列 $\{x_n\}$ 发散, 这是不正确的. 在 [24] 中的 8–14 页对此作了正确的讨论. 由于这个例子在 $c\leqslant 1$ 时与下面 2.6.3 小节中的题 3 (由 Logistic 映射生成的迭代系统) 完全相同, 因此本书正文中不再讨论 $c\leqslant 1$ 的情况.

下一个例题的内容和证明都很简单, 但实际上是无穷级数收敛的一个必要条件. 这在无穷级数理论中是一个基本内容.

例题 2.2.9 设有两个数列 $\{S_n\}$ 和 $\{a_n\}$, 且有关系如下:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad n\in\mathbf{N}_+.$$

若 $\{S_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为无穷小量. 反之, 若 $\{a_n\}$ 不是无穷小量, 则 $\{S_n\}$ 发散.

证 从 $n\geqslant 2$ 起有 $a_n=S_n-S_{n-1}$, 又当 $\{S_n\}$ 收敛时, $\{S_{n-1}\}_{n\geqslant 2}$ 也一定收敛, 而且收敛于同一极限, 在上式两边取 $n\to\infty$, 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. □

注 对于给定的数列 $\{a_n\}$, 将记号

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

称为以 a_n 为通项的**无穷级数**. 从 $\{a_n\}$ 出发, 就可以如例题 2.2.9 中的关系式那样定义数列 $\{S_n\}$, 称为该无穷级数的**部分和数列**. 如果 $\{S_n\}$ 收敛, 并有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则定义该无穷级数为收敛, 且称 S 为该无穷级数的和, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S.$$

否则就说该无穷级数发散.

无穷级数理论具有极其丰富的内容, 是本书下册的中心内容之一. 但由以上的简单介绍也已经可以看出, 无穷级数与数列有密切的联系. 实际上前面的例题 2.2.6 的内容就是证明以 $1/n$ 为通项的无穷级数发散 (于正无穷大). 这个级数一般称为**调和级数**.

用无穷级数的语言来说, 例题 2.2.9 的内容是: 无穷级数收敛的必要条件是它的通项 (所成的数列) 收敛于 0. 当然, 这并非是充分条件, 用例题 2.2.6 就可以说明这一点.

2.2.4 练习题

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.
2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

   (1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$;

   (2) 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (3) 设 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

   (4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

3. 求以下极限:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x| < 1$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{1+2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$.

   (最后两个题是 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ 的推广.)

4. 设 $s_n = a + 3a^2 + \cdots + (2n-1)a^n, |a| < 1$, 求 $\{s_n\}$ 的极限.

(试计算 $s_n - as_n$.)

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0, 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

6. 证明: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

8. 证明数列 $\{\tan n\}$ 发散.

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p},\ n \in \mathbf{N}_+.$$

证明 $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: (1) $p \leqslant 0$, (2) $0 < p < 1$.

§2.3 单调数列

关于单调数列的基本结论很简单, 只不过是:

(1) 单调有界数列一定收敛,

(2) 单调无界数列一定是有确定符号的无穷大量.

然而这两个基本结论在数列的研究中起着很重要的作用. 它们不仅是本节各个例题中的主要工具, 而且也是学习 2.5 节和 2.6 节的基础.

与 2.1 节一开始的收敛数列的定义相比较, 可以看出对单调数列来说, 我们可以从数列本身判定其为收敛或发散, 而不需要对极限的存在或不存在作假定. 这是一个很大的进步. 由于对单调有界数列只肯定了它的极限存在, 而没有给出极限本身, 因此这是在数学中的存在性定理的一个典型例子. 从下面的例题可以看出, 极限的存在性有时能帮助我们将极限计算出来.

如何对一般的数列从其本身来判定它收敛还是发散? 这就是下一章 §3.4 节中的 Cauchy 收敛准则要回答的问题.

2.3.1 例题

收敛数列当然不一定是单调数列, 但是有很多常用的数列确实是单调的, 或者从某一项开始是单调的. 例如以下几个常见数列的收敛性都可以从单调性出发得到证明 (虽然不一定是最佳的证明方法), 并求出它们的极限:

$$\{\sqrt[n]{a}\}(a>0), \{\sqrt[n]{n}\}, \left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}(k>0, a>1), \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}, \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}.$$

为了知道一个数列是否单调，一个自然的方法就是去比较在数列中的相继两项的大小. 这可以通过分析相继两项之比或差来达到目的. 以下几个例子都是如此，其中还介绍在知道极限存在后如何计算极限.

前两个例题是上一节的例题 2.1.1 和 2.1.2 的新解，但在问题的提法上有不同，不再是验证已给定数列是否以某个数为其极限了.

例题 2.3.1 用单调有界数列的收敛定理，证明 $\left\{\dfrac{n^5}{2^n}\right\}$ 收敛，并求其极限.

证 记数列的通项为 $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 则可以看出前后两项之比为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5.$$

分析右边的第二个因子，从 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^5 = 1$, 可见存在 N, 当 $n > N$ 时，满足不等式 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^5 < 2$. 因此，当 $n > N$ 时，就有

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 < a_n. \tag{2.5}$$

由此可见，至少从 $n > N$ 起数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少. 又由于 $\{a_n\}$ 是正数列，以 0 为下界，因此就可以用单调有界数列的收敛定理，知道存在极限 $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. 利用极限的存在性，在 (2.5) 左边的等式两边令 $n \to \infty$, 就有

$$a = \frac{1}{2} a \Longrightarrow a = 0. \quad \square$$

注 希望初学者比较这个方法与例题 2.1.1 中的方法. 这里在问题的提法，采取的思路和所需要的工具等方面都完全不同.

例题 2.3.2 研究数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 是否单调，并求出该数列的极限.

证 记 $a_n = \sqrt[n]{n}, n \in \mathbf{N}_+$. 计算数列的前几项，得 $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}$, 以及 $a_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1.44, a_4 = a_2 \approx 1.41, a_5 = \sqrt[5]{5} \approx 1.38, a_6 = \sqrt[6]{6} \approx 1.35, \cdots$, 可见这个数列有可能从第三项起严格单调减少. 比较前后两项，由于有

$$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} < a_n = \sqrt[n]{n} \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n,$$

只要证明当 n 充分大时右边的不等式成立，就可以证实我们的猜测正确. 利用平均值不等式，可以得到

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n + 1 + 2/\sqrt{n}}{n + 2}\right)^{n+2},$$

可见只要 $n>4$ 就可以使上式右边的表达式严格小于 1. 因此数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 至少从第 5 项起是严格单调减少数列. 又由于这个数列以 1 为下界, 因此从单调有界数列的收敛定理知道存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=a\geqslant 1.$$

以下只要证明 $a>1$ 是不可能的. 用反证法. 若有 $a=1+h, h>0$, 则当 n 充分大时应当成立 $\sqrt[n]{n}>1+h$, 从而得到

$$n>(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

但这是不可能的. 因此得出结论: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. □

对数列研究前后两项之比可以提升为一种方法, 并建立如下结果:

例题 2.3.3 设对于 $\{a_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=c<1$, 则 $\{a_n\}$ 是无穷小量.

证 取 $\varepsilon=(1-c)/2$, 有 N, 当 $n>N$ 时, 成立

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<c+\frac{1-c}{2}=\frac{1+c}{2}<1,$$

因此在 $n>N$ 时 $\{|a_n|\}$ 是严格单调减少数列. 由于它以 0 为下界, 因此收敛. 记它的极限为 a. 在不等式

$$|a_{n+1}|<\frac{1+c}{2}|a_n| \tag{2.6}$$

两边令 $n\to\infty$, 就得到 $0\leqslant a\leqslant a(1+c)/2$. 因为 $0<(1+c)/2<1$, 这只能导致 $a=0$. 从 $\{|a_n|\}$ 收敛于 0 可知 $\{a_n\}$ 也收敛于 0. □

注 这个例题中由于有很强的条件, 不用单调有界数列的收敛定理也能证出来. 例如, 在得到不等式 (2.6) 后, 引入记号 $c_1=(1+c)/2$, 然后证明存在常数 $M>0$, 使不等式 $|a_n|<Mc_1^n$ 在 $n>N$ 时成立, 由于 $c_1\in(0,1)$, 可知有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 因此, 对一般的数列研究其后项与前项之比也可能有用处.

例题 2.3.4 设 $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 比较数列的前后两项之差, 就可发现

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>2\cdot\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=0,$$

可见数列单调增加. 由于 $a_n<\dfrac{n}{n+1}<1$, 可取 1 作为上界, 因此数列收敛. □

注 以后将会求出本题中的数列极限是 $\ln 2$ (见例题 2.5.4, 11.4.1).

下一个例子并不难, 但是其中的方法很基本, 同时它的结论自 1976 年后在计算数学中变得很有用 (见例题后的注解).

例题 2.3.5 给定两个正数 a 和 b, 且有 $0<b<a$. 令 $a_0=a$, $b_0=b$, 并按照递推公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\ n\in\mathbf{N}_+,$$

定义数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. 证明这两个数列收敛于同一个极限.

证 利用 $0<b_0<a_0$ 和平均值不等式, 可以得到 $b_0<b_1<a_1<a_0$. 用数学归纳法可以证明对每个 n 均成立

$$b_0<b_1<\cdots<b_n<a_n<\cdots<a_1<a_0.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是单调有界的, 记极限为 A 和 B, 则均为正数. 在两个迭代式中任取一个, 令 $n\to\infty$, 就得到 $A=B$. □

注 一般称上述极限为数 a 和 b 的**算术几何平均值**, 记为 $AG(a,b)$. 利用积分换元计算可以得到 $AG(a,b)$ 的解析表达式 (见 [14] 第二卷中的 303 小节):

$$AG(a,b)=\frac{\pi}{2G},\ 其中\ G=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}.$$

算术几何平均值和上述解析表达式是大数学家 Gauss 在 14 岁 (1791 年) 时发现的, 并在他的早期研究工作中起了重要的作用. 但这个结果长期以来没有引起足够重视, 直到 1976 年才由 Salamin 和 Brent 等人以此为基础发展出一种算术几何平均值快速算法, 成为目前在计算机上计算圆周率 π 和初等函数的最有效方法之一. 例如对于 π 来说, 这种算法每计算一步可以使 π 的有效位数增加一倍或更多 (见例题 8.7.2). 关于 π 在近年来的许多奇妙发现可以参看 [1].

下一题就是前面的例题 2.2.4, 但方法与当时的夹逼方法完全不同.

例题 2.3.6 求数列 $\{a_n\}$ 的极限, 其中 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}, n\in\mathbf{N}_+$.

解 研究相继两项之比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1!+2!+\cdots+(n+1)!}{(n+1)(1!+2!+\cdots+n!)}=\frac{3+3!+\cdots+(n+1)!}{(n+1)+(n+1)2!+\cdots+(n+1)!}.$$

在 $n>2$ 时分母的每一项大于等于分子的对应项, 因此 $\{a_n\}$ 在 $n>2$ 后单调减少. 由于 0 是下界, 因此数列收敛. 又可发现联系前后两项的另一个关系式为

$$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{n+1},$$

在两边令 $n\to\infty$, 即知极限为 1. □

2.3.2 练习题

1. 证明: 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等.

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列的任何一项.

4. 设 $x_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdots\dfrac{n+1}{2n+1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

5. 设 $a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

6. 在例题 2.2.6 的基础上证明: 当 $p>1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},\ n\in\mathbf{N}_+.$$

7. 设 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.
(参见 2.6 节和例题 8.1.10.)

8. 设 $a_n=\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.
(观察 $a_n=\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\dfrac{2n-1}{(2n)^2}\right)$.)

9. 设 $a_n=\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
(方法与上一题类似. 在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\dfrac{\pi}{2}$. 这就是 Wallis 公式.)

10. 下列数列中, 哪些是单调的:

(1) $\left\{\dfrac{1}{1+n^2}\right\}$; (2) $\{\sin n\}$; (3) $\{\sqrt[n]{n!}\}$.

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

12. 对每个自然数 n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 中的根. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

§2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

求极限时困难往往在于处理不定式. 本节中介绍的几个命题就是处理 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 和 $\dfrac{0}{0}$ 的有力工具. 其他类型的不定式往往可转化为这两种不定式.

应当指出, 本节的内容与单调有界数列的收敛定理无关. 从更一般的观点来看, 本节的结论和方法与实数系以及实数系的基本定理也没有关系. 因此在讲授时间的安排上有很大的灵活性. 这些内容往往可作为考研复习的起点.

2.4.1 基本命题

由于以下几个命题中的证明方法很重要, 因此在列出命题的同时还给出完整的证明, 并在证明前后作一些分析, 以供读者参考.

命题 2.4.1 (Cauchy 命题) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 l, 则它的前 n 项的算术平均值 (所成的数列) 也收敛于 l, 即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=l.$$

分析 由于前面的各种方法, 包括夹逼定理、单调有界数列的收敛定理等, 对上述命题的证明似乎都用不上, 因此需要有新的方法.

直接观察表达式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \tag{2.7}$$

可以想像, 如果分子的每一项与 l 都充分接近, 则它们的算术平均值也会与 l 充分接近. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 只要令 $\varepsilon>0$ 充分小, 则从某项 (即有 N) 之后的每一项 (即 $n>N$ 的所有 x_n) 就会与 l 很接近, 也就是满足要求 $|x_n-l|<\varepsilon$. 因此可以将上述表达式分拆成两部分:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{x_1+\cdots+x_N}{n}+\frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{n}. \tag{2.8}$$

第二个分式中分子的每一项与 l 已充分接近. 由于一共有 $n-N$ 项, 如果分母不是 n, 而是 $n-N$, 则第二个分式的值就会与 l 充分接近了. 但这里并没有困难, 因为由此引起的差异是一个小于 1 的因子 $(n-N)/n$, 且当 N 固定时, 这个因子当 $n\to\infty$ 时的极限为 1.

对于 (2.8) 右边的第一个分式, 可以看出, 由于我们对分子各项的大小完全不能控制, 因此只有依靠分母 $n\to\infty$.

于是在 (2.8) 中的两个分式的性质完全不同. 在取定 N 后只要取 n 充分大, 第一部分的值将与 0 充分接近, 而第二部分则与 l 充分接近.

但是为什么可以将 N 固定? 这里又需要回到极限的定义. 我们知道, N 虽然并不是 ε 的函数, 但一般来说是与 ε 有关的. 如果 ε 取得越来越小, 则一般来说相应的 N 就会越来越大. 然而对给定的一个 ε 而言, 只要能取到一个 N 就够了. 为了证明表达式 (2.7) 的极限为 l, 根据极限定义, 只要对于每个 $\varepsilon>0$, 能有一个 N, 使得当 $n>N$ 时该表达式与 l 之差的绝对值小于 ε 即可. 由分析可见, 上面已取出的 N 是不够大的. 于是, 我们可以在 N 的基础上再取更大的 N_1, 使得当 $n>N_1$ 时 (2.7) 与 l 充分接近.

于是这里就发展出两步走的方法. 在这个方法中, 先取 N 是必须的, 否则就没有从 (2.7) 到 (2.8) 的分拆, 也无法控制第二项. 将它固定也是必须的, 否则就无法取出合乎要求的 N_1 去控制第一项.

根据以上分析, 我们可以写出证明如下.

证 根据条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 可以对给定的 $\varepsilon>0$ 取定 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $|x_n-l|<\varepsilon$. 然后可估计如下 (其中 $n>N$):

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-l\right|&=\frac{|(x_1-l)+(x_2-l)+\cdots+(x_n-l)|}{n}\\&\leqslant\frac{|(x_1-l)+\cdots+(x_N-l)|}{n}+\frac{|x_{N+1}-l|+\cdots+|x_n-l|}{n}\\&<\frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon,\end{aligned}\tag{2.9}$$

这里的 $M=|(x_1-l)+\cdots+(x_N-l)|$ 是一个确定的数. 由此可见, 只要取

$$N_1=\max\left\{N,\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]\right\},$$

就保证当 $n>N_1$ 时成立不等式

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-l\right|<2\varepsilon.\quad\square$$

注 1 Cauchy命题中的证明方法非常有特色, 是极限理论中的基本方法之一. 回顾上面的分析和证明, 可以看出: 首先, 将 (2.7) 分成性质不同的两个部分是关键. (2.8) 中的第二个分式在 $n\to\infty$ (而 N 固定) 时的极限就是 l, 因此可以说是"主要部分", 而 (2.8) 中的第一个分式在这时为无穷小量, 因此可以说是"次要部分". 其次, 对这两个部分的处理方法是不同的, 可以说是"分而治之". 从最后写出的证明可见, 只要对 $\varepsilon>0$ 取出 N, 就完成了对 (2.9) 的第二部分的估计. 但只有在取定 N 的基础上再取出 N_1 才能实现对 (2.9) 的第一部分的估计.

注 2 Cauchy 命题在数列 $\{x_n\}$ 为有确定符号的无穷大量时也是成立的 (这就是说在上述命题中的 l 可取为 $+\infty$ 或 $-\infty$). 读者应当至少对其中之一作出证明, 以此检验自己是否已经学会在 Cauchy 命题中的重要方法.

注 3 可以从数列变换的观点来理解 Cauchy 命题的意义. 这就是从 $\{x_n\}$ 出发构造出一个新数列, 后者的通项, 即第 n 项, 是第一个数列的前 n 项的算术平均值. Cauchy 命题就是说当第一个数列收敛时, 则第二个数列也收敛, 且极限相同. 在极限理论中有以 Toeplitz 定理 (见第二组参考题 10) 为代表的一系列命题, 它们都可以看成是 Cauchy 命题的推广, 即从一个数列变换为一个新数列, 然后讨论它们之间的敛散性关系. 这方面在 [47] 的第 I 篇第二章中有丰富的材料, 还可参考 [59] 的第 5 章和 [55] 等. 本书在第二组参考题中也有几个题供训练用.

命题 2.4.2 ($\dfrac{0}{0}$ **型的 Stolz 定理**) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

证 只对有限的 l 作证明. 根据条件对 $\varepsilon>0$ 存在 N, 使得当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\cdots$, 直到 $m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|\leqslant\varepsilon.\quad\square$$

命题 2.4.3 ($\dfrac{*}{\infty}$ **型的 Stolz 定理**) 设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的无穷大量, 又存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

(这个命题有时也称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 定理. 但从证明过程中可以发现实际上并不要求分子上的数列 $\{b_n\}$ 是无穷大量, 因此这里称为 $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理. 这对于应用有实际好处.)

证 只对 l 为有限的情况写出证明. 对 $\varepsilon > 0$ 存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立

$$\left|\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 n 有 $a_{n+1} > a_n$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_{n+1}-a_n)<b_{n+1}-b_n<(l+\varepsilon)(a_{n+1}-a_n).$$

取定 N, 并且将上述不等式中的 n 换成 $N, N+1, \cdots$, 直到 $n-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_N)<b_n-b_N<(l+\varepsilon)(a_n-a_N),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_N}{a_n-a_N}-l\right|<\varepsilon. \tag{2.10}$$

为了进一步得到关于 $\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|$ 的估计, 可以利用恒等式

$$\frac{b_n}{a_n}-l=\left(1-\frac{a_N}{a_n}\right)\cdot\left(\frac{b_n-b_N}{a_n-a_N}-l\right)+\frac{b_N-la_N}{a_n}. \tag{2.11}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, 存在 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时, 成立

$$0<1-\frac{a_N}{a_n}<2 \quad 和 \quad \left|\frac{b_N-la_N}{a_n}\right|<\varepsilon,$$

则在 $n > \max\{N, N_1\}$ 时就得到

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|<3\varepsilon. \quad \square$$

注 1 在以上三个证明中都用到了下列初等事实: 从

$$a<\frac{p_i}{q_i}<b \quad 和 \quad q_i>0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

可以得到

$$a<\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}<b.$$

在 Cauchy 命题中所有的 $q_i=1$.

注 2 初学者第一次见到恒等式 (2.11) 时可能会觉得奇怪, 它是怎样想出来的? 回顾证明, 可见当时的问题完全在于如何从已经得到的估计式 (2.10) 出发去

估计 $\left|\dfrac{b_n}{a_n}-l\right|$. 困难何在? 前一式的分母是 a_n-a_N, 而后一式的分母是 a_n. 恒等式 (2.11) 就是用于建立这两个分母不同的分式之间的联系. 打个比方来说, 怎样建立 3/5 和 2/7 之间的联系? 模仿恒等式 (2.11) 的内容就可以简单地得到

$$\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{5}.$$

注 3 读者可以将恒等式 (2.11) 与 Cauchy 命题证明中的分拆作比较. 如在 (2.11) 中令 $b_n=x_1+\cdots+x_n$, $a_n=n$ 代入, 可见完全一样.

注 4 这三个命题的逆命题都不成立. 以 Cauchy 命题为例, 在数列 $\{a_n\}$ 发散 (但不是有确定符号的无穷大量) 时, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

仍可能存在. 最简单的例子就是 $\{(-1)^{n-1}\}$, 这时上述极限为 0.

思考题 若在这三个命题的条件中将极限值 l 改为不带符号的无穷大量 ∞, 则结论均不成立. 请读者举出反例.

2.4.2 例题

首先重新处理例题 2.2.4 (即例题 2.3.6). 可是它现在已经是最平凡的题了.

例题 2.4.1 设 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\{a_n\}$ 的极限,

解 直接用 Stolz 定理计算如下:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!n}=1. \quad \square$$

例题 2.4.2 设 $a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

证 首先可看出 $\{a_n\}$ 为严格单调增加的正数列. 因此只有两种可能. 假定它有极限 a, 在递推公式

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$$

的两边令 $n\to\infty$, 得到 $a=a+1/a$, 这对任何有限数 a 都不可能成立. 因此知道 $\{a_n\}$ 只能是正无穷大量.

然后根据 2.1.5 小节的练习题 2, 只要用 Stolz 定理计算如下:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n^2}\right)=1. \quad \square$$

注 本例在以下几方面具有典型性: (1) 在 $\{a_n\}$ 为正无穷大量的基础上得到更为精确的结果: $a_n \sim \sqrt{2n}$; (2) 在运用 Stolz 定理时有一定的技巧性. 如果对 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}$ 直接用 Stolz 定理就很不好做 (参见例题 8.1.10 等).

例题 2.4.3 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k = a$.

证 利用 $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}$, 可以估计如下:

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - a\right| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - a)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a|.$$

对 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $k > N$ 时成立 $|a_k - a| < \varepsilon$. 对 $n > N$ 将最后一式作分拆:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a|. \tag{2.12}$$

对其中的第二部分的估计是容易的:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k} < \varepsilon.$$

对 (2.12) 中的第一部分的估计与 Cauchy 命题中有不同, 因为这里的第一部分的分子也与 n 有关. 但可以发现实际上并不难. 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $M > 0$, 使得 $|a_k - a| < M$ 对每个 k 成立. 再利用 $\dbinom{n}{k} < n^k$, 就可以估计如下:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a| < \frac{M(1+n+\cdots+n^N)}{2^n} < \frac{M(n^{N+1}-1)}{2^n(n-1)} < \frac{Mn^{N+1}}{2^n}. \tag{2.13}$$

由于 N 已取定, 最后一式的极限为 0, 因此存在 $N_1 > N$, 当 $n > N_1$ 时成立

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a| < \varepsilon.$$

合并对两部分的估计, 就得到当 $n > N_1$ 时成立 $\left|\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a_k - a\right| < 2\varepsilon$. □

注 1 在这个例题中我们使用了 Cauchy 命题的证明方法, 而不是命题的结论. 此外, 在一开始应用 $2^n = (1+1)^n$ 的二项式展开, 将要求证明的极限等式右

边的 a “无中生有”地写成与左边的表达式非常相似的形式, 这是证明的主要手段. 实际上, 这就是在数学中的一种常用方法, 可称为 “拟合法”.

注 2 在估计 (2.13) 时我们作了很多简化和放大, 甚至连分母上的因子 $(n-1)$ 都不要了. 这是因为关键完全在于分母上有指数函数 2^n, 而分子只是 n 的方幂. 因此整个表达式一定是无穷小量. 其他一切都是次要因素. 此外, 最后我们并没有写出 N_1 的表达式. 再次回顾数列收敛定义, 可见只要对每个 $\varepsilon>0$ 存在 N 满足要求即可, 并不要求具体求出 N.

2.4.3 练习题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.
2. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a.
3. 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a, $\{a_{2k}\}$ 收敛于 b, 且 $a\neq b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
   (注意: 虽然数列 $\{a_n\}$ 发散, 但前 n 项的算术平均值所成的数列仍可以有极限. 一个典型例子就是 $\{(-1)^n\}$.)
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.
   (本题可以说是 Cauchy 命题的另一种形式, 也很有用.)
5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$.
   (本题与 Cauchy 命题的关系是明显的.)
6. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.
   (本题对类型为 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的极限问题很有用, 可以说是例题 2.1.2 的一个发展. 这个结果在无穷级数的研究中也很重要.)
7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$.
8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.
9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$ $(n\geqslant 1)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=1$
10. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\alpha\beta$.

§2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

在数学分析中 e 是通过数列极限而引进的一个常数, 近似值为 $\mathrm{e}\approx 2.718\ 28$. 数 e 在数学以及一般科学中的重要性决不亚于圆周率 π.

2.5.1 与数 e 有关的两个问题

虽然数 e 不如圆周率 π 那样容易理解, 但仍然有与 e 密切有关的简单例子.

例题 2.5.1 如果一笔钱在银行里存入时间 T 后增值一倍, 存入时间 $T/2$ 后增值 50%, 那么顾客就可以采取以下策略: 将同样的钱先存入时间 $T/2$, 然后取出, 再存入时间 $T/2$, 最后得到的钱是原来的 $1.5^2 = 2.25$ 倍, 即增值 125%. 现在将条件进一步理想化, 设银行利率不随存入时间长短而改变, 即存入时间 $T/3$ 增值 33.33%, 存入时间 $T/4$ 增值 25%, 依此类推. 问: 用以上缩短存入时间并多次重复的方法能在时间 T 后得到的最大增值是多少?

不妨令 $T = 1$ 为单位时间. 设存取 n 次, 每次存入时间分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ (即时间总和为 T). 从平均值不等式有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leqslant \left(\frac{n+x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

且当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立等号. 这表明在固定次数存取的前提下以等时间安排最为有利. 于是问题归结为研究数列

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

的性质. 这个问题直接引向本节的主题 e. 从下面的分析和数 $\mathrm{e} \approx 2.718\,28$ 可知, 最大增值不会超过原有钱数的 171.83%.

例题 2.5.2 已知正数 a, 把它分成若干部分, 如果要使它们的乘积达到最大, 应该怎样分法? 容易知道, 将 a 分成相等的若干部分最为有利, 这是平均值不等式的又一次应用. 但平均值不等式并不能告诉我们应该将数 a 分成几部分最好? 以 $a = 10$ 为例, 可以试算出以下几个结果:

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25, \left(\frac{10}{3}\right)^3 \approx 37.037, \left(\frac{10}{4}\right)^4 = 39.062\,5, \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

今后可以证明: 当分成的每一部分的值与数 e 最接近的时候, 它们的乘积最大. 对 $a = 10$ 来说, 就是将它分成四部分时所得到的乘积最大.

注 以上的第二个例子取自著名的中学生课外读物 [3]. 我们将在例题 8.3.2 中证明以上结论. 那里还解决了与此密切相关的另一个问题, 即如果对 a 以及所分的每一部分都限制为自然数时, 应当怎样分才能使乘积最大?

2.5.2 关于数 e 的基本结果

命题 2.5.1 设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 严格单调增加且收敛.

证 1 数列 $\{a_n\}$ 的通项就是一个数自乘 n 次, 如再乘上 1, 就可看成为 $n+1$ 个数的乘积. 利用平均值不等式, 就有

$$a_n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加.

引入第二个数列 $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 再用平均值不等式, 得到

$$\frac{1}{b_n} = 1\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}}.$$

又由于对每个 n 有不等式 $a_n < b_n$, 可见 $\{a_n\}$ 严格单调增加, 以每一个 b_n 为上界, 同时 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 以每一个 a_n 为下界, 因此两个数列都收敛. 利用 $a_n(1+1/n) = b_n$, 可见它们的极限相同. □

在图 2.3 中将 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的表达式看成是 n 的函数, 分别用小圆点作出它们的前 10 项. 它们的极限就是 e, 在图中用水平虚线的高度表示.

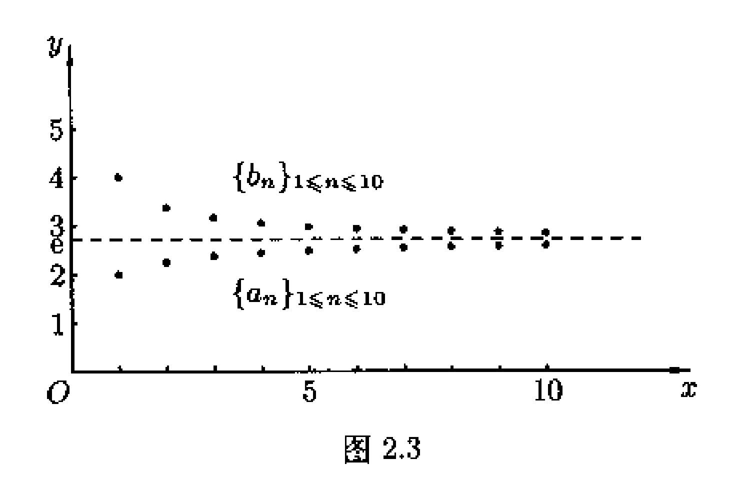


图 2.3

注 同时考虑两个数列的方法有一个优点, 即可以得到后面的不等式 (2.16). 若只要证 $\{a_n\}$ 有上界, 则有很多其他方法. 例如, 下面的构思见 [41]: 由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} < \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+2\cdot\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

可知 $\{a_n\}$ 以 4 为上界.

证 2 将数列的通项 a_n 用二项式展开, 得到

$$\begin{aligned}a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

比较 a_n 和 a_{n+1} 的类似展开式, 可以看出前两项相同, 而从第三项起, a_{n+1} 的展开式中的每一项都比 a_n 的展开式中的相应项来得大, 而且最后还要多出一个正项, 因此 $\{a_n\}$ 是严格单调增加数列. 又可以用上述展开式作如下估计:

$$a_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

因此 $\{a_n\}$ 有上界, 从而收敛. □

将上一命题中确定的极限记为 e, 它的近似值是 2.718 281 828 ⋯ . 在 1728 年大数学家 Euler 引入 e 作为自然对数的底 (见 [29]). 在本书中将自然对数 $\log_e x$ 记为 $\ln x$, 在其他文献中也有记为 $\log x$ 的. 从以后的学习中可以看到, 虽然在日常计算中一般用常用对数, 但在数学中用自然对数更为“自然”和方便得多.

下一命题表明数 e 又是另一个数列的极限, 它也称为 e 的**无穷级数展开式**.

命题 2.5.2 证明数 $\mathrm{e}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$.

(记号 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 是以 $1/n!$ 为通项的无穷级数, 其中 $0!=1$. 级数的和定义为部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限, 其中 $s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. 参见例题 2.2.9 的注.)

证 从上一命题中已知 $\{s_n\}$ 以 3 为上界, 又因 $\{s_n\}$ 严格单调增加, 因此收敛. 记其极限为 s, 则从 $a_n<s_n$ 得到 $\mathrm{e}\leqslant s$. 固定自然数 m, 并令 $n>m$, 就有

$$\begin{aligned}a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).\end{aligned}$$

其中不等号右边的和式是从 a_n 的表达式中去掉后 $n-m$ 个正项得到的. 令 $n\to\infty$, 就有

$$\mathrm{e}\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m.$$

再令 $m\to\infty$, 得到 $\mathrm{e}\geqslant s$. 因此有 $s=\mathrm{e}$. □

命题 2.5.3 记 $\varepsilon_n = \mathrm{e} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$, 证: $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n (n+1)! = 1$.

证 写出

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n (n+1)! = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+1)!}},$$

然后用 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理 (即命题 2.4.2), 这时

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = -\frac{1}{(n+1)!}, \quad \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = -\frac{1}{n!\,(n+2)},$$

可见所求的极限为 1. □

这个结果也可以从下面更为精细的估计得出.

命题 2.5.4 对于上述 ε_n 成立不等式 $\frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon_n < \frac{1}{n!\,n}$.

证 从 $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 可见 $\varepsilon_n > \frac{1}{(n+1)!}$ 成立. 对任意的 $m > n$, 估计

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^k} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}\right) \\
&= \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!\,n},
\end{aligned}$$

再令 $m \to \infty$, 就得到所求的第二个不等式. □

现在证明关于数 e 的一个基本结果, 它也是 Euler 首先得到的.

命题 2.5.5 自然对数的底 e 是无理数.

证 用反证法. 如果 e 是有理数, 则可写为 $\mathrm{e} = p/q$, 这里 p 和 q 是自然数. 从上两个命题知道, 对于自然数 q 可以将 e 的无穷级数展开式写成为两项之和, 即从级数的第一项到 $1/q!$ 为第一部分, 余下的 ε_q 为第二部分:

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) + \varepsilon_q. \tag{2.14}$$

由此可见, ε_q 一定是 $1/q!$ 的整数倍. 但从上一个例题对 ε_q 的估计知道, 有

$$0 < \varepsilon_q < \frac{1}{q!\,q},$$

因此这是不可能的. □

注 1 换一个写法, 对不等式

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!\,q}$$

的各边同乘以 $q!\,q$, 则可见在中间的一个整数的值介于 0 和 1 之间, 引出矛盾.

注 2 在 1873 年数学家 Hermite 进一步证明 e 是超越数, 也就是说 e 不是任何一个整系数代数方程的根. 这个证明可以在 [52, 54] 中找到.

本小节的前两个命题给出了以 e 为极限的两个数列. 在计算 e 的近似值时用它的无穷级数展开式的前有限项之和有很多优点: 计算方便, 收敛快, 又有很好的误差估计. 如果用 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 来计算 e 的话, 情况很不一样. 若令

$$\delta_n = \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

那么从本小节的命题 2.5.1 的证 1 可知

$$\delta_n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\mathrm{e}}{n} < \frac{3}{n}.$$

进一步还可以得到

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n\delta_n}{\mathrm{e}} = 1,$$

也就是说有

$$\delta_n \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}, \tag{2.15}$$

其证明见例题 8.1.4.

用 $\{a_n\}$ 计算 e 的近似值的实际例子: 在取 $n = 100$ 时, $a_{100} = 2.70\cdots$, 只有两位数字是正确的. 又取 $n = 10^4$, 则有 $a_{10^4} = 2.718\,14\cdots$, 也只有四位数字是正确的. 这里的误差与公式 (2.15) 的估计是一致的. 另一方面, 若用

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

来求 e 的近似值, 则在取 $n = 10$ 时就有 $s_{10} = 2.718\,281\,8\cdots$, 所写出的八位数字都是正确的. 这与公式 (2.14) 给出的误差估计也是一致的. 关于收敛的速度和计算效率的研究将会在计算方法课程中学习. 数学分析为此提供了基础.

小结 数 e 的引进和研究是一个重要范例. 这表明通过极限理论可以发现新的数. 应当指出, 由于这些数是通过极限来定义的, 对它们的研究就很不容易. 在这方面还有许多我们所不了解的东西, 有待今后的研究. 例如, 虽然已经证明了 e 和 π 都是无理数和超越数, 但迄今为止还没有能证明 e + π 是无理数.

2.5.3 Euler 常数 γ

命题 2.5.6 证明数列 $\{c_n\}$ 收敛, 其中 $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbf{N}_+$.

证 这里需要用不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \tag{2.16}$$

这可从命题 2.5.1 中建立的 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 取自然对数得到.

现在研究数列 $\{c_n\}$ 的前后两项之差. 由 (2.16) 的第一个不等式可见

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

因此 $\{c_n\}$ 是严格单调减少数列. 以下只要证明这个数列有下界即可.

在 (2.16) 的右边的不等式中将 n 用 $1, 2, \cdots, n$ 代入, 然后将这些不等式相加, 就得到

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln n + \frac{1}{n+1}.$$

因此有

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \frac{1}{n+1} > 0,$$

可见数列 $\{c_n\}$ 为正数列, 因此收敛. □

注 在确立了数列 $\{c_n\}$ 的单调减少之后, 也可以如同命题 2.5.1 的证 1 那样, 引入第二个数列 $\{d_n\}$, 其中 $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), n \in \mathbf{N}_+$. 这时有 $d_n < c_n\ \forall n \in \mathbf{N}_+$. 同样可由 (2.16) 的第二个不等式得到

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

因此 $\{d_n\}$ 是严格单调增加数列, 且有 $d_1 < \cdots < d_n < c_n < \cdots < c_1\ \forall n \in \mathbf{N}_+$. 因此数列 $\{c_n\}$ 以每个 d_n 为下界, 且和 $\{d_n\}$ 收敛于同一极限.

称以上数列 $\{c_n\}$ 的极限为 Euler 常数 (或 Euler-Mascheroni 常数), 记为

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0.577\,2.$$

由于上述命题, 我们得到

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

用这个公式和 Euler 常数的近似值就可以近似估计例题 2.2.6 中的发散数列 $\{S_n\}$ 当 n 很大时的值. 例如, 在 $n=10^6$ 时, 从

$$S_{10^6}=\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{k}\approx 6\ln 10+\gamma.$$

就得到 $S_{10^6}\approx 14.392726$. 用 Mathematica 软件验算, 知道这 8 位都是准确的. 实际上如用近似公式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\approx \ln n+\gamma+\frac{1}{2n}$$

则效果还要好得多. 关于这方面的材料可以参考 [63].

一个尚未解决的问题是: Euler 常数 γ 是否是无理数? 类似的问题在数学中还有很多. 有人称 Euler 常数是其中 "最大的谜" (见 [9] 中的 260 和 262 页).

2.5.4 例题

例题 2.5.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$

证 1 将 $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ 取对数, 则只需证明其极限等于 1. 经整理后得到

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)=\frac{n\ln n-(\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n)}{n}=\frac{b_n}{n}.$$

用 Cauchy 命题即知 (也就是 2.4.3 小节的第 4 题):

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=l\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=l,$$

计算得到 $b_{n+1}-b_n=n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 可见极限为 1. □

证 2 将 $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ 改写为 $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}\right\}$, 就可以用 2.4.3 小节的第 6 题中的方法来做. 这时记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, 因此只需计算后项与前项之比的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.\quad □$$

注 利用下一小节题 7 中的不等式可以得到本题的又一个解法. 此外, 本题还有积分学解法 (例题 11.4.2).

例题 2.5.4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

解 从 Euler 常数的讨论知道以

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

为通项的数列收敛. 因此就知道 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n}-c_n)=0$, 又有

$$c_{2n}-c_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2,$$

因此就求出

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}(c_{2n}-c_n)+\ln 2=\ln 2. \quad \Box$$

注 此题的另一巧妙解法见 2.8.3 小节中的例题 4. 此外本题在学了积分学后就只是一个常规练习题 (参见例题 11.4.1).

2.5.5 练习题

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(在计算中可以应用 2.1.5 小节的题 5 中有关连续性的结果. 但是要请读者注意, 在现阶段如下的做法是缺乏根据的 (以题 (3) 为例):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2.)$$

2. 设 $k\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

4. 设 $\{p_n\}$ 是正数列, 且 $p_n\to+\infty$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,2^n}{n^n}$

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

7. 证明: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$,

(由此又可得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.)

8. 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$, $n\in\mathbf{N}_+$. 证明: 对 $n\geqslant 2$ 成立不等式

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\leqslant S_n<n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

9. 设有 $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)$, $n=2,3,\cdots$, 又设 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

§2.6 由迭代生成的数列

这里所说的“由迭代生成的数列”是指在给出数列的第一项 a_1 后, 用递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 通过迭代生成的数列. 这里只讨论函数 f 与 n 无关的情况. 这样的数列在数学和其他领域中经常出现, 有很强的理论和实用价值. 例如, 大量的近似计算方法都是用迭代方式来实现的 (一个具体例子就是本书 §8.7 节的方程求根算法). 同时这类数列有很强的共同规律, 又与 20 世纪 70 年代中期发展起来的混沌研究直接有关. 本节将对此作一个基本介绍, 重点是几何方法.

在下一章学了 Cauchy 收敛准则后, 将进一步介绍处理迭代生成数列的另一种方法——压缩映射原理, 并且用这个原理对下一小节中的两个例题给出新的解法. 此外, 在那里还会看到, 上、下极限也是处理迭代生成数列的有用工具.

2.6.1 例题

例题 2.6.1 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 讨论数列 $\{a_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限. (本题的另一种形式是求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重}}$, 这时的第一步就是将数列写成递推形式.)

解 可以归纳地证明这个数列是严格单调增加的, 并且以 2 为上界. 实际上, 从递推公式和初始值为正就可推知数列的每一项为正. 从

$$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2,$$

以及

$$a_{n-1}<a_n \Longrightarrow a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+a_n}=a_{n+1},$$

可见数列是单调增加的. 又从 $a_1<2$ 和

$$a_n<2 \Longrightarrow a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2,$$

可见数列以 2 为上界. 因此它是收敛数列. 记极限是 a. 在递推公式 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 的两边令 $n\to\infty$, 就得到关于 a 的方程

$$a=\sqrt{2+a}.$$

因 $a>0$, 该方程只有一个正解 $a=2$, 因此就是所要求的极限. □

注 这里介绍证明 $\{a_n\}$ 有上界的另一个方法. 它在处理 a_n 中出现 n 重根式的类似问题时可能有用. 利用

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{2+2}=2,$$

就可以在 a_n 的表达式 $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ 中从最里面开始, 从内到外将根号脱去, 得到 $a_n<2$.

问题 在上述简单例题中是否包含了迭代生成数列所共有的某些普遍规律? 例如, 这样的数列是否都是单调的? 上界 2 与答案相同是否偶然? 求极限的方法是否都是如此? 总而言之, 在研究迭代生成数列的收敛和求极限时是否有普遍适用的方法? 在下一小节我们将要回答这些问题. 在此之前, 再看一个例题. 它说明迭代生成的数列不一定是单调的. 但这里仍然有规律.

例题 2.6.2 数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 生成. 讨论 $\{b_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

解 先假定数列 $\{b_n\}$ 收敛, 记极限为 b. 从迭代所用的递推公式中令 $n\to\infty$, 就得到 $b^2-b-1=0$. 它有两个根: $(1\pm\sqrt{5})/2$. 由于容易归纳地看出所有的 $b_n>0$, 因此如果存在极限, 则只能是 $b=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.618$.

考虑数列 $\{b_n\}$ 中的项 b_n 和 b_{n+2} 的关系. 可以从递推公式导出 $b_{n+2}=2-1/(b_n+1)$. 由于上面求出的 b 也满足等式 $b=2-1/(b+1)$, 就有

$$b_{n+2}-b=\frac{b_n-b}{(b_n+1)(b+1)}. \tag{2.17}$$

可见 b_n-b 和 $b_{n+2}-b$ 总是同号的. 利用 b 的近似值 1.618 和 $b_1=1$, $b_2=2$, 就知道对每个 k 成立 $b_{2k-1}<b<b_{2k}$. 直接研究差值

$$b_{n+2}-b_n=\frac{b_n-b_{n-2}}{(b_n+1)(b_{n-2}+1)},$$

并计算出数列的前几项 $b_1=1,b_2=2,b_3=1.5,b_4=1.666\ldots$, 可见 $\{b_{2k-1}\}$ 严格单调增加, $\{b_{2k}\}$ 严格单调减少, 而且有

$$b_1<b_3<\cdots<b<\cdots<b_4<b_2,$$

因此它们都是收敛数列. 在它们共同的递推公式 $b_{n+2}=2-\dfrac{1}{b_n+1}$ 中令 $n\to\infty$, 可见它们的极限都是 b. 因此数列 $\{b_n\}$ 收敛于 b. □

注 顺便指出本题与 Fibonacci 数列有关. 所谓 Fibonacci 数列, 即是由

$$F_1=1,F_2=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,n\in\mathbf{N}_+$$

确定的数列 $\{F_n\}$. 它的前十二项是 $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$. 如果要求其中相继两项的增长率的极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(F_{n+1}/F_n)$, 则从

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\cfrac{1}{\cfrac{F_n}{F_{n-1}}}$$

可见, 这个极限就是上一个例题中求出的答案: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\ldots$.

很自然会产生这样的问题: 以上解法是怎样想出来的? 为什么会去研究 b_{n+2} 和 b_n 的关系?

实际上与很多其他例题一样, 写在书本上的解答与实际的思维过程可能完全不同. 对本题的一般思维过程是先计算数列 $\{b_n\}$ 的前几项, 发现它们有 (例如) 以下的大小关系:

$$b_1<b_3<b_5<\cdots<b_6<b_4<b_2,$$

然后 (可能会提出) 猜测: $\{b_{2k-1}\}$ 可能单调增加, $\{b_{2k}\}$ 可能单调减少. 又假定数列收敛, 求出 b, 由此想到去研究 $b_{n+2}-b$ 和 $b_{n+2}-b_n$. 注意, 这里由几个特例作出猜测的方法是在科学研究中 (不仅仅在数学中) 普遍采用的归纳法. 但并不是数学归纳法. 数学归纳法是用来证明与自然数有关的命题 $P(n)$ 成立的严格的数学方法, 也称为完全归纳法. 一旦证明成功, 命题就成立了. 但上面所说的归纳法并非如此, 它更接近于科学研究中的一般思维方法. 从几个特例总结出来的命题可能对, 也可能错, 因此有时也称为不完全归纳法. 在这一点上说, 它似乎不如数学归纳法. 但实际上数学归纳法只是证明命题的一种严格的数学方法, 至于这个命题从何处得来, (在证明成功之前) 命题成立的可能性如何, 数学归纳法对此是无能为力的. 从不完全归纳法提出的猜测也被称为似然猜想, 在 Pólya 的 [45] 中有系统的论述. 该书和 [44, 46] 一起, 是有关数学思维和数学教育方面的名著. 在这方面还可以参考新近出版的 [48].

实际上, 上面两个例题中的确包含了许多迭代生成数列的共同规律. 如果掌握了这些规律, 就有可能更有效地处理同样类型的问题.

2.6.2 单调性与几何方法

关于迭代生成数列的第一个规律可概括在下列命题中.

命题 2.6.1 (第一律) 设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1}=f(x_n), n\in\mathbf{N}_+$. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 同时又成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi) \tag{2.18}$$

则极限 ξ 一定是方程 $f(x)=x$ 的根 (这时称 ξ 为函数 f 的**不动点**).

注 这个命题的证明是简单的, 只不过是在递推公式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边令 $n\to\infty$ 而已. 这在上面两个例题中都已这样做过. 命题中的条件 (2.18) 在今后学了函数的连续性概念后可替换为 f 在点 ξ 处连续或在更大的范围上连续等条件. (从第五章连续函数中的 Heine 归结原理知道, 函数 f 在点 a 处连续的充分必要条件就是对每个收敛于 a 的数列 $\{a_n\}$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(a)$.)

这个命题的用处是明显的. 它使我们在还不知道数列的收敛情况之前, 就可以先去求解方程 $f(x)=x$. 求出方程的根对判定原数列的收敛性往往会是有帮助的. 例如, 如果方程 $f(x)=x$ 在实数范围中无根, 则无须再作任何研究就可以断定: 这个由迭代生成的数列一定发散 (见前面的例题 2.2.8). 又如在上面的例题 2.6.2 中, 一开始就求出 b, 到最后才证明它是极限. 我们已经看到在证明中 b 所起的作用.

关于迭代生成数列的第二个规律是它的单调性. 如果假定在递推公式中的函数 f 为单调函数, 则很容易证明只有两种可能情况: (1) 这个数列是单调的, (2) 这个数列的奇数项子列和偶数项子列分别是单调的, 而且具有相反的单调性. 事实上, 在数学分析中见到的这类数列的绝大多数都合乎这个规律. 这就是下一个命题. 请注意其中既不要求数列收敛, 也不要求它有界 (区间 I 可以无界).

命题 2.6.2 (第二律) 设 $\{x_n\}$ 满足关系 $x_{n+1}=f(x_n), n\in\mathbf{N}_+$, 其中的函数 f 在区间 I 上单调, 同时数列 $\{x_n\}$ 的每一项都在区间 I 中, 则只有两种可能: (1) 当 f 为单调增加时, $\{x_n\}$ 为单调数列; (2) 当 f 为单调减少时, $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别为单调数列, 且具有相反的单调性.

证 分别讨论命题中的两种情况.

(1) 设 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加. 根据条件, 有 $x_n\in I, n\in\mathbf{N}_+$. 观察数列的前两项. 如有 $x_1\leqslant x_2=f(x_1)$, 则就有 $x_2=f(x_1)\leqslant f(x_2)=x_3$. 用数学归纳法可知, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 完全类似地可以证明, 在 $x_1\geqslant x_2$ 时, 数列收敛 $\{x_n\}$ 单调减少.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少. 注意: 复合函数 $f(f(x))$ 却是单调增加的. 严格地说, 只要 $a,b \in I$, $a < b$, 而且 $f(a), f(b) \in I$, 就成立 $f(f(a)) \leqslant f(f(b))$.

观察 x_1 与 x_3. 如果 $x_1 = x_3$, 则子列 $\{x_{2k-1}\}$ 为常值数列. 如成立 $x_1 < x_3$, 从 f 单调减少就有 $x_2 \geqslant x_4$, 然后推出 $x_3 \leqslant x_5$. 以下的讨论已无困难. 用数学归纳法即可证明这时子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调增加. 由于函数 f 单调减少, 从 $x_{2k} = f(x_{2k-1}), k \in \mathbf{N}_+$, 可知子列 $\{x_{2k}\}$ 单调减少. 对于 $x_1 > x_3$ 的讨论完全类似, 从略. □

注 不难从证明中看出, 以上的单调性还具有一个特点. 举例来说, 在 (1) 中的 $\{x_n\}$ 为单调增加的情况, 只有两种可能性: 或者是从某项之后为常值数列, 或者是严格单调增加数列.

现在问题已经很清楚, 如果迭代生成数列 $\{x_n\}$ 在函数 f 的单调区间内而且有界的话 (区间 I 可以无界), 则在情况 (1) 时数列必收敛, 而在情况 (2) 时数列可能收敛, 也可能发散, 但两个子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 则一定收敛. 因此问题取决于这两个子列的极限是否相等. 对于数列无界的情况可以作出类似的讨论.

对于具体问题来说, 应用以上两个规律的最简便方法就是作图. 首先在坐标平面上作出函数 $y = f(x)$ 的图像. 在命题 2.6.1 中的不动点就是曲线 $y = f(x)$ 和直线 $y = x$ 的交点. 对于很多简单函数, 不难确定它的单调区间. 为了知道迭代生成数列的具体情况, 往往不需要作很多计算, 而只要用我们在下面介绍的作图法即可. 它有一个很形象化的名称——蛛网 (cobweb) 工作法.

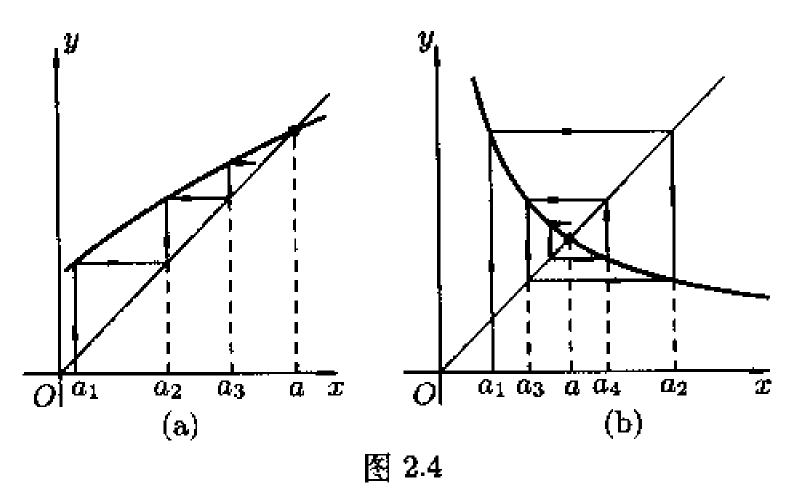


图 2.4

先看图 2.4(a). 在其中的曲线代表函数 $y = f(x)$. 它同直线 $y = x$ 的交点的横坐标 a 就是 f 的不动点. 从图中的 x 轴上代表初始值 a_1 的点出发作平行于 y 轴的直线, 它与曲线 $y = f(x)$ 的交点的纵坐标就是 $a_2 = f(a_1)$. 在这里的一个技巧是从上述交点作平行于 x 轴的直线与直线 $y = x$ 相交. 这个交点的横坐标当然也是 a_2. 在图中从这个交点作一条虚线与纵轴平行, 并将它与 x 轴的交点标为 a_2. 这就完成了蛛网工作法的第一步.

在图 2.4(a)上将这个方法继续做几步, 可以看出, 所得的数列是单调增加的. 这与命题 2.6.2 一致, 它可能以 a 为极限. 当然要严格建立这些结论的话还要进行分析证明. 但以上的几何观察在发现规律和提供思路上是很有用的.

将图 2.4(a)中的想法严格化, 就可以建立下面的命题. 在这个命题中, 对于 f 在点 a 的连续性条件按照命题 2.6.1 的注解来理解.

命题 2.6.3 设 a 是 $f(x)$ 的不动点, 函数 f 在 a 处连续, 在点 a 的邻域 $(a-r,a+r)$ 中严格单调增加, 并且在区间 $(a-r,a)$ 上有 $f(x)>x$, 而在区间 $(a,a+r)$ 上有 $f(x)<x$, 那么由迭代生成的数列只要第一项在 $(a-r,a+r)$ 内, 且不等于 a, 则以后就不会越出这个区间, 而且是以 a 为极限的严格单调数列.

证 从条件可知, f 在点 a 的两侧均有 $f(x)\neq x$, 因此 f 在区间 $(a-r,a+r)$ 上只可能有唯一的不动点 a. 不妨设初始值 $a_1\in(a-r,a)$. 从 f 的严格单调性和 $a_1<a$ 得到 $a_2=f(a_1)<f(a)=a$. 又因为在区间 $(a-r,a)$ 上满足条件 $f(x)>x$, 就有 $a_2=f(a_1)>a_1$. 合并起来就有 $a_1<a_2<a$.

用数学归纳法可以证明数列 $\{a_n\}$ 完全落在区间 $(a-r,a)$ 内, 且为严格单调增加. 由于它以 a 为上界, 因此收敛. 它的极限应当在区间 $[a_1,a]\subset(a-r,a]$ 内. 由于在这里 a 是唯一的不动点, 因此极限就是 a. 又类似地可以证明, 在初始值 $a_1\in(a,a+r)$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是以 a 为极限的严格单调减少数列. □

一方面, 如果将在区间 $(a-r,a)$ 上 "$f(x)>x$" 的条件改为 "$f(x)<x$", 而保持其他条件不动, 则当初始值 $a_1\in(a-r,a)$ 时, 就有 $a_2=f(a_1)<a_1$. 这样一来在几次迭代之后就可能会越出 $(a-r,a)$, 但在这之前是严格单调减少的.

另一方面, 当函数 f 在点 a 附近为单调减少时, 就可能出现第二种情况, 它同样有明显的几何意义. 这就是图 2.4(b)中所表示的情况. 这里数列 $\{a_n\}$ 的奇数项子列严格单调增加, 而偶数项子列严格单调减少. 当然为了迭代生成的数列不越出 f 的单调区间并收敛于不动点 a, 这时对函数 f 也需要加一定的条件才行 (读者可自己写出具体的条件并加以分析论证).

现在可以回答上一小节末提出的问题. 我们解例题 2.6.2 的方法是先作一个类似于图 2.4(b) 那样的草图, 其中的 $f(x)=1+(1/x)$. 然后在图上使用蛛网工作法. 这样就在写分析论证之前可以看出此题的迭代生成数列一定是第二律中的情况 (2). 剩下的就是通过细心的运算来写出证明而已. 这个求解的书写恰如用数学归纳法一样, 所要证明的结论是在证明之前用其他方法得到的.

以上所介绍的关于迭代生成数列的一些简单规律是许多科学家早就知道的, 并在生态学等领域有实际应用. 长期以来, 没有人去考虑在这些规律性之外还会有什么值得研究的. 在 20 世纪 70 年代中期, 开始有人对迭代数列作大范围的研究, 这是混沌研究发展的几个起源之一. 在这里要指出, 当函数 $y=f(x)$ 在定义

域上并非单调时, 在迭代过程中离开某个不动点的点完全可能再回到这个不动点附近, 甚至直接落到这个或另一个不动点上, 从而会出现极其复杂的行为. 有兴趣的读者可以阅读生态学家 R. M. May 的科普文章 [39]. 该文强调了迭代生成数列在生物学、经济学和社会科学中的重要性, 同时还呼吁将其中的最新发现放到初等数学的课程中去. 它在推动混沌学的发展上起过重要的作用.

2.6.3 练习题

在以下各题中均可试用几何方法, 或作出几何解释.

1. (1) 设 $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;
   (2) 设 $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   (这两题外形相似, 都可用本节方法解决. 但题 (2) 有更简单的直接解法.)
2. 设 $A>0$, $0<b_0<A^{-1}$, $b_{n+1}=b_n(2-Ab_n)$, $n\in\mathbf{N}_+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A^{-1}$.
3. 设参数 $b>4$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=bx_n(1-x_n)$, $n\in\mathbf{N}_+$. 证明: $\{x_n\}$ 发散.
4. 设 $x_1=b$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n^2+1)$. 问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.
5. 设 $x_0=a$, $x_n=1+bx_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 试求出使该数列收敛的 a,b 的所有值.

   (本题为线性迭代, 解法很多.)
6. (对于线性迭代的全面讨论) 设给定初始值 x_1, 然后用线性函数 $f(x)=ax+b$ 生成迭代数列 $\{x_n\}$, 即 $x_{n+1}=ax_n+b$. 试回答以下问题:

   (1) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1, $\{x_n\}$ 总是收敛的?
   (2) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1, $\{x_n\}$ 总是发散的?
   (3) 是否存在线性函数, 使对于不同的初始值 x_1, $\{x_n\}$ 收敛到不同极限?
   (4) 是否存在线性函数, 使对于某些初始值 x_1, $\{x_n\}$ 收敛, 而对于其他初始值 x_1, $\{x_n\}$ 发散?
7. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且满足 $x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2$, $n\in\mathbf{N}_+$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.
8. 设 $A>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.

   (这是求平方根的快速算法. 实际上可以得到对于收敛速度的估计:

   $$x_{n+1}-\sqrt{A}=\frac{1}{x_n}(x_n-\sqrt{A})^2\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}(x_n-\sqrt{A})^2,$$

   因此若记 $|x_n-\sqrt{A}|=\varepsilon_n$ 为第 n 次误差, 则在 n 充分大时有 $\varepsilon_{n+1}\approx\dfrac{1}{\sqrt{A}}\varepsilon_n^2$. 每迭代一次, 有效位数几乎增加一倍.)

9. 设 $A>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3A)}{3x_n^2+A}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{A}$. (这是求平方根的另一个快速算法. 请读者对收敛速度作估计.)

§2.7 对于教学的建议

本节在第一小节中提出了学习本章材料的一些意见, 在第二小节中举出了几个补充例题供参考, 只指出有关的思路和问题. 在第三小节给出了两组参考题.

2.7.1 学习要点

由于各种教材在材料安排上的不同, 深度要求也各不相同, 因此以下学习要点是根据本章所收入的内容而提出来的. 如本章一开始所说, 对数列极限的学习有相当部分将延续到下一章中. 以下内容主要是为上习题课的青年教师提供服务, 希望对其他读者也有一定的参考价值.

1. 数列极限的定义　由于数学分析以及许多后继的分析课程都建立在极限理论的基础上, 因此理解和掌握数列极限的定义无疑是极其重要的. 实践证明, 学生对数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义往往很不容易理解, 或是表面上理解了, 但并不会用它来解决一些简单问题. 实际上这是完全正常的现象. 因为微积分的历史说明了极限概念的正确形成很不容易, 有一个很长的发展过程 (参见 [6]). 因此我们不要急于求成, 对于极限的学习应当贯穿在整个数学分析的课程中. 学生通过大课学习和适当的习题训练, 特别是做一些带有理论性质的习题, 就可以逐步理解极限的真正意义和用法.
2. 要学会用对偶法则正面叙述数列 $\{a_n\}$ 发散的定义, 以及数列 $\{a_n\}$ 不收敛于给定的数 a 的定义. 注意二者不是一回事. 数列 $\{a_n\}$ 不收敛于数 a 时, 它可能是发散数列, 也可能是收敛数列, 但极限不是 a.
3. 对于给定的数列 $\{a_n\}$ 和数 a, 用数列收敛的定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 这里主要是学习"适当放大法". 不要轻视这个初步训练, 因为一方面它提供了第一批重要的基本结果, 另一方面这对于理解极限定义很有用处, 也是学习进一步内容的基础. 对适当放大过程中的简化技巧应当重视.
4. 对于常见的几个无穷大量的"级别"要有清楚的概念, 特别是下列关系:
$$\ln n\ll n^{\varepsilon}\ll a^n\ll n!\ll n^n\ (a>1,\varepsilon>0).$$
这里关于无穷大量之间的记号 $\ll$ 的定义是: $a_n\ll b_n$, 如果 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷大量, 且满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

5. Cauchy 命题 (即命题 2.4.1) 的结论和它的证明中所体现的方法应当作为本科生的微积分学习中的基本要求. 由于它与数列收敛的定义密切相关, 与单调有界数列的收敛定理无关 (也就是说与实数系的基本定理无关), 因此在时间的安排上可以提前. 如能学习 Stolz 定理当然更好.
6. 关于常数 e, γ 和迭代生成数列等材料应根据需要来决定如何使用.

2.7.2 补充例题

以下几个例题可用于习题课或复习.

第一个例题就是 "保号性定理". 它很容易, 可以检验学生是否掌握了极限的定义. 同时它又很有用, 值得将它作为课内练习题 (或测验题) 以加深印象 (证明从略).

例题 2.7.1 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于正数 $a > 0$. 证明: 对每个常数 $c \in (0, a)$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $a_n > c$. 又问: 可否取 $c = 0$ 和 $c = a$?

下面又是一题多解的典型, 而且其中的结论和今后的好多个问题有联系.

例题 2.7.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

这里只讲几种不同方法的主要思路 (还有很多其他方法可用):

1. 用数学归纳法 (或其他方法) 可证明有 $\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}\ \forall n$, 由此得到适当放大.
2. 用数学归纳法可证明有 $\sqrt[n]{n!} > \dfrac{n}{3}\ \forall n$, 由此得到适当放大.
3. 观察 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon \iff \dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!} < 1$, 然后利用已知的结果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0$ $(c > 0)$.
4. 在学了 Cauchy 命题 (见 2.4 节的命题 1)之后, 可以用不等式

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n}} < \frac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{n}.$$

这是一个思路很清晰的方法.

5. 从 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$ 可见, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ 作为无穷小量和 $\left\{\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right\}$ 是等价的.

在学习了单调数列的基础上可以将下一题作为课内练习题或在复习中使用.

例题 2.7.3 设 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

这里只指出以下几点:

1. 可以先试算数列的前几项, 寻找规律性.
2. 可给学生以提示: 分别研究这个数列的偶数项子列与奇数项子列的单调性.
3. 可以与闭区间套定理相联系. 即使当时大课上尚未讲到这个定理, 也可以在习题课上将它作为一个例子提前介绍其中的思想.
4. 可以介绍一个不容易发现的关系 (Catalan 恒等式):

$$\begin{aligned}a_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

这样就可以同例题 2.3.4 和 2.5.4 联系起来, 甚至求出极限.

5. 还可以估计通项与数列极限的误差.

关于由迭代生成的数列还可以考虑以下例题.

例题 2.7.4 设 $\{x_n\}$ 对每个 $n\in\mathbf{N}_+$ 满足 $(2-x_n)x_{n+1}=1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

本题的特点是要对所有可能的初始值情况进行讨论 ($x_1=2$ 是不可能的). 此题解法很多, 这里只指出以下几种思路完全不同的方法, 并希望展开讨论.

1. 在 2.6 节中介绍的几何方法在此完全有效. 如果用这个方法的话, 则第一步是作出函数 $f(x)=1/(2-x)$ 的图像.
2. 作代换 $y_n=1/(1-x_n)$ 后就很容易求出 y_n 的表达式, 然后令 $n\to\infty$ 求出 $\{y_n\}$ 的极限, 再求出 $\{x_n\}$ 的极限.
3. 也完全可以直接从 x_1 出发求出 x_n 的表达式, 然后令 $n\to\infty$ 求极限.

2.7.3 参考题

第一组参考题

1. 设 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
2. 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n\leqslant a_{n+2}$, $a_n\leqslant a_{n+3}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
3. 设 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n+a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 又存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$. 证明: $a \leqslant 1$.

5. 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n} = 0$.

7. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p})$.

8. 证明: 当 $0 < k < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k - n^k] = 0$.

9. (1) 设 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $y_n = n(x_n - x_{n-1})$, $n \in \mathbf{N}_+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

   (2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明: $\{y_n\}$ 收敛于 0.

10. (1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 0$, 证明: $\{a_n\}$ 是正无穷大量.

    (2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0$, 证明: $\{a_n\}$ 无界.

11. 证明: $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 其中右边的不等式当 $n \geqslant 6$ 时成立.

12. 证明: $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

13. (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

    (1) $n \geqslant 2$ 时成立

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 3 - \frac{1}{2!1\cdot 2} - \cdots - \frac{1}{n!(n-1)n};$$

    (2) $\mathrm{e} = 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}$;

    (3) 用 $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n!n}$ 计算 e 要比不加上最后一项好得多.

14. 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

15. 设已知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = 0$.

16. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} = 1$.

17. 设对每个 n 有 $x_n < 1$ 和 $(1-x_n)x_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

18. 设 $a_1 = b$, $a_2 = c$, 在 $n \geqslant 3$ 时 a_n 由 $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 定义. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

19. 设 a,b,c 是三个给定的实数. 令 $a_1=a,b_1=b,c_1=c$, 并以递推公式定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},n\in\mathbf{N}_+.$$

求这三个数列的极限.

20. (1) 设 $a_1>b_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n},b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n},n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 在 $a_1=2\sqrt{3},b_1=3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π. (这里可以利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}=\pi$.)

(注意本题与例题 2.3.5 完全不同. 实际上这就是计算圆周率的 Archimedes-刘徽方法的迭代形式 (参见 [4]). 在 (2) 中的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是单位圆的外切和内接正多边形的半周长 (请求出边数与 n 的关系).)

第二组参考题

1. 设 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

2. 证明: 对每个自然数 n 成立不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{\mathrm{e}}{2n}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\,\mathrm{e})$.

4. 记 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 用 K_n 表示使 $S_k\geqslant n$ 的最小下标, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$.

5. 设 $x_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\binom{n}{k}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 将二项式系数 $\dbinom{n}{0},\dbinom{n}{1},\cdots,\dbinom{n}{n}$ 的算术平均值和几何平均值分别记为 A_n 和 G_n. 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

7. 设 $A_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, $n\in\mathbf{N}_+$, 数列 $\{A_n\}$ 收敛. 又有一个单调增加的正数数列 $\{p_n\}$, 且为正无穷大量. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$.

8. 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2)=1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}\,a_n=1$.

9. 设数列 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 对每个非负整数 n 满足条件

$$u_n=\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}^2+u_{n+2}^2+\cdots+u_{n+m}^2),$$

证明: 若存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$, 则只能是每个 $u_n=0$.

10. (Toeplitz 定理) 设对 $n,k\in\mathbf{N}_+$ 有 $t_{nk}\geqslant 0$. 又有 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 定义 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

    (几种变型: (1) 将条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$; (2) 不要求 t_{nk} 非负, 将 (1) 中的条件改为存在 $M>0$, 使得对每个 n, 成立不等式 $|t_{n1}|+\cdots+|t_{nn}|\leqslant M$. 则结论对 $a=0$ 仍成立.)

11. 用 Toeplitz 定理导出 Stolz 定理.

12. 设 $0<\lambda<1$, $\{a_n\}$ 收敛于 a. 证明:
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{(1-\lambda)}.$$

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 并且存在常数 K, 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K$ 对每个 n 成立. 令 $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

    (从本题的条件已可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 但是可以举出例子说明仅仅有条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 不能得到
$$\lim_{n\to\infty}(x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1)=0.)$$

14. 设 $y_n=x_n+2x_{n+1}, n\in\mathbf{N}_+$. 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.

15. 由初始值 a_0 和 $a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 确定数列 $\{a_n\}$. 求 a_0 的所有可能值, 使得数列 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的.

16. 证明数列 $\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\cdots$ 收敛, 并求其极限.

17. 令 $y_0\geqslant 2$, $y_n=y_{n-1}^2-2, n\in\mathbf{N}_+$. 设 $S_n=\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{1}{y_0y_1}+\cdots+\dfrac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$.

18. 设 $x_1=c$, $x_{n+1}=a^{x_n}(a>0, a\neq 1), n\in\mathbf{N}_+$. 根据下面提供的函数 $f(x)=a^x$ 和 $f(f(x))$ 的单调性和不动点的知识, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性.

    (1) 在 $a>1$ 时函数 $f(x)=a^x$ 单调增加,

    (i) 如 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 无不动点. 证明: 不论 c 如何, 数列 $\{x_n\}$ 总是单调增加的正无穷大量,

(ii) 在 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时 f 恰有一个不动点. 证明: 当 $c \leqslant e$ 时数列 $\{x_n\}$ 单调增加收敛于 e, 而当 $c < e$ 时, $\{x_n\}$ 是单调增加的正无穷大量.

(iii) 如 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, 则 f 有两个不动点. 根据 $x_1 = c$ 的大小, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性.

(2) 在 $0 < a < 1$ 时函数 $f(x) = a^x$ 单调减少, 存在唯一不动点.

(i) 如 $e^{-e} \leqslant a < 1$, 则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 只有一个不动点. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 它的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 是具有不同单调性的单调数列.

(ii) 如 $0 < a < e^{-e}$, 则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 有三个不动点. 证明: 除非 $x_1 = c$ 恰好是 f 的不动点, 否则子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调收敛于不同的极限, 数列 $\{x_n\}$ 发散.

(这是关于迭代生成数列的一道名题, 从 Euler 开始就有许多人对它作过研究 (不限于在实数范围内), 在美国数学月刊 87 卷 (1981) 235–252 页有详细介绍, 并附有丰富的文献. 但是从混沌学的角度来看, 至少在实数范围内进行讨论时, 问题在本质上是简单的, 只不过依赖于对函数 $f(x) = a^x$ 和 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 的单调性和不动点个数的讨论. 这些问题在学了微分学后就不难解决 (见 8.8.2 小节的第二组参考题 17, 18). 此外, 对本题的讨论也可以和计算机实验相配合, 其中出现一次倍周期分岔.)

19. 设参数 $b > 0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = bx_n(1 - x_n), n \in \mathbf{N}_+$. 证明以下结论 (对于情况 $b > 4$ 的讨论即是 2.6.3 小节中的题 3):

(1) 当 $0 < b \leqslant 1$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 0,

(2) 当 $1 < b \leqslant 2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 $1 - \dfrac{1}{b}$,

(3) 当 $2 < b \leqslant 3$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 并收敛于同一极限 $1 - \dfrac{1}{b}$,

(4) 当 $3 < b \leqslant 1 + \sqrt{5}$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 但收敛于不同极限.

(这就是 20 世纪 70 年代中期以来在混沌学中研究得最多的范例之一. 映射 $f(x) = bx(1 - x)$ 的名称有 Logistic 映射, 抛物线映射等. 用这个映射通过迭代可以得到非常丰富而复杂的结果 (例如见 [39, 21, 38]), 对其中的许多问题的研究一直延续到现在. 虽然关于它的全面介绍在本书中是不可能的, 但以上四个小题就是进入混沌的前奏曲, 它们完全是初等的. 例如, 用动力系统的术语来说, 前三种情况中从 $x_1 = 0.5$ 出发的轨道 (即数列 $\{x_n\}$)

收敛到不动点上. 而最后一种情况就是说从 $x_1=0.5$ 出发的轨道收敛到一个周期为 2 的周期轨上. 特别当 $b=1+\sqrt{5}$ 时, 有

$$x_{2k-1}=\frac{1}{2}, x_{2k}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}, k\in\mathbf{N}_+,$$

也就是说这条轨道本身就是一个周期 2 轨道.)

20. 给定 $x_1,\cdots,x_n$, 令 $x_i^{(1)}=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$, $i=1,\cdots,n$, 其中 $x_{n+1}=x_1$. 归纳地定义 $x_i^{(k)}=\dfrac{x_i^{(k-1)}+x_{i+1}^{(k-1)}}{2}$, $i=1,\cdots,n$, 其中 $x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$, $k=2,3,\cdots$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

(本题较难, 可先讨论 $n=2,3,4$ 等简单情况. 已知有多种解法, 甚至还有用多元函数或线性代数为工具的解法.)

§2.8 关于数列极限的一组习题课教案

在本节介绍一组使用过的具体教案供参考, 教学对象为基地班学生, 教材为 [42] 的第二章 (数列极限). 根据大课的进度关于数列极限的习题课共安排 4 次, 每次为 3 课时. 我们从第一次习题课就开始给同学进行有关数学命题的讨论与表述的训练, 因为这很重要, 在大课中没有时间讲得太多, 但又往往为一些中学教学所忽视. 第一次的习题课中已包含确界是因为教材 [42] 的安排如此. 我们认为每次习题课都要安排一定的时间讲评批改过的课外习题. 关于习题课教案的组织在本书的第一章开头就讲了，使用本书的老师应当根据学生和教材等情况作具体把握.

2.8.1 第一次习题课

训练重点为: 极限的 ε-N 定义, 收敛数列的性质 (I), 命题的证明与讨论.

一、数列极限的 ε-N 定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义

   解析描述: $\forall\varepsilon>0, \exists N$, 使 $\forall n\geqslant N$, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

   直观描述 (用数轴画图).

   几何意义: 对 $\forall\varepsilon>0$, 在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外最多只有 $\{x_n\}$ 中的有限项.

2. 对定义的讨论:

   (1) ε 是一把可任意小的尺子, 用于刻画数列的各项接近 a 的情况. 因而 "$\forall\varepsilon>0$" 不可改为 "$\exists\varepsilon>0$"; "$\forall n\geqslant N$" 不可改为 "$\exists n\geqslant N$".

(2) 根据 ε 而取的 N 决不会是唯一的选择. 我们有时写 $N=N(\varepsilon)$, 只是表示 N 的选择是与 ε 有关的, 但并不表示非取满足定义中相关不等式的最小 n 为 N. $N=N(\varepsilon)$ 不是函数关系.

(3) 标准定义中 "$|x_n-a|<\varepsilon$" 可改为 "$|x_n-a|<k\varepsilon$, 其中 k 是与 ε 无关的正常数", 也可改为 "$\forall m\in\mathbf{N}, \exists N$ 使 $\forall n\geqslant N$, 有 $|x_n-a|<1/m$".

3. 适当放大法的一些实例

注意放大不等式的方向, 即在 $|x_n-a|<f(n)<\varepsilon$ 中由 $f(n)<\varepsilon$ 解出合乎要求的 N.

例题 1.1 用 ε–N 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

例题 1.2 设 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, $b>1$. 用 ε–N 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b x_n=\log_b a$.

二、收敛数列的性质 (I)

1. 极限的唯一性.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \iff x_n-a=o(1)\ (n\to\infty)$.
3. 收敛数列必有界. (逆命题成立否?)
4. 四则运算.

例题 2.1 利用收敛数列的性质求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}$ (n 重根号).

三、课堂练习题

1. 用 ε-N 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ (注意分情况 $a\neq0$, $a=0$).

2. 用 ε-N 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^c}{a^n}=0$, 其中 $c\geqslant0$, $a>1$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 又已知用 ε–N 语言描述这个极限时, 可取 N 与 ε 无关, 问这样的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是常值数列? 如果不是, 又具有怎样的特性?

4. (1) 正面叙述 $\{x_n\}$ 不是无穷小量 (用对偶法则).
   (2) 正面叙述 "$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n,m\geqslant N$ 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$" 的否命题.

5. 证明: 给定实数 a 的任意邻域 $O_\delta(a)$ 中必定同时存在有理数与无理数.

四、命题的证明与讨论

例题 4.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, 证明存在 N, 使 $n\geqslant N$ 时, $x_n>0$.

例题 4.2 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 问是否有 $a>0$?

(强调: 若肯定一个结论, 则要给出证明. 而否定一个结论则只需举出一个反例. 证明要做到: 说话有依据, 推理有逻辑性, 表述要清晰、简洁.)

例题 4.3 设 A 和 B 是两个非空数集, $A\bigcup B=\mathbf{R}$, 又 A 的每一个元素都小于 B 的每一个元素, 证明 $\sup A=\inf B$ (布置前需作简单讲解).

2.8.2 第二次习题课

训练重点为: 数列极限的 ε–N 语言 (通过习题讲评进行巩固), 数列基本概念的复习, 求极限的技巧.

一、习题讲评

1. 设 $x_n>0,\ a>0,\ a\neq 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1 \iff \lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=0$.

   (先抄一个错误的证法在黑板上, 再逐点纠正, 以此训练学生的表达能力, 特别是要分析证明叙述中的逻辑关系.)

2. 设 A,B 为非空的有界集, $C=\{\ x+y\ \mid x\in A,y\in B\ \}$, 证明: $\sup C=\sup A+\sup B$.

二、若干基本概念

有界集, 区间, 有界 (无界) 数列, 无穷大量, 无穷小量, 收敛数列, 发散数列.

通过提问、举例和标出相互关系等方式, 对上述概念进行复习以提醒学生, 数学分析学习必须建立在清晰的概念基础上. 仅对技巧感兴趣是学不好数学分析的. 复习时应注意对偶法则的使用.

三、收敛数列的性质 (II)

1. 夹逼定理.
2. 保号性.

四、Cauchy 命题与 Stolz 定理

对上述定理的应用方法、应用条件、证明要点进行复习, 但对其证明方法的展开放到下一次习题课, 这一次仅涉及它们的应用, 包括定理的变型.

五、例题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{x_n,y_n\}=\max\{a,b\}$.

   (包括利用 $\max\{x_n,y_n\}=\dfrac{x_n-y_n}{2}+\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 和四则运算.)

2. 设 $a_k>0,k=1,2,\cdots,m$. 证明 (用夹逼定理):

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

3. (1) 设 $x_0=1,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) 设 $\{F_n\}$ 是 Fibonacci 数列, 即 $F_0=F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$,

$n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

(在 (1) 中利用 $0\leqslant|x_n-a|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|x_0-a|$, 在 (2)中定义 $x_n=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdots\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$.

(设 $x_n=\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdots\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\right)$, 则 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)x_n=\dfrac{2^{4^n}-1}{2^{4^n}}$).

5. 设 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

6. 设 $0<\lambda<1, a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^na_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

(可先考虑 $a=0$ 的情形.)

注 上述例题均含一定的技巧. 在讲解过程中, 要注意简化、对比、建立辅助公式进行归纳等数学思想的渗透. 课后要布置一些类似的习题与课内例题相呼应.

六、课堂练习题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda+2\lambda^2+\cdots+n\lambda^n)$, 其中 $|\lambda|<1$.
2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.
3. 设 $b_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=b$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^{\frac{1}{n}}=b$.

   ($b=0$ 时, 用夹逼; $b>0$ 时, 取对数.)
4. 证明对应于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 的 Cauchy 命题.

2.8.3 第三次习题课

训练重点为: Cauchy 命题的方法, 单调有界定理, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

一、习题讲评

1. 指出下列解法的错误之处:

(1) 极限计算

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\&=0+0+\cdots+0=0.\end{aligned}$$

(错用收敛数列的四则运算法则.)

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1$. (没有考虑 $b=0$ 的可能性.)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{a^n}{n^k}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^k}-\dfrac{a^n}{n^k}}=0.$

(用 Stolz 定理时必须检验条件是否满足.)

(4) 用 Stolz 定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)-n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k\right]}$,

然后从 $n/(n+1)\to1$ 知道分母极限为 1, 因此答案也是 1.

(求极限不可“分而求之”.)

2. 无穷大量 (对偶法则); 常见无穷大量间的大小比较 (让学生罗列).

3. 级数与数列的关系 (级数收敛的必要条件, p-级数, 几何级数, Euler常数).

二、例题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$, 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=\alpha\beta$.

(先考虑 $\alpha=\beta=0$ 的情况, 学会从简单情况做起. 根据 ε 选择 N, 把要估计的项拆成两部分, 一部分可用 ε 或 $M\varepsilon$ (M 与 ε 无关) 控制. 另一部分含 n 和 N, 对固定的 N, 让 n 足够大, 就可使这部分变小.)

2. 设 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(先证 x_n 单调有界, 并设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 然后证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a$, 最后由 $a=\sin a$, $0\leqslant a\leqslant x_0<\dfrac{\pi}{2}$, 推得 $a=0$.)

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(用 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n$ 进行夹逼.)

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

(设 $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$, 利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 对 a_n 夹逼，得到

$$\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2n})<a_n<\ln(1+\frac{1}{n-1})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2n-1}),$$

即

$$\ln\frac{2n+1}{n}<a_n<\ln\frac{2n}{n-1},$$

两边取极限用夹逼定理可得 $\{a_n\}$ 的极限为 $\ln 2$.)

5. 设 A, B 是两个非空且互不相交的数集, 若 $A\cup B=[0,1]$, 则必存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $\forall\delta>0$, 于 $O_\delta(\xi)$ 中既有集 A 的点又有集 B 的点.

三、课堂练习题

1. 设 $0<x_0<1$, $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
2. 求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 证明: $\{a_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n+1}\}$ 收敛到同一极限.
4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$.

2.8.4 第四次习题课

主要内容为: 子列, 作本章小结, 进行单元测验.

一、子列

1. 概念: $\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$, 取项不重复, 且按顺序 $n_1<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$, 数列 $\{n_k\}$ 一定是严格单调增加的正无穷大量: $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$.
2. 有关性质:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的任一子列收敛到 a.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 有某一子列收敛到 a, 且 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的奇数项子列 $\{x_{2n-1}\}$ 和偶数项子列 $\{x_{2n}\}$ 收敛到同一极限.

(4) 如果 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 有收敛子列.

(5) 如果 $\{x_n\}$ 无界, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 为无穷大量.

(可挑若干性质加以证明)

二、本章小结 (从略)

三、单元测验 (约一小时)

1. 设 A 和 B 是上有界集, 定义 $A+B=\{\,x+y \mid x\in A,\ y\in B\,\}$. 证明 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a>0$, 证明: 存在 N, 使当 $n>N$ 时, $x_n>0$. 并举例说明逆命题不成立.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

4. 叙述并证明 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式的 Stolz定理.

5. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ (n 重根号) 的存在性.

第三章 实数系的基本定理

数列极限的基础是实数系的基本定理. 在上一章中占有中心地位的单调有界数列的收敛定理就是其中之一. 在本书中不讨论如何建立实数系, 而是在下面分节介绍实数系的其他 5 个基本定理, 包括以这些定理为基础的各种方法, 以及它们在数列极限理论中的应用. 在 §3.6 节介绍上极限和下极限. 本章中的许多内容都与数列极限有关, 它们与第二章一起, 给出了数列极限理论的比较完整的基本介绍. 最后一节是学习要点和两组参考题.

§3.1 确界的概念和确界存在定理

3.1.1 基本内容

这里最基本的概念、定义和定理如下 (其中凡提到数集时均指非空实数集):

1. 一个实数集合有上界不一定有最大数, 有下界不一定有最小数.
2. 定义: (1) 如果 A 是一个有上界的实数集, 则称 A 的最小上界为 A 的上确界; (2) 如果 A 是一个有下界的实数集, 则称 A 的最大下界为 A 的下确界.
3. 记号: 数集 A 的上确界记为 $\sup A$, 数集 A 的下确界记为 $\inf A$.
4. 如果数集 A 有最大数, 则这个最大数就是 A 的上确界; 如果数集 A 有最小数, 则这个最小数就是 A 的下确界.
5. 确界存在定理: 在实数系中, 有上界的数集一定有上确界, 有下界的数集一定有下确界.
6. 对无上界的数集 A, 约定 $\sup A = +\infty$; 对无下界的数集 A, 约定 $\inf A = -\infty$.
7. 由上确界的定义知道: 数 β 是数集 A 的上确界, 如果满足以下两个条件: (1) β 是 A 的上界, 即对每一个数 $x \in A$, 成立 $x \leqslant \beta$; (2) 比 β 小的数不会是数集 A 的上界, 即对每一个数 $\beta' < \beta$, 存在 $x' \in A$, 使得 $x' > \beta'$.
8. 由下确界的定义知道: 数 α 是数集 A 的下确界, 如果满足以下两个条件: (1) α 是 A 的下界, 即对每一个数 $x \in A$, 成立 $x \geqslant \alpha$; (2) 比 α 大的数不会是数集 A 的下界, 即对每一个数 $\alpha' > \alpha$, 存在 $x' \in A$, 使得 $x' < \alpha'$.
9. 数集的上 (下) 确界如果存在, 则必定唯一.

3.1.2 例题

由确界存在定理可以证明单调有界数列的收敛定理. 初学者要注意在这个证明中对于单调数列的极限作出了准确的刻画.

例题 3.1.1 用确界存在定理证明单调有界数列一定收敛.

证　不妨只讨论单调减少的有界数列. 设 $\{a_n\}$ 是一个这样的数列, 即有

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$

同时根据条件, 这个数列有下界 (它显然以 a_1 为上界).

现考虑数集 $A = \{ a_n \mid n \in \mathbf{N}_+ \}$. 由于数列有下界, 因此数集 A 有下界. 对 A 应用确界存在定理, 知道 A 有下确界. 记这个下确界为 $a = \inf A$.

根据下确界的定义, a 是数集 A 的最大下界. 因此一方面, 对每个 n 有 $a_n \geqslant a$. 另一方面, 对每一个 $\varepsilon > 0$, 比 a 大的数 $a+\varepsilon$ 就不能再是数集 A 的下界, 因此在数列中一定有一项比 $a+\varepsilon$ 还要小, 将这一项记为 a_N, 就得到

$$a+\varepsilon > a_N.$$

由于数列的单调减少性质, 当 $n > N$ 时成立

$$a+\varepsilon > a_N \geqslant a_n \geqslant a.$$

因此在 $n > N$ 时就得到

$$|a_n - a| \leqslant |a_N - a| < \varepsilon.$$

这样就证明了单调减少有界数列收敛, 而且它的极限就是数集 A 的下确界.　□

必须强调指出, 确界存在定理是在实数系 $\mathbf{R}$ 中才成立的.

例题 3.1.2 举例说明: 有上界的有理数集在 $\mathbf{Q}$ 中可以没有上确界, 有下界的有理数集在 $\mathbf{Q}$ 中可以没有下确界,

解　对两个论断之一举例就够了. 从中学数学出发, 将无理数理解为不循环十进无尽小数, 则只要取 $\sqrt{2}$ 的 n 位有效不足近似值作为 a_n: $a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.41$, $\cdots$, 就得到严格单调增加的有理数数列 $\{a_n\}$, 它收敛于 $\sqrt{2}$. 从上一个例题可知, 这也就是数集 $A = \{ a_n \mid n \in \mathbf{N}_+ \}$ 的上确界. 由于上确界唯一, 因此数集 A 在有理数集中就没有上确界.　□

注　由此可知: 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中的单调有界数列在 $\mathbf{Q}$ 中可以没有极限.

下一个例题说明在确界和数列之间存在密切联系.

例题 3.1.3 设 A 是有上界的数集, $\beta = \sup A$. 证明: 存在 $\{a_n\}$, 使 $a_n \in A, n \in \mathbf{N}_+$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. 又若 $\beta \notin A$, 则 $\{a_n\}$ 可以是严格单调增加的.

证　如果 A 的上确界就是数集的最大数, 即 $\beta = \sup A \in A$, 则只要简单取 $a_n = \beta\ (n \in \mathbf{N}_+)$ 即可. 这时数列 $\{a_n\}$ 是常值数列. 以下讨论 $\beta \notin A$ 的情况.

由于 β 是数集 A 的最小上界, 对每个自然数 n, $\beta - 1/n$ 不会是数集 A 的上界. 因此在 A 中至少存在一个数比 $\beta - 1/n$ 大, 将它记为 a_n. 对每个 n 都这样做, 就得到一个数列 $\{a_n\}$. 从不等式

$$\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta,\ n \in \mathbf{N}_+,$$

可见, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 β.

为了使得数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加 (这同时使数列中的每一项和其他任何一项不相等), 对以上的做法还要作一点改进. 实际上, 在取定第一项时, 有 $\beta-1 < a_1 \leqslant \beta$. 但由于 β 不属于数集 A, 因此它不会等于 a_1. 这样就得到

$$\beta - 1 < a_1 < \beta.$$

由于 a_1 和 $\beta - \dfrac{1}{2}$ 都比 β 小, 即 $\max\{a_1, \beta - \dfrac{1}{2}\} < \beta$, 因此可以在数集 A 找到 a_2, 使它同时满足条件:

$$\beta - \frac{1}{2} < a_2 < \beta \quad 和 \quad a_1 < a_2.$$

注意: 根据上述同样的理由, 已将不等式 $a_2 \leqslant \beta$ 改为 $a_2 < \beta$. 这样归纳地做下去, 就可以取到数列 $\{a_n\}$, 使得对每一个 n 同时成立两个不等式:

$$\beta - \frac{1}{n} < a_n < \beta \quad 和 \quad a_{n-1} < a_n.$$

其中第一个不等式使 $\{a_n\}$ 收敛于 β,第二个不等式保证它严格单调增加. □

3.1.3 练习题

1. 试证明确界的唯一性.
2. 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中哪个是对的?
3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明: $\beta = \sup A$.
4. 求下列数集的上确界和下确界:

   (1) $\{\, x \in \mathbf{Q} \mid x > 0 \,\}$; (2) $\{\, y \mid y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1) \,\}$;

   (3) $\{\, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbf{N}_+ \,\}$; (4) $\{\, ne^{-n} \mid n \in \mathbf{N}_+ \,\}$;

   (5) $\{\, \arctan x \mid x \in (-\infty, +\infty) \,\}$; (6) $\{\, (-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1} \mid n \in \mathbf{N}_+ \,\}$;

   (7) $\{\, 1 + n\sin\frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbf{N}_+ \,\}$.

5. 证明:

   (1) $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$,

   (2) $\inf\{x_n + y_n\} \geqslant \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}$.

6. 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leqslant y$. 证明: $\sup A \leqslant \inf B$.
7. 设数集 A 有上界, 数集 $B = \{\, x + c \mid x \in A \,\}$, 其中 c 是一个常数. 证明: $\sup B = \sup A + c$, $\inf B = \inf A + c$.

8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{ x+y \mid x \in A, y \in B \}$, 则 $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.
9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{ x+y \mid x \in A, y \in B \}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

   (合并以上两题可见: 当且仅当 $C = \{ x+y \mid x \in A, y \in B \}$ 时成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)

§3.2 闭区间套定理

3.2.1 基本内容

1. 称 $\{I_n\}$ 为一个闭区间套, 如果每个 I_n 是闭区间, 而且成立单调减少的包含关系, 即 $I_n \supset I_{n+1}, n \in \mathbf{N}_+$. 也就是说有 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$.
2. 闭区间套定理. 如 $\{I_n\}$ 为闭区间套, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. 又如 I_n 的长度 $|I_n| \to 0$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 为单点集.
3. 闭区间套定理的另一种形式: 设有闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足条件

   $$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n, n \in \mathbf{N}_+,$$

   则存在 ξ, 使得 $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, $n \in \mathbf{N}_+$. 又如 $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, 则上述 ξ 是唯一的. 这时数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 从点 ξ 的两侧单调收敛于同一极限 ξ.
4. 闭区间套定理的证明. 从定理的第二种形式, 就可以清楚地看出, 闭区间套的左右端点分别形成两个数列. 其中左端点所成的数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 以每个 b_n 为上界; 而右端点所成的数列 $\{b_n\}$ 单调减少, 以每个 a_n 为下界. 因此它们都收敛. 记 $\{a_n\}$ 的极限为 α, $\{b_n\}$ 的极限为 β. 从不等式 $a_n \leqslant b_n$ 两边取极限, 就有 $\alpha \leqslant \beta$. 而且对每个 n 成立 $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$. 因此在 α 和 β 之间取 ξ 即可. 在 $|b_n - a_n| \to 0$ 时, 从推导可见 $\alpha = \beta$, 因此 ξ 唯一.
5. **评注** 从表面上看, 与单调有界数列的收敛定理相比较, 闭区间套定理似乎没有多少新的东西. 后者只不过是含有两个有一定关系的单调数列而已. 但实际上并非如此. 这里可以指出两点: (1) 闭区间套定理并不限于实数系, 可以推广为非常一般的形式, 有许多重要应用, 而单调性定理则离不开数直线上的序关系; (2) 与闭区间套定理相联系, 有构造闭区间套的方法, 从而在应用中往往要比单调有界数列的收敛定理强得多 (见下面的例子).
6. 在上一章中已经见到许多例题, 在其中有收敛于同一极限的两个单调性相反的单调序列. 可以说在这些例题中自然地出现了闭区间套 (请看第二章的例题 2.3.5, 2.6.2, 2.7.3 和命题 2.5.1 的证 1, 命题 2.5.6, 2.6.2 等).

3.2.2 例题

例题 3.2.1 用闭区间套定理证明实数集 $\mathbf{R}$ 是不可列集.

证 用反证法. 设 $\mathbf{R}$ 可列, 则存在 $\mathbf{R}$ 与自然数集 $\mathbf{N}_+$ 之间的一一对应, 因此可以将实数集 $\mathbf{R}$ 的所有元, 即所有实数, 排序成一个序列:

$$\mathbf{R} = \{ x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \}.$$

现在开始构造闭区间套. 根据 x_1, 取闭区间 $I_1 \subset \mathbf{R} - \{x_1\}$. 然后根据 I_1 和 x_2, 取闭区间 $I_2 \subset I_1 - \{x_2\}$. 一般地, 在有了 I_{n-1} 之后, 可以根据 x_n, 取闭区间 $I_n \subset I_{n-1} - \{x_n\}$. 这样就可以归纳地得到一个闭区间套 $\{I_n\}$. 应用闭区间套定理, 存在一个实数 ξ, 它属于每一个闭区间 I_n, 因此对每一个 n, 都有 $\xi \neq x_n$. 这样就找到了一个不在 $\mathbf{R}$ 中的实数, 引出矛盾. □

现在通过例子介绍用 (Bolzano) 二分法来构造闭区间套的有力方法.

例题 3.2.2 用闭区间套定理证明: 有界数列必有收敛子列 (即凝聚定理).

证 设 $\{x_n\}$ 有界, 且有 $a < b$ 使 $a \leqslant x_n \leqslant b$ 对每个 n 成立. 改记 $a_1 = a$, $b_1 = b$, 令 $I_1 = [a_1, b_1]$ 为第一个闭区间. 然后取这个区间的中点 $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. 这样得到两个子区间: $[a_1, c_1]$ 和 $[c_1, b_1]$. 可以看出, 在这两个子区间中至少有一个含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项. 取具有这个性质的一个子区间为 I_2, 记为 $[a_2, b_2]$. (如果两个子区间都有此性质, 则任意取定一个为 I_2.) 然后取 I_2 的中点 $c_2 = (a_2 + b_2)/2$, 同样在两个子区间 $[a_2, c_2]$ 和 $[c_2, b_2]$ 中取定一个记为 $I_3 = [a_3, b_3]$, 它含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项. 这样进行下去, 就可以归纳地得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$. 在这里重要的是, 它不仅是一个闭区间套, 而且还具有构造过程所确定的两个**特殊性质**: (1) 从第二个闭区间起, 每个闭区间的长度是前一个闭区间的长度的一半. 也就是说有 $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$, $n \in \mathbf{N}_+$. (2) 在每个闭区间中含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

应用闭区间套定理于上述 $\{I_n\}$, 存在 (唯一) $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 但到此为止似乎与我们的目的还是毫不相干. (记住: 我们的目的是要找一个收敛子列.)

从闭区间 I_1 中任取 x_{n_1} (当然可取 $n_1 = 1$), 而在 I_2 中由于它含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 这就保证能在 I_2 中取到 x_{n_2}, 满足条件 $n_2 > n_1$. 这样归纳地做下去, 就得到一个子列 $\{x_{n_k}\}$. 它具有性质: $x_{n_k} \in I_k, k \in \mathbf{N}_+$. 由于

$$|x_{n_k} - \xi| \leqslant |I_k| = \frac{1}{2^{k-1}}|I_1| = \frac{1}{2^{k-1}}(b-a),$$

可见这个子列收敛于 ξ. □

注 请初学者重视上面这个例题, 因为其中所用的构造闭区间套的方法具有典型意义. 使用二分法必然具有性质 (1), 这保证了点 ξ 唯一. 但是更为重要的是构造出具有特殊性质 (2) 的闭区间套.

容易理解, 对于每个具体问题, 所构造的闭区间套一定要具有某种特殊性质. 在上面的例题中, 就是要求每个 $[a_n,b_n]$ 必须含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项. 构造过程就是要求将这个性质保持下去. 通过闭区间套定理将这个特性 "凝聚" 到一个点 ξ, 也就是说在 ξ 的任何一个邻域内都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

为什么要使得这里的每个闭区间 $[a_n,b_n]$ 具有这个性质而不是别的什么性质? 这完全由我们的目的所决定. 我们的目的是选出收敛子列. 由于用二分法得到的闭区间套收缩到唯一的点 ξ, 因此只要从第 k 个区间 $[a_k,b_k]$ 中选子列的第 k 项, 就保证了子列收敛. 于是问题成为有否可能按这样的方式选出子列?

设想一下, 如果已经有了子列的前 k 项: $x_{n_1},\cdots,x_{n_k}$, 它们的下标满足条件 $n_1<n_2<\cdots<n_k$. 为了在区间 $[a_{k+1},b_{k+1}]$ 内能找到子列的下一项, 即将数列的某一项选为 $x_{n_{k+1}}$, 满足 $n_k<n_{k+1}$, 当然需要在这个区间内有数列中的无穷多项以供选择.

以上考虑决定了在二分法中从两个子区间中究竟应当决定取哪一个. 当然也许两个子区间都可以, 这时任取一个即可. 但一般而言是不能任取的. 这方面的具体例子是下面的第一个练习题.

请初学者检查本书下面应用闭区间套定理的所有例子 (也包括例题 3.2.1), 观察在每个例子中构造闭区间套时的基本思想是否与这里所讲的相同.

小结　在用闭区间套定理证明某个结论时, 关键是如何构造闭区间套. 具体而言, 就是要确定该闭区间套应该具有什么样的特性. 构造过程应该使这种特性从第一个闭区间开始 "传递" 给第二个闭区间, 再从第二个闭区间 "传递" 给第三个闭区间, 依次类推, 直到将这个特性 "凝聚" 到闭区间套所共有的点的任意邻近. 当然这种特性要能解决我们的问题. 想清楚之后 (而不是之前) 就可以试写出证明. 如果还是证明不出, 说明上面的特性选择错了, 从头再来.

3.2.3　练习题

1. 如果数列是 $\{(-1)^n\}$, 开始的区间是 $[-1,1]$. 试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列. 又问: 你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列?
2. 如闭区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n,b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立.
3. 如 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件 $a_n<b_n$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\neq\varnothing$.
4. 用闭区间套定理证明确界存在定理.
5. 用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理.

§3.3 凝聚定理

3.3.1 基本内容

1. 凝聚定理 (Bolzano-Weierstrass 定理): 有界数列必有收敛子列.
2. 凝聚定理在实数系中成立, 在有理数集 **Q** 中不成立 (作为**思考题**).
3. **评注** 从数列的极限理论知道, 收敛数列一定有界, 但有界数列不一定收敛. 在一系列需要构造收敛数列的分析问题中, 往往采取分两步走的办法, 即一开始构造一个有界数列, 然后对它用凝聚定理得到收敛子列. 凝聚定理的这种用法往往有效, 用形象化的语言来说, 即是从混乱中找出了秩序.

3.3.2 例题

凝聚定理的证法很多. 除了例题 3.2.2 的证明外, 这里介绍一个较新的证明. 它依赖于一个很有意思的发现: 任何数列都有单调子列 (可以参考 [7, 41, 54]). 需要指出: 这个结论与实数系无关. 将它用于有界数列, 再利用单调有界数列的收敛定理, 就得到凝聚定理. 因此为证明凝聚定理, 我们只需证明下列结论.

例题 3.3.1 每个数列都有单调子列.

证 这对无界数列很容易, 从略. 现设 $\{a_n\}$ 有界. 称其中的项 a_n 有性质 (M): 若对每个 $i>n$ 成立 $a_n \geqslant a_i$. 这就是说, a_n 是集合 $\{\, a_i \mid i \geqslant n \,\}$ 的最大数.

分两种情况讨论. (1) 数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项具有性质 (M). 将它们按下标的顺序排队, 记为 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$, 满足条件 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. 那么就已经得到一个单调减少的子列 $\{a_{n_k}\}$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中只有有限多项具有性质 (M). 那么存在 N, 使得所有的 $a_n(n \geqslant N)$ 都不具有性质 (M). 从中任取一项记为 a_{n_1}. 因为它不具有性质 (M), 所以能找到 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_1} < a_{n_2}$. 同样因为 a_{n_2} 不具有性质 (M), 所以又有 $n_3 > n_2$, 使得 $a_{n_2} < a_{n_3}$. 这样就可归纳地定出严格单调增加的子列 $\{a_{n_k}\}$. □

注 若要作进一步了解, 可参考美国数学月刊, 95 卷 (1988), 44–45 页.

作为凝聚定理的一个应用, 同时也是对凝聚定理的一个发展, 有以下例题.

例题 3.3.2 一个数列如果不是无穷大量, 就一定有收敛子列.

证 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 它不是无穷大量. 写出无穷大量的定义, 即

$$\forall G>0, \exists N, \forall n>N, \text{ 成立 } |a_n|>G,$$

然后用 §1.4 节的对偶法则, 写出"不是无穷大量"的正面陈述:

$$\exists G_0>0, \forall N, \exists n>N, \text{ 成立 } |a_n| \leqslant G_0.$$

现在对 $N=1$, 取 $n_1>1$, 使 $|a_{n_1}|<G_0$. 再对 $N=n_1$, 取 $n_2>n_1$, 使得 $|a_{n_2}|<G_0$. 这样就可以归纳地得到数列 $\{a_n\}$ 的一个有界子列 $\{a_{n_k}\}$. 对它用凝聚定理, 就得到 $\{a_{n_k}\}$ 的一个收敛子列. 由于它也是 $\{a_n\}$ 的子列 (一个数列的子列的子列仍然是数列的子列), 这样就找到了数列 $\{a_n\}$ 的一个收敛子列. □

3.3.3 练习题

1. 对于给定的数列 $\{x_n\}$ 和数 a, 证明: 在 a 的每个邻域中有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项的充分必要条件是, a 是数列 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限.
2. 证明: 有界数列发散的充分必要条件是存在两个收敛于不同极限值的子列.
3. 证明: 若 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 则存在两个子列, 其中一个子列收敛, 另一个子列是无穷大量.
4. 用凝聚定理证明单调有界数列的收敛定理.

§3.4 Cauchy 收敛准则

3.4.1 基本内容

Cauchy 收敛准则是数列收敛的充分必要条件, 其中的基本概念和结论如下:

1. 定义: 称数列 $\{x_n\}$ 为基本数列 (或 Cauchy 数列), 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得对每一对自然数 $n,m>N$, 成立 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.
2. 基本数列的另一个等价定义是: 对每个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 对每个自然数 $n>N$ 和每个自然数 p, 成立 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.
3. 收敛数列一定是基本数列.
4. 基本数列一定是有界数列.
5. Cauchy 收敛准则: 收敛数列 $\Longleftrightarrow$ 基本数列.
6. Cauchy 收敛准则在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中不成立 (作为**思考题**).
7. **评注**
   (1) 与收敛数列的定义相比, Cauchy 收敛准则完全从数列本身出发, 不需要假定极限的存在, 这是一个很大的进步. 实际上, 只有很少的数列例子可以通过猜出极限, 然后用定义 (与适当放大法) 验证它收敛.
   (2) 在第一章中介绍了许多有关数列收敛的条件, 但都有很大的局限性. 在其中单调有界数列的收敛定理是数列收敛的充分条件, 在应用时也不需要知道极限, 但它当然依赖于单调性. 其他如夹逼定理是数列收敛的充分条件, 在应用时局限性更大. 数列有界是数列收敛的必要条件,

只能用于判定数列发散. 有一个与子列有关的数列收敛的充分必要条件, 即数列收敛等价于它的一切子列收敛. 由于数列也是自身的子列, 所以这个结论的充分性部分等于什么也没说.

(3) 在一般意义上来说, Cauchy 收敛准则是研究数列收敛的最有力工具, 但理解和使用有一定困难. 为此需要学习较多的例题.

(4) 纵观数学分析的全部内容, 在包括积分与级数的许多类型的极限中, 都有相应的 Cauchy 收敛准则, 而且往往是其他收敛判别法的基础. 因此, 它具有其他基本定理所不能代替的独特作用.

3.4.2 基本命题

命题 3.4.1 收敛数列一定是基本数列.

证 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则对 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此当 $n, m > N$ 时, 就有不等式

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\{a_n\}$ 为基本数列. □

命题 3.4.2 基本数列一定有界.

证 设 $\{a_n\}$ 为基本数列. 对 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时, 成立 $|a_n - a_m| < 1$. 取定 $m = N+1$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < |a_{N+1}| + 1$. 因此得到

$$|a_n| \leqslant M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\} \quad \forall n \in \mathbf{N}_+. \quad \square$$

以下给出 Cauchy 收敛准则的两个证明.

命题 3.4.3 (Cauchy 收敛准则) 数列收敛的充要条件是该数列为基本数列.

证 1 (用凝聚定理) 必要性部分已在命题 3.4.1 中得到证明, 这里只需证明收敛准则的充分性部分. 设 $\{a_n\}$ 是基本数列. 从命题 3.4.2 知道这个数列有界. 用凝聚定理, 数列 $\{a_n\}$ 有一个收敛子列, 记为 $\{a_{n_k}\}$. 又记这个子列的极限为 a. 显然, 只要证明数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

由于 $\{a_n\}$ 是基本数列, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时, 成立 $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. 又因子列 $\{a_{n_k}\}$ 的下标总有 $n_k \geqslant k$, 因此当 $k > N$ 时就有 $n_k > N$. 用 n_k 代替 m, 就在 $n > N$ 和 $k > N$ 时得到不等式 $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon/2$. 在其中令 $k \to \infty$, 就得出

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n > N. \quad \square$$

证 2 (用三分法构造闭区间套, 见 [41] 的 120 页.) 只需证明充分性部分. 设 $\{x_n\}$ 为基本数列, 因此有界. 从而有常数 a_1, b_1, 满足条件 $a_1 \leqslant x_n \leqslant b_1, n \in \mathbf{N}_+$.

将闭区间 $[a_1, b_1]$ 三等分. 令 $c_1 = (2a_1 + b_1)/3$, $c_2 = (a_1 + 2b_1)/3$, 得到三个长度相同的子区间 $[a_1, c_1]$, $[c_1, c_2]$ 和 $[c_2, b_1]$, 分别记为 J_1, J_2 和 J_3. 根据它们在实数轴上的左、中、右位置和基本数列的定义就可以发现: 在左边的 J_1 和右边的 J_3 中, 至少有一个子区间只含有数列 $\{x_n\}$ 中的有限多项.

这从几何上看是很直观的. 如果在 J_1 和 J_3 中都有数列中的无穷多项, 则可以在 J_1 中取 x_n, 在 J_3 中取 x_m, 使得 n, m 都可以任意大, 同时满足不等式

$$|x_n - x_m| \geqslant \frac{b-a}{3}.$$

这与 $\{x_n\}$ 为基本数列的条件矛盾.

于是可以从 $[a_1, b_1]$ 中去掉只含有 $\{x_n\}$ 中有限多项的子区间 J_1 或 J_3 (如果两个子区间都是如此则任去其一), 将得到的区间记为 $[a_2, b_2]$.

重复这个过程, 就得到一个闭区间套 $\{[a_k, b_k]\}$, 它具有两个特殊性质: (1) 闭区间套中的每个区间的长度是前一个区间长度的三分之二, (2) 每一个 $[a_k, b_k]$ 中含有数列 $\{x_n\}$ 从某项起的所有项. 性质 (1) 保证存在 ξ, 使得闭区间套的端点序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 从两侧分别单调地收敛于 ξ, 即有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$.

现在我们证明: 这个 ξ 就是基本数列 $\{x_n\}$ 的极限. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 有 N, 使得 a_N 和 b_N 进入点 ξ 的 ε 邻域, 也就是说有 $[a_N, b_N] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. 由于闭区间 $[a_N, b_N]$ 又具有性质 (2), 即含有数列 $\{x_n\}$ 中从某项之后的全部项, 因此存在 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时, 成立不等式 $|x_n - \xi| < \varepsilon$. □

思考题 根据例题 3.2.2 的注, 比较上述证明与例题 3.2.2 的异同之处.

3.4.3 例题

例题 3.4.1 设数列 $\{b_n\}$ 有界, 令 $a_n = \dfrac{b_1}{1\cdot 2} + \dfrac{b_2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{b_n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 取常数 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leqslant M$, $n \in \mathbf{N}_+$. 然后对任意 $p \in \mathbf{N}_+$ 作估计

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant M\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right) \\
&= M\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right)\right] \\
&= M\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}\right] < \frac{M}{n+1}.
\end{aligned}$$

因此对 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [M/\varepsilon]$, 就可使 $n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}_+$ 时, 成立 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. 这样就证明了 $\{a_n\}$ 是基本数列. 根据 Cauchy 收敛准则知道 $\{a_n\}$ 收敛. □

注 由于 $\{b_n\}$ 除了有界性之外没有任何其他已知性质, 因此 $\{a_n\}$ 谈不上有单调性, 从而第一章的主要方法, 即单调有界数列的收敛定理, 在这里完全失效. 可见 Cauchy 收敛准则是一个非常有力的工具.

下一个例题在第二章中已经有了 3 个证明 (见第二章例题 2.2.6). 现用本节的 Cauchy 收敛准则给出新的证明, 但也可以说是那里的第二个证明的改写.

例题 3.4.2 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明 $\{S_n\}$ 发散.

证 写出

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

可见对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 和任意 N, 在 $n, m > N$ 时, 只要取 $m = 2n$, 不等式 $|S_n - S_m| < \frac{1}{2}$ 就不可能成立. 这表明数列 $\{S_n\}$ 不是基本数列, 因此发散. □

同样对于例题 2.2.7 可以用 Cauchy 收敛准则写出新的证明.

例题 3.4.3 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散.

证 这个证明与例题 2.2.7 中的 (以几何观察为基础的) 第一个证明类似. 从那里的图 2.2 可见, 对每个 $k \in \mathbf{N}_+$, 可以找到自然数 n_k' 和 n_k'', 使 $\sin n_k' \geqslant \sqrt{2}/2$, $\sin n_k'' \leqslant 0$. 因此 $\sin n_k' - \sin n_k'' > 0.5$. 由于 n_k' 和 n_k'' 可任意大, 因此 $\{\sin n\}$ 不可能是基本数列, 根据 Cauchy 收敛准则知道它一定是发散数列. □

3.4.4 压缩映射原理

在第一章中介绍了用于迭代生成数列的几何方法. 应当指出, 这个方法完全依赖于实数的有序性 (即在实数轴上点有序), 也就是说它只能用于一维问题. 本节要介绍的压缩映射原理以 Cauchy 收敛准则为基础, 它在处理迭代生成数列时很有效, 而且可以推广到多维或甚至无穷维的问题上去. 当然, 压缩映射原理在本质上是局部性结果, 对于大范围的非线性问题一般无效.

压缩映射的定义 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义, $f([a,b]) \subset [a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

命题 3.4.4 (压缩映射原理) 设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ.

(3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leqslant \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和 $|a_n - \xi| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$ (**即事后估计与先验估计**).

证　(注意在这个证明中不需要函数 f 的连续性概念.)　由于 $f([a,b])\subset[a,b]$, 因此 $\{a_n\}$ 必在 $[a,b]$ 中. 根据 Cauchy 收敛准则估计

$$|a_n-a_{n+p}|\leqslant k|a_{n-1}-a_{n+p-1}|\leqslant k^2|a_{n-2}-a_{n+p-2}|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant k^n|a_0-a_p|\leqslant k^n(b-a).$$

可见对 $\varepsilon>0$, 只要取 $N=[\ln(\varepsilon/(b-a))/\ln k]$, 当 $n>N$ 和 $p\in\mathbf{N}_+$ 时, 就有 $|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon$. 因此 $\{a_n\}$ 是基本数列, 从而收敛. 记其极限为 $\xi\in[a,b]$. 为了证明这个 ξ 是 f 的不动点, 需要研究第二个数列 $\{f(a_n)\}$. 从不等式 $|f(a_n)-f(\xi)|\leqslant k|a_n-\xi|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$ 可见数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(\xi)$.

在 $a_{n+1}=f(a_n)$ 两边令 $n\to\infty$, 就得到 $\xi=f(\xi)$. 因此 ξ 是 f 的不动点.

如果 f 在 $[a,b]$ 上还有不动点 η, 即 $\eta=f(\eta)$, 则就有 $|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant k|\xi-\eta|$. 由于 $0<k<1$, 只能有 $\xi=\eta$. 因此 f 在 $[a,b]$ 上的不动点是唯一的. 这样就证明了命题的 (1) 和 (2).

命题之 (3) 的前一式可从估计式

$$|a_n-\xi|=|f(a_{n-1})-f(\xi)|\leqslant k|a_{n-1}-\xi|\leqslant k(|a_{n-1}-a_n|+|a_n-\xi|)$$

得到

$$|a_n-\xi|\leqslant\frac{k}{1-k}|a_n-a_{n-1}|.$$

又由上式出发, 利用 $|a_j-a_{j-1}|\leqslant k|a_{j-1}-a_{j-2}|$ 就可以如下得到 (3) 的后一式:

$$|a_n-\xi|\leqslant\frac{k^2}{1-k}|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{k^n}{1-k}|a_1-a_0|.\quad\Box$$

注　在 (3) 中的两个不等式在实际计算中很有用处. 前一个不等式可以从相继的两次计算估计当前误差, 称为事后估计; 后一个不等式比前一个要粗一些, 但可以用于在计算之前估计要迭代多少次才能达到所要的精度, 称为先验估计.

下面介绍如何将压缩映射原理用于 §2.6 节中的两个典型例题. 它们的解法和那里完全不同.

例题 3.4.4　设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\in\mathbf{N}_+$. 讨论数列 $\{a_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

解　这时 $f(x)=\sqrt{2+x}$. 取闭区间 $[0,2]$, 则可实现 $f([0,2])\subset[0,2]$. 从

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}$$

知道可取 $k=1/(2\sqrt{2})$ 为压缩常数. 于是数列 $\{a_n\}$ 的收敛性已为压缩映射原理所保证, 而且极限是 f 的唯一不动点 2.　$\Box$

例题 3.4.5 数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 生成. 讨论数列 $\{b_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

解 这里的函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$. 观察

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{|xy|},$$

并考虑如何选择区间. 这里要利用函数 f 在 $x>0$ 时单调减少, 以及数列的前几项 $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1.5,\cdots$. 如果用以 $b_1=1$ 和 $b_2=2$ 为端点的闭区间 $[1,2]$, 则可以实现 $f([1,2])=[1.5,2]\subset[1,2]$. 但在这个区间 $[1,2]$ 上不能取到在 0 和 1 之间的压缩常数. 再尝试以 $b_2=2$ 和 $b_3=1.5$ 为端点的区间 $[1.5,2]$, 发现有 $f([1.5,2])\subset[1.5,2]$, 同时可以估计出

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x-y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{(1.5)^2}|x-y|=\frac{4}{9}|x-y|\quad\forall x,y\in[1.5,2].$$

由于数列 $\{b_n\}$ 从第二项起就进入 $[1.5,2]$, 因此由压缩映射原理保证了它的收敛性. 极限就是 f 在 $x>0$ 中的唯一不动点 $b=(1+\sqrt{5})/2$. □

注 以上两个例题的解法都是去验证压缩映射原理的条件满足. 但实际上往往可以直接应用原理中的思想方法. 例如, 在例题 3.4.5 中可以先证明从 $n=2$ 起, $b_n\in[1.5,2]$ 成立. 然后得到 (利用公式 (2.14))

$$|b_{n+2}-b|=\left|\frac{b_n-b}{(b_n+1)(b+1)}\right|\leqslant\frac{4}{25}|b_n-b|,$$

从而有 $|b_{2k}-b|\leqslant|b_2-b|\cdot\left(\dfrac{4}{25}\right)^{k-1}$, 即知道 $\{b_{2k}\}$ 收敛于 b. 同理可证 $\{b_{2k-1}\}$ 也收敛于 b.

3.4.5 练习题

1. 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答 "是", 请作出证明; 若回答 "不一定是", 请举出反例:

   (1) 对每个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 成立 $|x_n-x_N|<\varepsilon$;

   (2) 对所有 $n,p\in\mathbf{N}_+$ 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant p/n$;

   (3) 对所有 $n,p\in\mathbf{N}_+$ 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant p/n^2$;

   (4) 对每个自然数 p 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n+p})=0$.

2. 用对偶法则于数列收敛的 Cauchy 收敛准则, 以正面方式写出数列发散的充分必要条件.

3. 证明以下数列为基本数列, 因此都是收敛数列.

   (1) $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n \in \mathbf{N}_+$;

   (2) $b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}_+$;

   (3) $c_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}, n \in \mathbf{N}_+$.

4. 设 $a_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2!} + \cdots + \frac{\sin n}{n!}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 有界, 但不单调; (2) $\{a_n\}$ 收敛.

5. 设从某个数列 $\{a_n\}$ 定义 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, $n \in \mathbf{N}_+$, 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛.

   (本题可以看成是上一题和例题 3.4.1 的推广.)

6. 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+$, 其中 $p \leqslant 1$, 证明 $\{S_n\}$ 发散.

7. 天文学中的 Kepler 方程 $x - q\sin x = a$ $(0 < q < 1)$ 是一个超越方程, 没有求根公式 (见 [15] 的 22 和 72 页). 求近似解的一个方法是通过迭代. 取定 x_1, 然后用递推公式 $x_{n+1} = q\sin x_n + a$, $n \in \mathbf{N}_+$. 证明这个方法的正确性.

   (这个方程是 Kepler 在 1609 年左右研究行星运动规律时得到的方程. 从天体力学的角度来分析可以肯定对每个给定的 a, 方程存在唯一解. 这个解没有可用的显式表达式, 但可以用近似方法求解. 本题就是用迭代生成数列的方法求近似解. 在 [14] 的 425 小节有解的无穷级数表达式.)

§3.5 覆盖定理

3.5.1 基本内容

1. 定义: 设有 $[a,b] \subset \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$, 其中每个 $\mathcal{O}_\alpha$ 是开区间, 则称 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖.

2. 覆盖定理 (Heine-Borel 定理) 如果 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 的一个有限子集 $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n\}$, 它是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 也就是说有 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.

3. 覆盖定理也可以简单地表述为: 一个闭区间的任何一个开覆盖中一定有这个闭区间的有限子覆盖.

4. 在覆盖定理中的条件不能随意变动. 如果将闭区间 $[a,b]$ 改为开区间或无界区间, 或者将开覆盖中的每个开区间改为闭区间, 定理的结论都不再成立.
5. 在学习了拓扑学后, 会知道在数学分析中的覆盖定理是对实数系中的有界闭区间的某种拓扑性质的一种刻画. 这种性质在拓扑学中称为**紧性**. 在实数范围内, 区间的紧性和有界闭等价. 因此也将有界闭区间称为**紧区间**.

3.5.2 例题

例题 3.5.1 举例说明: 覆盖定理在 $\mathbf{Q}$ 中不成立.

注 这里只考虑有理数, 因此在开覆盖中的开区间和所覆盖的闭区间都由有理数组成, 它们的端点当然也都是有理数. 为了简明起见, 下面只将被覆盖的闭区间与有理数集 $\mathbf{Q}$ 取交, 而对于在开覆盖中的开区间仍采用原记号.

解 我们将在有理数的范围内构造一个开覆盖, 它将区间 $[0,2]$ 中的每一个有理数都覆盖住, 但在这个开覆盖中的任何一个有限子集却做不到这点. 为清楚起见, 用 $J=[0,2]\cap\mathbf{Q}$ 表示开覆盖的覆盖对象.

任取点 $x\in J\subset\mathbf{Q}$. 由于 $x\neq\sqrt{2}$, 可以取到有理数 r_x, 使 $\sqrt{2}\notin(x-r_x,x+r_x)$ 成立. (例如取 $r_x\in(0,|x-\sqrt{2}|)\cap\mathbf{Q}$ 即可.) 这样就得到 J 的一个开覆盖

$$\{\,(x-r_x,x+r_x)\mid x\in J,r_x\in Q\,\}.$$

可以证明: 在这个开覆盖中的任何有限子集都不能覆盖 J.

任取上述开覆盖中的一个有限子集

$$(x_1-r_{x_1},x_1+r_{x_1}),\cdots,(x_n-r_{x_n},x_n+r_{x_n}),$$

先考察其中的一个开区间. 由于这个开区间不含有 $\sqrt{2}$, 同时区间的端点都是有理数, 因此它也不会包含和 $\sqrt{2}$ 充分接近的有理数. 又由于只取有限个开区间, 因此它们的并也不会含有 $\sqrt{2}$ 以及和 $\sqrt{2}$ 充分接近的有理数. 这也就是说, 在上述开覆盖中的任何有限子集都不能覆盖 $J=[0,2]\cap\mathbf{Q}$. □

以下给出覆盖定理的一个证明. 其中不仅用了确界存在定理, 而且使用了一种很有特色的 **Lebesgue 方法**. 这种方法具有明显的几何意义, 可以解决很多问题. (这种方法的缺点是: 它给出的证明一般都是非构造性的, 此外也难以推广到高维情况.)

例题 3.5.2 用 Lebesgue 方法证明覆盖定理.

证 设闭区间 $[a,b]$ 有一个开覆盖 $\{O_\alpha\}$. 定义数集

$$A=\{\,x\geqslant a\mid \text{区间 } [a,x] \text{ 在 } \{O_\alpha\} \text{ 中存在有限子覆盖}\,\}.$$

从区间的左端点 $x=a$ 开始. 由于在开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中当然有一个开区间覆盖 a, 因此 a 及其右侧充分邻近的点均在 A 中. 这保证了数集 A 是非空的. 从数集 A

的定义可见, 如果 $x \in A$, 则整个区间 $[a, x] \subset A$. 因此如果 A 无上界, 则 $b \in A$, 这就是说区间 $[a, b]$ 在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖.

如果 A 有上界, 用确界存在定理, 得到 $\xi = \sup A$. 这时可见每个满足 $x < \xi$ 的 x 都在 A 中. 事实上从 $\xi = \sup A$ 和上确界为最小上界的定义, 在 $x < \xi$ 时, 存在 $y \in A$, 使得 $x < y$. 由于 $[a, y]$ 在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖, 所以 $[a, x] \subset [a, y]$ 更没有问题, 这就是说 $x \in A$.

因此只要证明 $b < \xi$, 就知道 $b \in A$, 即 $[a, b]$ 在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖.

用反证法. 如果 $\xi \leqslant b$, 则 $\xi \in [a, b]$, 因此在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中有一个开区间 $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ 覆盖 ξ. 于是我们可以在这个开区间中找到 a_0 和 b_0, 使它满足条件: $a_0 < \xi < b_0$. 由上面的论证知道 $a_0 \in A$. 这就是说区间 $[a, a_0]$ 在开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖. 向这个有限子覆盖再加上一个开区间 $\mathcal{O}_{\alpha_0}$, 就成为区间 $[a, b_0]$ 的覆盖, 所以得到 $b_0 \in A$. 这与 $\xi = \sup A$ 矛盾. □

例题 3.5.3 (加强形式的覆盖定理) 证明: 如果 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则存在一个正数 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 中的任何两个点 x', x'', 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 x', x''. (称这个数 δ 为开覆盖的 **Lebesgue 数**.)

证 首先用覆盖定理, 得到区间 $[a, b]$ 的一个有限子覆盖, 即开覆盖 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 中的有限个开区间

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n, \tag{3.1}$$

它们的并覆盖了 $[a, b]$. 将这有限个开区间的所有端点按大小顺序排列, 去掉其中可能有重复的点, 记为

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_N.$$

并记这个端点集为 $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$. 现在令

$$\delta = \min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_N - x_{N-1}\}.$$

我们来证明这就是所求的 Lebesgue 数.

设任取两点 $x', x'' \in [a, b]$, 使 $0 < x'' - x' < \delta$. 则有两个可能 (见图 3.1):

(a) (b)

图 3.1

(a) 在点 x' 与 x'' 之间没有端点集 A 中间的点. 于是覆盖 x' 和 x'' 中的一个点的 (每个) 开区间一定同时覆盖了另一个点.

(b) 在点 x' 与 x'' 之间有 A 中的点. 由于数 δ 的取法, 这样的点只有一个. 在图 3.1(b) 中将这个点记为 x_i, 于是有 $x' \leqslant x_i \leqslant x''$. 由于点 x_i 是 (3.1) 中的开

区间的端点, 而这个开区间并不覆盖点 x_i, 因此在 (3.1) 中一定另有开区间覆盖点 x_i, 从而也就同时覆盖点 x' 和 x''. □

注 这个例题是覆盖定理的加强, 在今后会看到由于有了这种加强形式, 使覆盖定理变得更为有力 (例如例题 5.2.2, 5.4.1, 命题 10.1.6 等).

3.5.3 练习题

1. 对开区间 $(0,1)$ 构造一个开覆盖, 使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0,1)$.
2. 用闭区间套定理证明覆盖定理.
3. 用覆盖定理证明闭区间套定理.
4. 用覆盖定理证明凝聚定理.
5. 试对于例题 3.5.2 的证明举出两个具体例子, 即 (1) 数集 A 无上界; (2) A 有上界, 且有 $b<\xi=\sup A$ 和 $\xi\notin A$.

§3.6 数列的上极限和下极限

数列的上、下极限概念是第二章内容的自然延伸. 由于其中需要较多的工具, 其中的概念和方法也较为精细, 因此放在这里讨论.

3.6.1 基本定义

数列的上极限和下极限有几个等价的定义. 其中最直观的是用极限点来定义. 本书将用极限点来定义上、下极限, 其他定义则以命题的形式给出.

1. 数列的**极限点**就是数列的收敛子列的极限. 这里约定: 若存在正 (负) 无穷大量的子列, 则将 $+\infty$ $(-\infty)$ 也作为极限点. 因此一个无上界 (无下界) 数列的极限点中一定有 $+\infty$ $(-\infty)$. 为区别起见, 称收敛子列的极限为**有限极限点**, 而将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 称为**无限极限点**.
2. 在上述定义下, 数列必有极限点 (证明见命题 3.6.1).
3. 数列的上极限是数列的最大极限点, 数列的下极限是数列的最小极限点. 这里在比较大小时将 $+\infty$, $-\infty$ 都作为数来对待. 这里最大极限点和最小极限点的存在性也就是上、下极限的存在性, 将在命题 3.6.2 中证明.
4. 从以上定义可以知道, 如果存在上极限 (下极限), 则一定唯一.
5. 数列 $\{x_n\}$ 的上极限记为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 下极限记为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. (在文献中也用记号 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 来表示数列 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限.)

3.6.2 基本性质

首先列出从上、下极限定义即可得到的简单性质:

1. 从定义即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. 由于数列收敛的充分必要条件是它的每个子列收敛于同一极限, 因此即有: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的上极限和下极限均为有限且相等.
3. 类似地可以知道, 数列为正无穷大量 (负无穷大量) 的充分必要条件是它的上极限和下极限都是 $+\infty$ $(-\infty)$.
4. 以上两点可以综合为: 数列 $\{x_n\}$ 收敛或为有确定符号的无穷大量的充分必要条件是数列的上极限和下极限相等, 而且在这时成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

5. 上、下极限的其他几个简单性质 (证明从略):

   (1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (3) 若 $C>0$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (4) 若 $C<0$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

   (在这里若出现带确定符号的无穷大量, 则按 $-(+\infty)=-\infty$, $-(-\infty)=+\infty$, 等方式来理解.)

下面以命题的形式介绍上、下极限的一些重要性质, 其中包括了它们的等价定义, 这些定义实际上是从几个不同的角度刻画出上、下极限的特性.

命题 3.6.1 证明: 任何数列必有极限点.

证 这里只需要应用例题 3.3.1 的结论, 即任何数列都有单调子列. 如果这个子列有界, 就得到有限极限点; 如果它无界, 就得到无限极限点. □

在上一小节给出的上、下极限定义中并未证明最大极限点和最小极限点的存在性, 因此这样的定义是不完整的. 下一个命题给出上、下极限的第二个等价定义, 证明上、下极限的存在性, 同时还给出它们的显式表示.

命题 3.6.2 每个数列 $\{x_n\}$ 都存在上极限和下极限, 而且有公式

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\}, \tag{3.2}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\}. \tag{3.3}$$

证 在这里只证下极限的存在性和公式 (3.3) 成立. 在这以后可以利用

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = -\varliminf_{n\to\infty}(-x_n)$$

来证明上极限存在和 (3.2) 成立 (这一步请读者完成).

首先分析公式 (3.3) 的右边. 引入记号

$$b_n = \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, n \in \mathbf{N}_+, \tag{3.4}$$

就可以将 (3.3) 的右边记为 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这时要区分两种可能的情况.

(1) 如果有某个 b_n 不是有限数, 则从 (3.4) 可见这个 b_n 不可能是 $+\infty$, 而只能是 $-\infty$. 这时从 (3.4) 可见数列 $\{x_k\}$ 无下界, 从而推出每个 b_n, $n \in \mathbf{N}_+$, 都是 $-\infty$. 这时在等式 (3.3) 的右边只能约定为 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. 另一方面, 由于这时 $\{x_n\}$ 无下界, 因此它有一个无限极限点 $-\infty$. 这就证明了数列 $\{x_n\}$ 的下极限是 $-\infty$, 同时公式 (3.3) 成立.

(2) 在数列 $\{b_n\}$ 的每一项为有限数时, 从 (3.4) 可见数列 $\{b_n\}$ 一定是单调增加数列. 因此记号 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 一定有意义. 这时又要分两种情况来讨论.

(i) 当 $\{b_n\}$ 无上界时就有 $b = +\infty$. 从 (3.4) 可见 $b_n \leqslant x_n$. 由于 $\{b_n\}$ 是单调增加的正无穷大量, 因此可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 这时数列 $\{x_n\}$ 的唯一极限点是 $+\infty$. 因此数列 $\{x_n\}$ 的下极限是 $+\infty$, 同时公式 (3.3) 成立.

(ii) 最后一种情况是 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 为有限数. 这时要分两步来做. 首先, 我们要从数列 $\{x_k\}$ 中寻找一个子列, 使它以 b 为极限. 这样就可以证明 b 是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点.

对 $\varepsilon = 1$, 因 $\{b_n\}$ 单调增加收敛于 b, 就有某个 b_{k_1} 满足 $b-1 < b_{k_1} \leqslant b < b+1$. 根据 $b_{k_1} = \inf\{x_{k_1}, x_{k_1+1}, \cdots\}$, 又存在 x_{n_1} $(n_1 \geqslant k_1)$ 满足 $b_{k_1} \leqslant x_{n_1} < b+1$, 从而有

$$b - 1 < x_{n_1} < b + 1.$$

同理对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, 有 $k_2 > n_1$, 使 b_{k_2} 满足 $b - \dfrac{1}{2} < b_{k_2} \leqslant b < b + \dfrac{1}{2}$. 根据 $b_{k_2} = \inf\{x_{k_2}, x_{k_2+1}, \cdots\}$, 存在 x_{n_2} $(n_2 \geqslant k_2 > n_1)$ 满足 $b_{k_2} \leqslant x_{n_2} < b + \dfrac{1}{2}$, 从而有

$$b - \frac{1}{2} < x_{n_2} < b + \frac{1}{2}.$$

这样归纳地做下去, 就可以得到子列 $\{x_{n_k}\}$, 对于每个 $k \in \mathbf{N}_+$ 满足

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

既然这个子列以 b 为极限, 因此 b 是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点.

第二步是要证明 b 是数列 $\{x_n\}$ 的最小极限点. 假设 c 是数列 $\{x_n\}$ 的另一个极限点, 则有子列 $\{x_{n'_k}\}$ 使成立

$$\lim_{k\to\infty} x_{n'_k} = c.$$

在 (3.4) 中令 $n = n'_k$, 就有不等式

$$b_{n'_k} \leqslant x_{n'_k}.$$

令 $k\to\infty$, 就得到 $b\leqslant c$. 这样我们就证明了 b 确实是数列 $\{x_n\}$ 的最小极限点. 根据下极限的定义, 可见下极限存在, 同时成立公式 (3.3). □

下面实际上是上极限和下极限的又一个等价定义, 它和数列收敛的 ε-N 定义最为接近. 为简要起见只讨论下极限. 读者可以对上极限作相应的讨论.

命题 3.6.3 (1) 有限数 b 是数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充分必要条件是: 对每个 $\varepsilon>0$, 在邻域 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 中有数列中的无限多项, 同时存在 N, 当 $n>N$ 时, 成立不等式 $x_n > b-\varepsilon$; (2) $+\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 为正无穷大量; (3) $-\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 无下界;

证 (2) 和 (3) 已包含在下极限的定义和上一命题中, 因此只须证明 (1).

先证 (1) 的必要性. 因为 b 是数列 $\{x_n\}$ 的有限极限点, 因此 b 是某一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 的极限. 从而对每个 $\varepsilon>0$, 在邻域 $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 中含有这个子列从某项之后的所有项, 当然也就含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项. 又可断言数列 $\{x_n\}$ 中满足条件 $x_n\leqslant b-\varepsilon$ 的项至多只有有限个. 否则就可以找出一个子列, 使它的每一项都满足这个不等式. 用凝聚定理于这个子列, 就得到比 b 还要小的极限点, 这与 b 是最小极限点相矛盾. 因此对 $\varepsilon>0$, 有 N, 当 $n>N$ 时, $x_n>b-\varepsilon$.

再证 (1) 的充分性. 令 $\varepsilon=1$, 因在 $(b-1, b+1)$ 中有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 可任取其中一项为 x_{n_1}. 再令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 由于在 $(b-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2})$ 中含有数列中的无限多项, 因此能取到其中的一项作为 x_{n_2}, 满足 $n_2>n_1$. 归纳地进行下去, 就可以得到子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足要求

$$|x_{n_k}-b| < \frac{1}{k},\ k\in\mathbf{N}_+,$$

因此这个子列收敛于 b. 这就证明 b 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点.

任取一个 $b'<b$, 令

$$\varepsilon = \frac{b-b'}{2},$$

从条件知有 N, 当 $n>N$ 时, 成立不等式 $x_n>b-\varepsilon=b'+\varepsilon>b'$. 因此比 b 小的 b' 不可能是极限点. □

下一个命题是上、下极限的重要性质, 它在应用中往往起关键作用.

命题 3.6.4 以下两个不等式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n, \tag{3.5}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n, \tag{3.6}$$

在右边有意义 (即不是 $+\infty$ 与 $-\infty$ 之和) 时成立. .

证 1 这里只写出第二个不等式 (3.6) 的证明. 证明的方法是用下极限的表达式 (3.3), 先建立不等式

$$\inf_{k\geqslant n}\{x_k+y_k\}\geqslant\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}+\inf_{k\geqslant n}\{y_k\}, \tag{3.7}$$

然后取极限. 如果其中出现的下确界都是有限数, 可以记 $A=\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$, $B=\inf\limits_{k\geqslant n}\{y_k\}$. 由于对每个 $k\geqslant n$, 有 $x_k\geqslant A$ 和 $y_k\geqslant B$, 就有 $x_k+y_k\geqslant A+B$. 在这里右边是常数, 左边对 $k\geqslant n$ 取下确界, 就得到所要的不等式 (3.7). 然后在两边令 $n\to\infty$, 因为出现在两边的三个数列都是单调增加的, 因此不论是收敛还是正无穷大量都是有意义的. 这样就得到所求证的公式.

再考虑在不等式 (3.7) 中出现非有限数的情况. 根据下确界的定义, 在 (3.7) 中只可能出现 $-\infty$. 从上一个命题已经知道, 下极限为 $-\infty$ 就是数列无下界的情况. 这时在命题 3.6.2 中的公式 (3.3) 的右边只是一种约定的记号, 并非极限过程. 因此不如直接观察所求证的不等式 (3.6).

分析各种可能性. (1) 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无下界, 则不论不等式 (3.6) 的左边如何, 不等式右边的每一项都是 $-\infty$, 结论总是成立的. (2) 在两个数列中一个无下界, 另一个不是正无穷大量. 这时不等式 (3.6) 的右边为 $-\infty$ 与一个有限数之和. 只要将这样的和理解为 $-\infty$, 则不论不等式左边如何, 仍然成立. □

证 2 这个证明完全依赖于极限点概念. 为简单起见, 只对于所出现的极限点均为有限数的情况写出证明. 记 $A=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$, $B=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$, $C=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$. 由于 A 是数列 $\{x_n+y_n\}$ 的极限点, 因此有子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 收敛于 A:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=A.$$

这时可不妨假定 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 否则由于 $\{x_{n_k}\}$ 为有界数列, 由凝聚定理知它有收敛子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$, 于是可以用 $\{x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}}\}$ 代替 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 作以下讨论.

在 $\{x_{n_k}\}$ 收敛时, $\{y_{n_k}\}$ 也收敛. 又因为 B 是 $\{x_n\}$ 的最小极限点, C 是 $\{y_n\}$ 的最小极限点, 因此就得到

$$\lim_{n\to\infty}x_{n_k}\geqslant B \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}y_{n_k}\geqslant C.$$

将两式相加就有所要的不等式 $A \geqslant B + C$. □

注 由于下极限可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$, 因此 (3.6) 右边无意义的情况确实可能发生. 这就是在数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中有一个无下界, 而另一个为正无穷大量的情况. 这时 (3.6) 的左边可以出现各种可能性, 但右边无意义, 因此 (3.6) 不能成立.

下一个命题也是上、下极限的基本性质. 它的证明与上一个命题类似, 从略.

命题 3.6.5 不等式

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$$

在中间的和式有意义时成立.

注 合并以上两个命题就得到以下一组不等式:

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\\
\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n &\\
\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\\
\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n &,
\end{aligned}$$

只要假定其中的和式均有意义.

由此又可推出在上、下极限应用中很有用的下列结论.

命题 3.6.6 若在数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中已知 $\{y_n\}$ 收敛 (或广义收敛), 则成立

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

(在 $\{y_n\}$ 广义收敛时要求所出现的和式有意义).

3.6.3 例题

例题 3.6.1 用上、下极限方法证明 Cauchy 收敛准则的充分性部分.

证 1 设 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $p \in \mathbf{N}_+$, 成立

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

将这个不等式改写为 $x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon$, 然后固定某一个 $n (> N)$, 令 $p \to \infty$, 由于不论数列收敛与否, 总存在上极限和下极限, 因而就有

$$x_n - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant x_n + \varepsilon.$$

上述不等式还表明基本数列的上极限和下极限一定都是有限数 (因此基本数列必有界也已得到). 由上述不等式可推出

$$0 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可任意给定, 可见夹在 0 和 2ε 中间的两个数只能相等. 这样就推出上极限和下极限相等, 因此数列 $\{x_n\}$ 收敛. □

证 2 设 $\{x_n\}$ 是基本数列. 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时, 成立 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 将它改写为 $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$, 在后一个不等式中固定 x_n, 令 $m \to \infty$, 利用命题 3.6.6, 就得到

$$x_n \leqslant \underline{\lim_{m\to\infty}} (x_m + \varepsilon) = \underline{\lim_{m\to\infty}} x_m + \varepsilon = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon.$$

由于这对每个 $n > N$ 成立, 而右边是固定数, 在左边取上极限, 就得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon.$$

以上推导还表明 $\{x_n\}$ 的上、下极限都是有限数. 最后, 利用 ε 的任意性就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

由于相反方向的不等式总是成立的, 因此成立

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

即数列 $\{x_n\}$ 收敛. □

注 教科书 [33] 在数列极限一章中就讲授上、下极限, 并用于证明 Cauchy 收敛准则. 其中所用的就是上述第一个证明.

再给出上、下极限在迭代生成数列问题中的一个应用 (参见例题 3.4.5). 其中用到有关上、下极限的知识请读者自己证明.

例题 3.6.2 设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1 = 1$ 和 $b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$ 生成. 讨论数列 $\{b_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

解 设已证明数列 $\{b_n\}$ 从第二项起不越出区间 $[1.5, 2]$. 因此有 $1.5 \leqslant \alpha = \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant 2$. 在递推公式两边取上极限和下极限, 得到

$$\alpha = 1 + \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 + \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n} = 1 + \frac{1}{\beta}$$

和对称的

$$\beta = 1 + \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 + \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

将这两个方程联立, 相减后得到

$$(\alpha-\beta)(1-\frac{1}{\alpha\beta})=0.$$

由于 $\beta\geqslant\alpha\geqslant 1.5$, 即可得到 $\alpha=\beta$, 即数列收敛. 然后再求出极限 (从略). □

以下是用上、下极限方法于 2.7.3 小节的第二组参考题中的第 14 题.

例题 3.6.3 设 $y_n=x_n+2x_{n+1}, n\in\mathbf{N}_+$. 证明在 $\{y_n\}$ 收敛时, $\{x_n\}$ 也收敛.

证 由于 $\{y_n\}$ 收敛, 因此它有界. 取正数 $M>0$ 使同时成立 $|x_1|\leqslant M$ 和 $|y_n|\leqslant M, n\in\mathbf{N}_+$. 将递推公式改写为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}y_n-\frac{1}{2}x_n$, 则有

$$|x_{n+1}|\leqslant\frac{1}{2}|y_n|+\frac{1}{2}|x_n|.$$

因此用数学归纳法可以知道 $|x_n|\leqslant M$ 对每个 n 成立. 即数列 $\{x_n\}$ 有界.

记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=A$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=B$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=C$, 则它们都是有限数. 只要证明 $A=B$. 在 $x_n=y_n-2x_{n+1}$ 两边分别取上极限和下极限, 由于 $\{y_n\}$ 收敛, 可以利用命题 3.6.6, 得到等式: $A=C-2B$ 和 $B=C-2A$, 由此推出 $A=B$. □

注 有了上、下极限的新工具, 不必知道数列收敛就可以进行上、下极限运算. 请读者将这个方法与过去的方法对比, 并在其他问题上尝试一下. 在第二章中的不少问题都有可能用上、下极限的新工具来做. 以上的两个例题仅供参考.

下一个例题与确界和上、下极限都有关系. 它 (以及它的变形) 出现在多个领域的研究中, 可以说是上、下极限的一个重要应用.

例题 3.6.4 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m}\leqslant a_na_m\ \forall n,m\in\mathbf{N}_+$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}=\inf_{n\geqslant 1}\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}.$$

证 令 $\alpha=\inf\limits_{n\geqslant 1}\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$, 则从命题 (3.6.2) 的公式 (3.3) 可见有

$$\alpha\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln a_n}{n}. \tag{3.8}$$

又从 α 为下确界 (即最大下界) 可见, 对 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得

$$\frac{\ln a_N}{N}<\alpha+\varepsilon.$$

固定这个 N, 可以将每个自然数 n 写为 $n=mN+k$, 其中 $0\leqslant k<N$. 从题设条件有不等式

$$a_n=a_{mN+k}\leqslant a_N^m a_k,$$

取对数后可以得到

$$\frac{\ln a_n}{n} \leqslant \frac{m}{n}\ln a_N + \frac{1}{n}\ln a_k \leqslant \frac{mN}{n}(\alpha+\varepsilon) + \frac{1}{n}\ln a_k.$$

在这个不等式两边令 $n \to \infty$. 右边第一项中有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{mN}{n} = 1,$$

而 a_k 最多只取 N 个值, 因此右边的极限是 $\alpha+\varepsilon$. 左边的极限虽然不知道是否存在, 但可利用上极限的保不等式性质 (作为练习题), 在不等式两边取上极限, 从而得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 就得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha.$$

将这个不等式与 (3.8) 合并, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{n}$ 一定有意义, 且等于 α. □

注 1 上述结论的意思是: 当 α 为有限数时数列 $\left\{\dfrac{\ln a_n}{n}\right\}$ 一定收敛, 以 α 为极限, 而当 $\alpha = -\infty$ 时, 这个数列一定是负无穷大量.

注 2 又由此可见, 在正数列满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n a_m \ \forall n, m \in \mathbf{N}_+$ 时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 一定存在.

注 3 与此等价的命题是: 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m \ \forall n, m \in \mathbf{N}_+$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

3.6.4 练习题

1. 求以下数列的上极限和下极限:

(1) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}_+$;　　(2) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}, n \in \mathbf{N}_+$;

(3) $x_n = n^{(-1)^n}, n \in \mathbf{N}_+$;　　(4) $x_n = \mathrm{e}^{n(-1)^n}, n \in \mathbf{N}_+$.

2. 若 $x_n \geqslant y_n$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

3. 对 $\{x_n\}$, 记 $S_n = (\sum_{k=1}^n x_k)/n, n \in \mathbf{N}_+$, 证明:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(可以看出本题的结论蕴含了在 §2.4 节中的 Cauchy 命题.)

4. 设 $\{a_n\}$ 为正数列. 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$ 的充分必要条件是对大于 1 的每个数 l 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{l^n} = 0$.
5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列. 证明:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

6. 根据极限点的定义直接证明: 每个数列的极限点集中必有最大数和最小数 (不要利用命题 3.6.2 和 3.6.3 的现成结论).
7. 证明在例题 3.6.2 中所用到的关于上、下极限的公式.
8. 证明公式 (3.2).
9. 对上极限写出与命题 3.6.3 对应的结论, 并作出证明.
10. 证明公式 (3.5).
11. 证明命题 3.6.5.

§3.7 对于教学的建议

3.7.1 学习要点

1. 本章中相当多的内容都是为数学分析的整个理论展开做准备工作的. 对初次接触实数系基本定理的读者来说, 应当脚踏实地将每一个定理的条件、结论搞清楚, 并至少对每个定理能独立证明一个常见的命题或习题. 与其他内容的学习一样, 看别人的十个现成的题解还不如自己动手做一个题. 当然, 一开始时不看书上的题解而能将它正确地复述出来也是学习的一种方法. 但在这个基础上还是需要自己动手做题.
2. 另一种方法也可以用, 这就是先重点学会其中的一个定理. 例如闭区间套定理, 由于有 Bolzano 的二分法等方法可用, 下手比较容易. 初学者可以尝试用它去解决几个问题, 如在后面连续函数理论中的许多命题, 或用于证明其他基本定理等. 在比较熟悉之后再换一个工具. 这样分段学习往往比较切合实际, 有些教材就是如此进行安排的.
3. 本章的另一个内容是上、下极限. 由于这是数列极限理论中最为精细的部分, 又有三个等价定义从不同角度进行刻画, 因此对初学者是比较困难的. 这方面较难的题很多, 除了特别有价值的例题 3.6.4 外, 本书均未收入. 读者如在这方面有进一步的需要, 可以从 [7, 43, 55] 中找到更多的材料. 应当指出, 没有上、下极限的极限理论是不完整的. 从例题 3.6.1、3.6.2 和 3.6.3 可见, 上极限和下极限为很多问题提供了全新的方法, 很有价值.

4. **对习题课的建议** 如前所述，在整个数学分析的内容中，本章是理论性最强的一章，因此对于初学者来说会有很大的困难. 如何进行有良好效果的教学乃是教师和学生共同面临的问题. 容易理解，教学中的系统性和可接受性有时难以两全. 因此，除了少数教材外 (例如 [14, 69] 等)，在大多数教材中都采取了分散难点的安排方法. 本书将它们集中在一章里，便于参考，但应当按照初学者接受知识的规律来使用这些材料.

3.7.2 一题多解

在本节中举一个非常简单的例题，但尝试用每一个基本定理对它作出证明 (其中的方法均已出现)，供读者比较.

例题 3.7.1 如函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上处处局部有界 (它的确切含义在证 1 中写出)，则函数 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证 1 (用覆盖定理为工具) 函数 f 在 $[a,b]$ 上处处局部有界是指: 对每个 $x\in[a,b]$，存在邻域 $O(x)$ 和常数 M_x，使得

$$|f(x)|<M_x\ \forall x\in O(x)\cap[a,b].$$

对每个 $x\in[a,b]$ 取定一个 $O(x)$ 和相应的常数 M_x，就得到了闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 用覆盖定理，在上述开覆盖中存在有限子覆盖，不妨记为 $O_1,O_2,\cdots,O_n$，与它们相应的常数记为 $M_1,M_2,\cdots,M_n$. 取 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}$，由于

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_i,$$

可见对于每个 $x\in[a,b]$ 都成立 $|f(x)|<M$，即函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. □

证 2 (用闭区间套定理和 Bolzano 二分法为工具) 用反证法. 设 f 在 $[a,b]$ 上无界. 记 $a_1=a,b_1=b$. 在 $[a_1,b_1]$ 中取中点 $c_1=(a_1+b_1)/2$，得到两个子区间 $[a_1,c_1]$ 和 $[c_1,b_1]$. 函数 f 至少在这两个子区间中的某一个上无界，将它取为 $[a_2,b_2]$ (若两个子区间上 f 均无界则任取其一). 这是构造的第一步.

继续这样做下去，归纳地得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，它具有两个特性: (1) 区间长度所成的数列收敛于 0; (2) 每个区间 $[a_n,b_n]$ 上 f 都是无界的.

用闭区间套定理于上述 $\{[a_n,b_n]\}$，知道有 $\xi\in[a,b]$，使成立

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上的局部有界性，对 ξ 存在邻域 $O(\xi)$，使 f 在 $O(\xi)\cap[a,b]$ 上有界. 将这个邻域的半径记为 ε，就可以写出 $O(\xi)=(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$. 但由于 ξ 是闭区间套的端点所成数列的极限，存在 N，使得 $[a_N,b_N]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$. 由于 f 在 $[a_N,b_N]$ 上无界，引出矛盾. □

证 3 (用 Cauchy 收敛准则为工具) 这个方法的第一步与用闭区间套定理的证明相同. 用反证法, 构造 $\{[a_n,b_n]\}$, 利用 f 在每个 $[a_n,b_n]$ 上无界, 存在 $x_n\in[a_n,b_n]$, 使得 $|f(x_n)|>n$. 由于 x_n 和 x_{n+p} $(p\in\mathbf{N}_+)$ 都属于 $[a_n,b_n]$, 因此有估计

$$|x_n-x_{n+p}|<\frac{1}{2^{n-1}}(b-a).$$

这表明 $\{x_n\}$ 是基本数列. 由 Cauchy 收敛准则知道 $\{x_n\}$ 收敛. 记其极限为 ξ.

由于 f 的局部有界性, 存在 $\varepsilon>0$ 和 $M>0$, 当 $x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\cap[a,b]$ 时成立 $|f(x)|<M$. 又因 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ, 对上述 $\varepsilon>0$, 有 N, 当 $n>N$ 时, 成立 $|x_n-\xi|<\varepsilon$.

于是当 $n>N$ 时有 $|f(x_n)|<M$, 又对每个 n 有 $|f(x_n)|>n$, 引出矛盾. □

证 4 (用单调有界数列的收敛定理为工具) 用反证法. 设 f 在 $[a,b]$ 上无界, 则对每个 n, 存在 $x_n\in[a,b]$, 使 $|f(x_n)|>n$. 这样得到一个有界数列 $\{x_n\}$. 利用例题 3.3.1, 在 $\{x_n\}$ 中有单调子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 记其极限为 ξ, 即有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=\xi.$$

由于 f 的局部有界性, 存在 $\varepsilon>0$ 和 $M>0$, 当 $x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\cap[a,b]$ 时成立 $|f(x)|<M$.

由于 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ, 对上述 $\varepsilon>0$, 有 K, 当 $k>K$ 时, 成立 $|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$.

于是一方面应当对所有 $k>K$ 有 $|f(x_{n_k})|<M$, 另一方面又有 $|f(x_{n_k})|>n_k\geqslant k$, 这在取 $k=\max\{K+1,[M]+1\}$ 时就不能相容. 引出矛盾. □

证 5 (用凝聚定理为工具) 这个证明与上一个证明几乎相同, 只是在用例题 3.3.1 时改用凝聚定理而已, 细节从略. □

证 6 (用确界存在定理和 Lebesgue 方法为工具) 定义数集

$$A=\{\,x\in[a,b]\mid \text{在区间 }[a,x]\text{ 上函数 }f\text{ 有界}\,\}.$$

由于 $a\in A$, 所以 A 非空. 由于 $A\subset[a,b]$, 因此, $\xi=\sup A\leqslant b$.

从数集 A 的定义可以看出, 它有个明显的特点, 即如果有 $y>a$ 使 $y\in A$, 那么 $[a,y]\subset A$. 于是当 $a<z<\xi=\sup A$ 时, 就可以证明 $[a,z]\in A$. 实际上, 因为 $\xi=\sup A$, 而 $z<\xi$, 因此存在某个 $y\in A$, 使 $z<y<\xi$. 再结合前面所说的特点, 可知 $[a,z]\subset A$ 成立.

现在我们证明有 $\xi=b$. 反证法. 如有 $\xi<b$, 则从 f 的局部有界性知, 存在 $\varepsilon>0$, 使 f 在 $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon](\subset[a,b])$ 上有界. 可以不妨设已有 $a<\xi-\varepsilon$ 成立, 从上面的讨论知道 $[a,\xi-\varepsilon]\subset A$. 这样一来可以看出, f 在区间 $[a,\xi+\varepsilon]=[a,\xi-\varepsilon]\cup[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ 上也有界, 因此 $\xi+\varepsilon\in A$. 这与 $\xi=\sup A$ 矛盾.

由于 f 在点 b 局部有界, 有 $\varepsilon'>0$, 使 f 在 $[b-\varepsilon',b]$ 上有界. 由上又知 f 在 $[a,b-\varepsilon']$ 上有界, 因此 f 在 $[a,b]$ 上有界 (同时也证明了 $b=\sup A\in A$). □

评注 可以看出，由于几个基本定理彼此等价，因此对本题都有效. 但又由于各个基本定理的内容和角度都不一样，因此所作出的证明可以很不相同.

对比前两个证明是很有教益的. 覆盖定理在从局部性质推出整体性质时的运用非常自然. 但闭区间套定理恰恰相反，它是通过构造闭区间套的方法从某种整体性质推出在某个点附近有某种局部性质 (请参考例题 3.2.2 后的注). 这与本例题中的要求方向相反. 因此只能是用反证法.

还应看到，即使用同一个基本定理，也可能有不同的方法. 即使方法相同也还可以有不同的细节. 可以认为：数学分析与大千世界一样，在其中的发现也是无穷尽的. 有志的初学者也可能作出新的发现.

3.7.3 参考题

第一组参考题

1. 证明：数列有界的充分必要条件是它的每个子列有收敛子列.
2. 证明：数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a, 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.
3. 证明：在有界闭区间上的无界函数一定在这个区间的某一点的每一个邻域中无界. 又问：在开区间上的无界函数是否有与此类似的性质?
4. 设函数 f 在区间 (a,b) 上定义，对区间 (a,b) 的每一个点 ξ, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap(a,b)$ 时，如 $x<\xi$, 则 $f(x)<f(\xi)$, 如 $x>\xi$, 则 $f(x)>f(\xi)$. 证明：函数 f 在 (a,b) 上严格单调增加.
5. 试用上、下极限的工具证明第二章 2.4.1 中的 Stolz 定理.

   (参考 3.6.4 小节的题 3.)
6. 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是正数列. 在以下乘积均有意义时证明：$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.
7. 设 $\{x_n\}$ 为正数列. 用上、下极限证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.
8. 若对子数列 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}}{k}=a$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.
9. 设 $\{x_n\}$ 为正数列，证明：$\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1$.
10. 设 $\{x_n\}$ 为正数列，证明：$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geqslant e$.

第二组参考题

1. 证明: 对于 $\mathbf{R}$ 中的任何两个正数 a, b, 如有 $0 < a < b$, 则存在一个自然数 n, 使得 $na > b$. (这个结论称为 Archimedes 公理或原理.)
2. 设有两个非空实数集 A 和 B, 满足条件: (1) $\mathbf{R} = A \cup B$; (2) 在 A 中的每一个数都小于 B 中的每一个数, 证明: 或者 A 有最大数而 B 无最小数, 或者 B 有最小数而 A 无最大数. (这就是 Dedekind 的连续性定理或公理, 它与实数系的每一个基本定理等价.)
3. 证明: 将实数 $\mathbf{R}$ 分成两个非空集合 A 和 B, 则或者 A 中有数列收敛于 B 中的点, 或者 B 中有数列收敛于 A 中的点. (这个结论称为实数的连通性, 它与实数系的每一个基本定理等价.)
4. 试用压缩映射原理证明数列
$$\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \cdots$$
收敛, 并计算其极限.

   (即用压缩映射原理重做第二章的第二组参考题 16.)
5. 若对于每个数列 $\{y_n\}$, 成立 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.
6. (1) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证明: 存在无限多个 n, 使成立
$$x_n < x_k, \ k = 1, 2, \cdots, n-1.$$
   (2) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且有正下界. 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1$.
7. 设 $y_n = px_n + qx_{n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 其中 $|p| < |q|$. 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.
8. 设 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n} + 2x_n) = A$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.
9. 设 $x_n = \sin n, n \in \mathbf{N}_+$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限点集合为 $[-1, 1]$.
10. 设 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. 将 $\{x_n\}$ 的下极限和上极限分别记为 l 和 L. 证明: 在区间 $[l, L]$ 中的每一个点都是数列 $\{x_n\}$ 的极限点.

    (众所周知, 本题的条件与基本数列的条件差得很远, 一般来说当然不能保证数列 $\{x_n\}$ 收敛. 但是 1976 年有人发现, 如果 $\{x_n\}$ 是迭代生成数列, 则从 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 差不多就可以推出 $\{x_n\}$ 收敛, 从而 $l = L$. 确切内容请看第五章第二组参考题的题 20.)

第四章 函数极限

本章为一元函数的极限理论, 是数列极限的推广. 由于数列也可看成是以正整数集 $\mathbf{N}_+$ 为定义域的一元函数, 所以我们约定, 本章及以后凡讲到一元函数, 若不另作说明的话, 其定义域一般均为区间或区间的并. 按照流行的术语, 也就是说以下讨论的一元函数的自变量均为连续而不是离散的.

本章计算函数极限的方法只是在数列极限的基础上引申出来的一些基本方法. 计算函数极限最有力的方法, 即 L'Hospital 法则和 Taylor 公式, 均以一元微分学为基础, 将在 §8.1 和 §8.2 节中介绍.

本章的前三节依次为函数极限的定义、性质和两个重要极限. 在 §4.4 节对无穷小量、有界量和无穷大量作一个小结, 重点讨论等价量代换法, 并指出乱用这个方法会造成的错误. 最后一节为学习要点和参考题.

§4.1 函数极限的定义

4.1.1 函数极限的基本类型

函数极限有多种类型, 本书中将下面定义的函数极限称为**基本类型**.

1. 函数 f 在点 a 处有极限 (即收敛) 的定义是: 存在数 A, 使得函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时以 A 为极限 (其定义见下一项).
2. 函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时以 A 为极限 (或函数 f 在点 a 处有极限 A) 的定义是: 设 $a, A \in \mathbf{R}$, 函数 f 在点 a 的一个邻域中有定义, 若对每一个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O_\delta(a) - \{a\}$ (即 $0 < |x-a| < \delta$) 时, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
3. 上述定义用逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$ 可简写为: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
4. 若函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时存在极限 A, 则记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A\ (x \to a)$. 注意: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 可简记为 $a_n \to a$, 但在函数极限的记号 $f(x) \to A\ (x \to a)$ 中的 $(x \to a)$ 一般不能省略 (除非另有约定).
5. 函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时是否收敛, 在收敛时极限是什么, 这完全由函数在点 a 附近 (但不包括点 a) 的性质决定, 因此是函数在 a 附近的局部性质. 初学者应注意这个特点在解题中的作用, 并由此体会函数极限的意义.
6. 中学教材里的初等函数均成立 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. 实际上这是函数 $f(x)$ 在点 a 处连续的定义, 它是下一章的内容. 但对于高等数学来说, 将函数的极限和连续这两个有密切联系但又不同的概念区分开来是必要的.

7. 称 $O_\delta(a)-\{a\}$ 为点 a 的一个去心邻域 (或空心邻域). 注意 $x\in O_\delta(a)-\{a\}\iff 0<|x-a|<\delta\iff x\in(a-\delta)\cup(a+\delta)$.

4.1.2 函数极限的其他类型

首先, 恰如在数列极限的情况那样, 在记号 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to a)$ 中的 A 既可以是有限数, 又可以是 ∞, $+\infty$ 和 $-\infty$.

其次, 在记号 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 中的 a 也可以从有限数换为 ∞, $+\infty$ 和 $-\infty$ 中间的任何一种. 在今后可用记号 $f(\infty),f(+\infty),f(-\infty)$ 表示这三类极限.

还有, 在 a 为有限数时, 自变量 x 趋于 a 时又可以受到 $x<a$ 或 $x>a$ 的限制, 这样一来又产生两种单侧极限, 即左侧极限与右侧极限, 分别记为

$$\lim_{x\to a^-}f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to a^+}f(x).$$

此外, 单侧极限还有自己的特殊记号: $f(a^-)$ 与 $f(a^+)$.

因此从函数极限的基本类型

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{4.1}$$

出发, 其中 $x\to a$ 可以换成 $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a^-$ 和 $x\to a^+$, 共有 6 种. 另一方面, 在 (4.1) 中右边的 (有限数) A 可以换成 ∞, $+\infty$ 和 $-\infty$, 共有 4 种. 这样组合就可以得到 24 种不同的极限. 在 A 不是有限数时可称为广义极限 (或非正常极限). 如果再加上数列极限和无穷大数列, 就一共有 28 种.

4.1.3 思考题

1. 以下几种叙述能否作为函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的定义?

   (1) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$;

   (2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|<k\varepsilon$ (k 为常数);

   (3) $\forall n\in\mathbf{N}_+,\exists\delta>0,\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|<1/n$;

   (4) $\forall\varepsilon>0,\exists n,\forall x\in O_{\frac{1}{n}}(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 以下几种叙述能否作为函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的定义?

   (1) $\exists\delta>0,\forall\varepsilon>0,\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$;

   (2) $\forall\delta>0,\exists\varepsilon>0,\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$;

   (3) 当 x 充分靠近 a 时, $f(x)$ 越来越接近 A.

3. 用对偶法则给出: (1)"$f(x)$ 在点 a 不收敛于 A" 的正面叙述; (2) "$f(x)$ 在点 a 处没有极限" 的正面叙述.

4. 怎样用正面方式叙述以下否定性概念:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq A$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq A$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \infty$; (4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq A$;

(5) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq +\infty$.

4.1.4 例题

请初学者在以下例题中注意: 处理函数极限的方法与数列极限类似, 但还是有自己的特点. 我们从最简单的例题开始, 逐步增加复杂性.

例题 4.1.1 证明 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

证 根据极限定义, 尽管函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 没有定义, 仍可以考虑它在该点的极限. 由于在 $x\to1$ 的极限定义中 $x\neq1$, 因此在函数 f 的分子和分母中的因子 $x-1$ 可以约去. 这样就有

$$|f(x)-2| = \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1|.$$

对 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 就可以使 $0<|x-1|<\delta$ 时, 成立 $|f(x)-2|<\varepsilon$. □

例题 4.1.2 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+5)$.

解 将 x^2+5 写为 $x^2+5=(x-1)^2+2(x-1)+6$, 可见极限会是 6. 分析

$$|(x^2+5)-6| = |(x-1)^2+2(x-1)| = |x-1|\cdot|x+1|,$$

不妨一开始就限制 $\delta\leqslant1$, 也就是说将 x 的范围限制在 $|x-1|<1$ (即 $0<x<2$) 之内. 这时因子 $|x+1|<3$, 因此对于给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\min\left\{1, \dfrac{1}{3}\varepsilon\right\}$, 就可以从 $0<|x-1|<\delta$ 得到

$$|x^2+5-6| = |x+1|\cdot|x-1| \leqslant 3|x-1| < 3\delta \leqslant \varepsilon,$$

因此所求的极限确实是 6. □

注 虽然本题很简单, 但仍值得注意. 由于极限类型是 $x\to1$, 因此关键在于找出因子 $(x-1)$. 与此相反的是, 另一个因子 $|x+1|$ 是非本质的, 问题只在于如何估计. 本题的方法在函数极限问题中具有典型性. 这就是对尚未确定的 δ 事先加一个限制, 然后估计就容易了. 这完全相当于在数列极限的讨论中, 在对 $\varepsilon>0$ 取 N 时, 可以根据情况假定 N 已大于某个值, 然后再求出最后的 N. 在讨论函数极限时 (以基本类型 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 为例), 由于问题只与 f 在点 a 附近的性态有关, 因此可以根据需要取 a 的某个邻域, 将讨论限制在这个邻域中.

思考题 对多项式 $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 证明: $\lim\limits_{x\to a} p_n(x) = p_n(a)$.

例题 4.1.3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

证 1 根据定义, 对 $\varepsilon>0$, 考虑不等式 $-\varepsilon<\sin x<\varepsilon$. 不妨设已有 $\varepsilon<1$. 利用反正弦函数, 上述不等式等价于

$$-\arcsin\varepsilon<x<\arcsin\varepsilon.$$

因此只要取 $\delta=\arcsin\varepsilon$, 就保证当 $|x|<\delta$ 时成立 $|\sin x|<\varepsilon$. □

证 2 从第一章中的三角函数不等式 (即命题 1.3.6) 可以知道不等式 $|\sin x|\leqslant |x|$ 对一切 x 成立. 因此, 对给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$ 即可. □

注 这个例子似乎太简单, 但还是值得分析. 证 1 是求解不等式, 这种方法不可能解决稍为复杂一点的问题 (参见 2.1.3 小节对数列的讨论). 证 2 利用了一个基本不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$, 处理就非常方便. 这就是适当放大或者说简化方法. 例如, 用同样的方法, 几乎原封不动地就可以证明

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例题 4.1.4 证明: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{1-x}-1}\right)=0.$

证 在这里作代换

$$y=\frac{1}{1-x}$$

是很合适的. 由于 $x\to 1^-\iff y\to+\infty$, 因此只要证明

$$\lim_{y\to+\infty}(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})=0.$$

由于 $y\to+\infty$, 可以假定 $y>1$ 已成立. 这时就可以估计出

$$0<\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}=\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}<\frac{2}{\sqrt{y-1}}.$$

到这里已容易看出, 只要令 $y>M=1+4/\varepsilon^2$, 就能使得

$$0<\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}<\frac{2}{\sqrt{y-1}}<\varepsilon.\quad\square$$

例题 4.1.5 设已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[xf(x)]}{x}=a.$

证 利用关于整数部分记号 $[x]$ 的基本不等式是本题的唯一要点. 从

$$xf(x)-1<[xf(x)]\leqslant xf(x),$$

就有 (设 $x>0$)

$$\frac{xf(x)-1}{x}=f(x)-\frac{1}{x}<\frac{[xf(x)]}{x}\leqslant f(x)$$

成立. 令 $x\to+\infty$, 用夹逼定理, 可见所求证的结论成立. □

我们经常发现, 根据具体问题作适当的变量代换是非常有用的手段. 这里有一个在求极限时作变量代换的合理性问题. 具体来说, 要求极限

$$\lim_{x\to a} F(x),$$

其中 $F(x)=f(g(x))$, 又已知 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ 和 $\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$. 问: 是否成立

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a} f(g(x)) \overset{?}{=} \lim_{y\to A} f(y)=B. \tag{4.2}$$

如果这并不是无条件成立的话, 那么在什么条件下成立?

实际上, (4.2) 并不是无条件成立的. 例如, 设 $a=0, A=0$, 函数 $g(x)\equiv 0$,

$$f(y)=\begin{cases}1, & y=0,\\ 0, & y\neq 0,\end{cases}$$

则有 $f(g(x))\equiv 1$. 由于 $\lim\limits_{y\to 0} f(y)=0, \lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=1$, 因此等式 (4.2) 不成立.

在下一个命题中给出使 (4.2) 成立的三个充分条件, 但都不是必要条件.

命题 4.1.1 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$ 成立. 如果满足以下条件之一:

1. 存在点 a 的一个空心邻域 $O_{\delta_0}(a)-\{a\}$, 在其中 $g(x)\neq A$,
2. $\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)$,
3. $A=\infty$, 且 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 有意义,

则成立

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{y\to A} f(y)=B.$$

证 (1) 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $0<|y-A|<\delta_1$ 时, 成立 $|f(y)-B|<\varepsilon$. 不妨假定已有 $\delta_1\leqslant\delta_0$ 成立. 又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, 对上述 δ_1 有 $\eta>0$, 使得 $0<|x-a|<\eta$ 时, 成立 $|g(x)-A|<\delta_1$. 根据条件又有 $0<|g(x)-A|$ 成立. 因此就成立 $|f(g(x))-B|<\varepsilon$. 这就是 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=B$.

(2) 这时 $\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)=B$. 从而知道对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $|y-A|<\delta_1$ 时, 成立 $|f(y)-f(A)|<\varepsilon$. 又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, 对上述 δ_1 有 $\eta>0$, 使得 $0<|x-a|<\eta$ 时, 成立 $|g(x)-A|<\delta$, 从而就成立 $|f(g(x))-f(A)|<\varepsilon$. 这就得到 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(A)=B$.

(3) 只讨论 $\lim\limits_{y\to\infty} f(y)=B$ 为有限数的情况. 这时对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得 $|y|>M$ 时, 成立 $|f(y)-B|<\varepsilon$. 又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, 对上述 $M>0$ 有 $\eta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\eta$ 时, 成立 $|g(x)|>M$, 从而成立 $|f(g(x))-B|<\varepsilon$. 这样就得到 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=B$. □

思考题 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$, 证明 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ 只有 3 种可能性: (1) $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=B$; (2) $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(A)$; (3) 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ 不存在. (本题来自 美国数学月刊, 82 卷 (1975), 63–64 页.)

下一个例题中的内容也经常出现在极限计算中.

例题 4.1.6 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, 是否有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=A^B$ 成立?

解 设已知 $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a\ (a>0)$ 和 $\lim\limits_{x\to b} \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^b$ 成立 (留作练习题). 在这基础上, 分析以下推导 (其中将 e^u 写成 $\exp[u]$):

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\exp[g(x)\ln f(x)]=\exp[\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))]$$
$$=\exp[(\lim_{x\to a} g(x))(\lim_{x\to a}\ln f(x))]=\exp[B\ln A]=A^B.$$

可以看出其中只有

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x))(g(x))=(\lim_{x\to a}\ln f(x))(\lim_{x\to a} g(x)) \tag{4.3}$$

这一步可能出问题. 实际上, 在以下三种情况时等式 (4.3) 不一定能够成立. 这就是 (1) $A=0, B=0$; (2) $A=+\infty, B=0$; (3) $A=1, B=\infty$. 它们均使 (4.3) 的左方为 $0\cdot\infty$ 的不定式, 因此不能用普通的乘法运算法则得到等式 (4.3). 按习惯将这三种情况分别称为 $0^0, \infty^0$ 和 1^∞ 型的不定式. □

注 从数列极限开始, 除了常见的 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ 和 $\infty-\infty$ 外, 还经常遇到这三种不定式. 例如: $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是 1^∞ 型不定式, $\{\sqrt[n]{n}\}$ 是 ∞^0 型不定式. 如将后者取倒数, 就是 0^0 型不定式.

4.1.5 练习题

以下各题要求按照函数极限的定义来做.

1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$.
2. 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3$.
3. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-x}=0$.
4. 当 a 取什么数值时, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在? 此时极限为何?
5. 求 a,b, 使 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$.

6. 问: 使得 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{a+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\pm\infty$ 的参数 a 是什么?
7. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$, 其中 $a>0$.
8. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a$.
9. 证明 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$ 同时存在或不存在, 而当它们存在时必相等.
10. 问 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x^2)$ 是否一定同时存在或不存在?
11. 证明: 如下定义的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$$

在每一点都没有极限.

(试用几个不同方法证明这个结论. 例如: 从极限的定义出发, 或者用下节中的 Cauchy 收敛准则和 Heine 归结原理.)

12. 试举出一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数, 使得它在点 $x=1$ 处有极限, 但在区间的其他点都没有极限.
13. 证明: 若 f 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则 $f(x)\equiv0$.
14. 证明: 任何非常值的周期函数不可能是有理分式函数.

§4.2 函数极限的基本性质

4.2.1 基本性质

数列极限的一系列基本性质都可以移植到每一种函数极限 (或广义极限) 上去. 对于基本类型 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$, 以下几个基本性质或定理在教科书中都有证明:

1. 函数极限如果存在, 一定唯一.
2. 函数极限的局部有界性定理, 即若函数在点 a 有极限, 则函数在点 a 局部有界 (可以在点 a 无定义).
3. 函数极限的局部比较定理, 包括局部保号性定理.
4. 函数极限的四则运算.

函数极限的其他基本性质, 包括单调函数必有单侧极限 (或广义极限)、Heine 归结原理和 Cauchy 收敛准则等, 将在下面作为基本命题逐个介绍.

4.2.2 基本命题

在单侧极限与非单侧极限之间有重要的联系 (它的证明留给读者):

命题 4.2.1 设 a 为有限实数, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(a^-) = f(a^+) = A$. 其中 A 可以是有限数, 也可以是无穷大量.

与单调数列的情况相似, 有单调函数的极限存在定理 (以下只是一种情况).

命题 4.2.2 (单调函数的单侧极限存在定理) 设 f 在区间 (a,b) 上单调, 则 $f(b^-) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 一定有意义. 当 f 为单调增加时, 如 f 在 (a,b) 有上界, 则 $f(b^-)$ 为有限数, 否则 $f(b^-) = +\infty$. 对 f 为单调减少有类似的结论成立.

证 不失一般性可设 f 为单调增加. 考虑函数 f 的值域, 即数集

$$S = \{\, y \mid \text{存在 } x \in (a,b),\ \text{使 } y = f(x)\,\}.$$

分两种情况讨论.

(1) 值域 S 有上界. 由确界存在定理, 存在有限数 $\beta = \sup S$. 我们要证明

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \beta.$$

由上确界定义知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 数 $\beta - \varepsilon$ 不是数集 S 的上界, 因此存在 $x_0 \in (a,b)$, 使 $f(x_0) > \beta - \varepsilon$. 取 $\delta = b - x_0$, 则当 $0 < b - x < \delta = b - x_0$ 时, 也就是 $x_0 < x < b$ 时, 成立

$$\beta - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \beta,$$

即 $|f(x) - \beta| < \varepsilon$. 因此得到 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b^-) = \beta$.

(2) 值域 S 无上界. 这时 $\sup S = +\infty$. 对任何给定的数 $G > 0$, 都存在 $x_1 \in (a,b)$, 使 $f(x_1) > G$. 取 $\delta = b - x_1$, 则当 $0 < b - x < \delta = b - x_1$ 时, 也就是 $x_1 < x < b$ 时, 成立

$$f(x) \geqslant f(x_1) > G,$$

因此得到 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b^-) = +\infty$. □

Heine 归结原理是函数极限的又一个基本性质, 它是沟通函数极限与数列极限的桥梁. 利用这个原理, 可以将许多函数极限问题归结为数列极限问题去解决, 因此具有独特的重要性. 此外, 它的证明方法也是极限理论中的基本内容.

命题 4.2.3 (Heine 归结原理) 设 $a, A \in \mathbf{R}$. 存在极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对满足条件 $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的每个数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证 先证必要性. 既然极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 存在, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 如果数列 $\{x_n\}$ 满足定理中所说的条件, 则对上述 $\delta > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立 $0 < |x_n - a| < \delta$. 因此也就有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

这就证明了数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A.

再证充分性. 这时对每个数列 $\{x_n\}$, 只要它满足条件 $x_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 就一定收敛于 A. 用反证法. 如果结论 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 不真, 则由对偶法则 (见 §1.4 节) 知存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对于每一个 $\delta > 0$, 存在 x 同时满足条件 $0 < |x - a| < \delta$ 和 $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

取 $\delta_n = 1/n$, 将上述 x 记为 x_n, 并对于每一个 $n \in \mathbf{N}_+$ 都这样做, 就得到数列 $\{x_n\}$, 它满足条件

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \ |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

容易看出两点: (1) 这个数列 $\{x_n\}$ 满足定理中对它的全部要求; (2) 数列 $\{f(x_n)\}$ 不会收敛于 A. 因此与定理的条件相矛盾. □

注 在数列极限中有一个与 Heine 归结原理相似的命题: 数列收敛的充要条件是其每个子列收敛于相同极限. 由于数列本身也是一个子列, 因此这个命题的充分性只是空话. 但其必要性的证明与归结原理的证明确有类似之处.

Heine 归结原理还有一个变形, 有时也很有用.

命题 4.2.4 (Heine 归结原理的推论) 函数 f 在点 a 存在极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的充分必要条件是: 对满足条件 $x_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的每个数列 $\{x_n\}$, 对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 一定收敛.

证 必要性不成问题, 讨论充分性. 为此只要证明, 在命题的条件下, 所得的每个数列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛于同一极限, 然后就可用 Heine 归结原理.

用反证法. 假设存在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 分别满足条件 $x_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 和 $y_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 而且有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A_1, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = A_2, A_1 \neq A_2.,$$

这时我们可以构造一个新的数列 $\{z_n\}$, 只要令 $z_{2k-1} = x_k, z_{2k} = y_k \ (k \in \mathbf{N}_+)$ 就可以知道它满足条件 $z_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 但同时 $\{f(z_n)\}$ 发散. 因为它的奇数项子列和偶数项子列收敛于不同极限. 这与本命题条件矛盾. □

函数极限的基本性质, 从极限的唯一性定理到四则运算法则, 一般地说至少可以用两个方法来证明. 第一个方法就是仿照数列极限理论中采用的方法, 第二个方法就是用 Heine 归结原理将问题转化为数列的相应问题去解决. 以下举一个例子来说明后一个方法.

例题 4.2.1 (函数极限的除法运算法则) 如果有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则成立

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{A}{B}.$$

证　根据 Heine 原理的必要性, 对任意数列 $\{a_n\}$, 只要满足条件 $a_n\neq a\ \forall n\in\mathbf{N}_+$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}g(a_n)=B.$$

应用关于收敛数列的除法运算法则, 知道有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)}=\frac{A}{B}.$$

再根据 Heine 原理的充分性, 既然对满足上述条件的任意数列 $\{a_n\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{A}{B},$$

那就得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\left(=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\right).\quad\square$$

与数列的情况类似, 可以从函数 f 在点 a 附近的性态本身判定它在点 a 是否收敛. 这就是函数极限的 Cauchy 收敛准则. 在以下证明中我们可以看到 Heine 归结原理是如何起作用的.

命题 4.2.5 (函数极限的 Cauchy 收敛准则)　函数 f 在点 a 有极限的充分必要条件是: 对每一个给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于在 $O_\delta(a)-\{a\}$ 中的每一对点 x',x'', 满足不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证　先证必要性. 由函数 f 在点 a 有极限知, 存在 A, 使 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. 因此对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 成立 $|f(x)-A|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 于是当 $x_1,x_2\in O_\delta(a)-\{a\}$ 时, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

再证充分性. 按照 Heine 归结原理的上述推论, 只要证明, 凡满足要求 $x_n\neq a\ \forall n\in\mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的数列 $\{x_n\}$, 它对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 必定收敛.

对给定的 $\varepsilon>0$, 根据命题的条件, 有 $\delta>0$, 当 $x',x''\in O_\delta(a)-\{a\}$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

由于 $x_n\neq a\ \forall n\in\mathbf{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 所以对上述 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 成立 $0<|x_n-a|<\delta$. 因此当 $n,m>N$ 时就有 $x_n,x_m\in O_\delta(a)-\{a\}$, 并成立 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

这就是说数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列. 从关于收敛数列的 Cauchy 收敛准则知, $\{f(x_n)\}$ 收敛. □

注 可以看出, 必要性部分的证明与数列情况的证明完全一样 (参见命题 3.4.1). 但是充分性部分的证明则是利用 Heine 归结原理转化为数列问题, 然后利用收敛数列的 Cauchy 收敛准则, 因而比数列情况的证明容易得多.

4.2.3 思考题

1. 试就 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 两类极限叙述极限的唯一性定理、局部有界性定理、局部保号性定理、比较定理、夹逼定理、Heine 归结原理和 Cauchy 收敛准则.
2. 回答下述有关极限的四则运算法则方面的问题:

   (1) 若 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在, 则当 x 趋于 a 时在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的敛散性之间有何联系?

   (2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 是否存在?
3. 找出以下运算中的错误:

   (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sin\dfrac{1}{x-2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{x-2}}=\dfrac{0}{\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{x-2}}=0.$

   (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0.$
4. 对于极限的加法运算法则作出两个证明: (1) 用函数极限定义; (2) 用 Heine 归结原理.
5. 对于各种类型的函数极限中 $A=\infty$ 但不带有确定符号的无穷大量的情况, 夹逼定理不成立. 为什么? 举出反例.

4.2.4 例题

例题 4.2.2 证明: 如果存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sin x+b\cos x)$, 则只能是 $a=b=0$.

证 1 记 $f(x)=a\sin x+b\cos x$. 令 $x_n=n\pi, n\in\mathbf{N}_+$, 有 $f(x_n)=b(-1)^n$. 由归结原理, $\{f(x_n)\}$ 收敛, 因此 $b=0$. 再令 $x_n'=(n+\dfrac{1}{2})\pi, n\in\mathbf{N}_+$, 就类似地可得到 $a=0$. □

证 2 用反证法. 若 a 和 b 不全为 0, 则可以将函数改写为

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中 φ 为某常数. 取 $x_n = 2n\pi + \frac{1}{2}\pi - \varphi$ 和 $x'_n = 2n\pi - \varphi$ 分别代入, 并令 $n \to \infty$, 由 Heine 归结原理知两个极限存在且相等, 这导致 $\sqrt{a^2+b^2} = 0$, 引出矛盾. □

例题 4.2.3 证明函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处不收敛.

证 1 (用 Heine 归结原理) 考虑两个均为无穷小量的数列:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\ y_n = \frac{1}{2n\pi},\ n \in \mathbf{N}_+.$$

则有

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin\frac{1}{y_n} = \sin 2n\pi = 0,\ n \in \mathbf{N}_+.$$

因此数列 $\{\sin\frac{1}{x_n}\}$ 和 $\{\sin\frac{1}{y_n}\}$ 分别收敛于 1 和 0. 根据 Heine 归结原理, 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 不可能有极限. □

证 2 (用 Cauchy 收敛准则) 用反证法. 若函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处收敛, 则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x'|, |x''| < \delta$ 时, 成立

$$|\sin x' - \sin x''| < \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

现在令

$$x' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\ x'' = \frac{1}{2n\pi},$$

其中取自然数 n 充分大, 必可使条件 $0 < |x'|, |x''| < \delta$ 成立. 这时总有 $\sin x' = 1, \sin x'' = 0$ 成立. 因此 (4.4) 不能成立, 引出矛盾. □

下一个例题是 Heine 归结原理在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 上的推广, 并具有一些新的特点. 它在今后学习级数与积分时有一定的用处.

例题 4.2.4 设 A 为有限数. 存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对每个严格单调增加的正无穷大数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证 先证必要性. 既然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在, 因此对 $\varepsilon > 0$, 有 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 若 $\{x_n\}$ 满足题设条件, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则对于上述 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立 $x_n > M$. 因此就有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. 这就证明了数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 A (这时 $\{x_n\}$ 的严格单调增加不起作用).

再证充分性. 这时对每个满足题中所说条件的数列 $\{x_n\}$ (即 $\{x_n\}$ 为严格单调增加的正无穷大量), 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$. 用反证法. 如果结论 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 不真, 则由对偶法则 (见 §1.4 节) 知存在一个 $\varepsilon_0>0$, 对于每一个 $M>0$, 存在 x, 同时满足条件 $x>M$ 和 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

任取 $M_1\geqslant 1$, 得到 $x_1>M_1$, 满足 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 然后取 $M_2=\max\{2,x_1\}$, 得到 $x_2>M_2$, 满足 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 归纳地进行下去, 在有了 x_n 后取 $M_{n+1}=\max\{n+1,x_n\}$, 得到 $x_{n+1}>M_{n+1}$, 满足 $|f(x_{n+1})-A|\geqslant\varepsilon_0$. 可以看出, 这样取出的数列 $\{x_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量. 但对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 不会收敛于 A. 因此与定理的条件相矛盾. □

思考题 Heine 归结原理的推论在这里也成立. 试证之.

4.2.5 练习题

1. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0\ (a>1,k>0)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0\ (k>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}=1\ (a>0)$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$.

2. 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+y^3}}{\sqrt{y^2+y^3}+y}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, 其中 n 为自然数.

5. 设已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=l$, $b\neq0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(bx)}{x}$.

6. 证明: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}=1$.

7. 证明: 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调有界函数 f 一定存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

8. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上为单调增加函数, 且存在一个数列 $\{x_n\}\subset(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 证明: (1) f 在区间 (a,b) 上以 A 为上界; (2) $\lim\limits_{x\to b}f(x)=A$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$. 证明: 对每个 $c\in(0,A)$, 存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时, 成立 $f(x)>c$.

(这是对于极限类型为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的保号性定理.)

10. 设 $f(a^-) < f(a^+)$. 证明: 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (a-\delta, a)$ 和 $y \in (a, a+\delta)$ 时, 成立 $f(x) < f(y)$.
11. 试用 Heine 归结原理证明单调函数的单侧极限存在定理.

    (这里先要将 Heine 归结原理 (命题 4.2.3) 推广到单侧极限. 注意这时在条件中的数列可限于单调数列.)

§4.3 两个重要极限

本节将以命题的形式证明两个重要极限. 在它们的基础上可以解决许多极限的计算问题, 特别是从这两个极限出发可以导出微分学中基本初等函数的所有求导法则 (见 [48]), 因此是进入微分学之前的必要准备.

4.3.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

在所见的多数教科书 (例如 [14]) 中均利用三角形和扇形之间的面积关系得到初等不等式

$$\sin x < x < \tan x \ \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

然后用于证明这里的第一个重要极限. 在教材 [41, 42] 中对这个问题采取了不同的处理方法. 下面的证法见*数学的实践与认识*, 4 (1987), 79–81 页. 其中不需要命题 1.3.6, 但需要例题 4.1.3 的结论 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. (那里的证 1 不需要用命题 1.3.6.)

命题 4.3.1 (第一个重要极限) $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

证 在单位圆内用圆心角 $2x$ $(0 < x \leqslant \frac{\pi}{2})$ 分圆, 作出圆的一个内接多边形. 如果 $\pi/x = n$ 为正整数, 就得到内接正 n 边形. 否则记

$$n = \left[\frac{\pi}{x}\right],$$

就可以得到圆的一个内接 $n+1$ 边形, 其中的 n 条边所对应的圆心角都是 $2x$. 将余下的一条边所对应的圆心角记为 θ_x, 可以计算出有

$$0 < \theta_x = 2\pi - 2nx = 2\pi - 2x\left[\frac{\pi}{x}\right] = 2x\left(\frac{\pi}{x} - \left[\frac{\pi}{x}\right]\right) < 2x.$$

又令 $\theta_x = 0$ 对应于 π/x 为正整数的情况. 将上述内接 n 或 $n+1$ 边形的周长记为 S_x, 就可得到

$$\begin{aligned} S_x &= 2n\sin x + 2\sin\frac{\theta_x}{2} = 2\left[\frac{\pi}{x}\right]\sin x + 2\sin\frac{\theta_x}{2} \\ &= 2\pi\cdot\frac{\sin x}{x} + 2\left(\left[\frac{\pi}{x}\right] - \frac{\pi}{x}\right)\sin x + 2\sin\frac{\theta_x}{2}. \end{aligned}$$

利用 $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ (见例题 4.1.3), 可见有

$$S_x=2\pi\cdot\frac{\sin x}{x}+o(1)\ (x\to0^+).$$

当 $x\to0^+$ 时, 上述圆内接多边形的每条边长都趋于 0, 因此就有 $\lim\limits_{x\to0^+}S_x=2\pi$. 这样就得到

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{S_x}{2\pi}+o(1)\right)=1.$$

由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 因此就得到所要求证的结果. □

注 函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在理论和应用 (例如信号处理) 方面都很重要, 也是数学分析中的重要例子. 它在 $x>0$ 的图像见图 4.2 (a) (又见图 8.7 (b)). 在例题 8.5.2 中研究了它的单调性. 在 $x=0$ 处补充定义函数值为 1 后, 可以证明函数在该点无限次可微, 它的 MacLaurin 公式见例题 7.2.3 (参见例题 8.1.9 的注解 3). 它在积分学中还会一再出现 (如例题 11.3.1, 11.3.2, 12.3.6 等).

4.3.2 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

这是 §2.5 节中极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 的重要推广.

命题 4.3.2 (第二个重要极限) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

证 先考虑 $x\to0^+$ 时的单侧极限 (如图 4.1).

对 $x\in(0,1)$, 可有 $n\in\mathbf{N}_+$, 使得 $1/(n+1)<x\leqslant1/n$ 成立. 实际上将这个不等式改写一下, 即是

$$n\leqslant\frac{1}{x}<n+1,$$

可见 n 是由以下公式确定的:

$$n=\left[\frac{1}{x}\right].\tag{4.5}$$

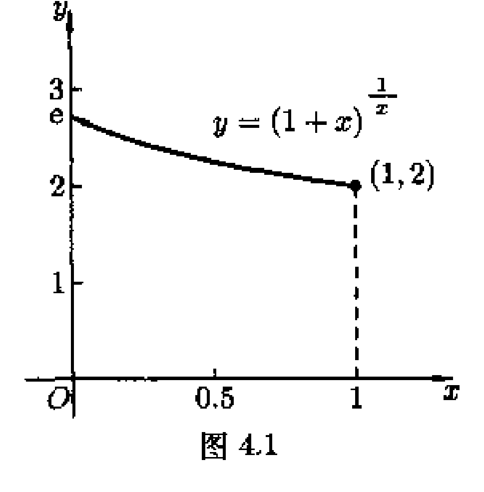


图 4.1

这时就可以得到估计

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\tag{4.6}$$

其中的 n 由公式 (4.5) 与 x 相联系. 若将 n 看成独立的自变量, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}\quad 和\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$$

成立. 因此对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 N, 当 $n>N$ 时, 同时成立

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-\mathrm{e}\right|<\varepsilon \quad 和 \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\mathrm{e}\right|<\varepsilon. \tag{4.7}$$

利用 (4.5), 可见只要有 $0<x<\delta=\dfrac{1}{N+1}$, 即 $\dfrac{1}{x}>N+1$, 就可以使

$$n=\left[\frac{1}{x}\right]>\frac{1}{x}-1>N$$

成立, 从而由 (4.6) 和 (4.7) 得到 $|(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}|<\varepsilon$. 这样就证明了

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

为了讨论 $x\to0^-$, 可以取 $z=-x$, 则当 $x\to0^-$ 时 $z\to0^+$, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{z\to0^+}(1-z)^{-\frac{1}{z}}=\lim_{z\to0^+}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{z}}\\&=\lim_{z\to0^+}\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{z}}=\lim_{z\to0^+}\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1-z}{z}}=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

合并两个单侧极限就得到所求证的结果. □

注 1 对 (4.6) 不加分析就直接用夹逼定理是不妥当的. 由于该式中间是函数, 当然不可能用数列极限的夹逼定理. 如果用函数极限的夹逼定理, 则 (4.6) 的两侧又是什么样的函数? 为什么它们的极限都等于 e?

实际上该式两侧并非是数列 (的通项), 而是 x 的函数. 它们在每个区间 $[k,k+1)$ $(k\in\mathbf{N}_+)$ 上取常值. 若将它们分别记为 f 和 g, 则先要证明当 $x\to0^+$ 时它们的极限均为 e, 在这以后才可以用函数极限的夹逼定理. 读者可以将这个做法与上面从单侧极限的 ε-δ 定义出发的证明作比较.

注 2 将函数 $(1+x)^{1/x}$ 在 $x=0$ 处补充定义使它连续后, 就可以证明延拓后的函数在原点无限次可微. 它的 MacLaurin 公式见例题 7.2.4.

由以上两个重要极限可以导出以下几个基本结果. 由于一般教科书中都有它们的证明, 这里不再重复. 要求读者能记得, 会证明.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$; (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; (4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0)$.

4.3.3 例题

下面的 3 个例题表明, 利用复合函数的极限方法, 即变量代换法 (参见命题 4.1.1), 可以扩大以上两个重要极限的适用范围 (证明从略).

例题 4.3.1 若 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=0$, 且当 $t\neq t_0$ 时 $g(t)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\sin g(t)}{g(t)}=1$.

例题 4.3.2 若 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=+\infty\ (-\infty)$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0}\left(1+\dfrac{1}{g(t)}\right)^{g(t)}=\mathrm{e}$.

例题 4.3.3 设 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=0$, 且 $t\neq t_0$ 时 $g(t)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\ln(1+g(t))}{g(t)}=1$.

例题 4.3.4 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 首先看出这个问题是 1^∞ 型的不定式, 因此可以试用上述第二个重要极限. 改写原问题如下:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, 因此答案是 $\mathrm{e}^{-1/2}$. □

例题 4.3.5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

解 与上一题类似地可将原式改写如下:

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{x}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

可见只要计算出

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}\cdot 2}\right)=1,$$

即知原问题的答案为 e. □

注 以上两个例题的求解在写法上可以利用 $u^v=\mathrm{e}^{v\ln u}$ 和例题 4.3.3 改写如下 (只写出后一例题):

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right),$$

以下同上. 又如果一开始作代换 $y=1/x$, 则在书写上更方便一些.

4.3.4 练习题

1. 计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\tan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$;

(6) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

2. 注意以下两个 "不等式" 并求出正确值:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\neq 1$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\neq \mathrm{e}$.

3. 设 $a>0,b>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$.

(本题是数列极限问题, 但现在可以用函数极限知识来解决.)

4. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正数, $n\geqslant 2$, $f(x)=\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$, 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}$, 并证明 Viète 公式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

(这是数学家 Viète 在 1593 年发表的. 它是数学史上第一次用无穷乘积来表示一个数, 同时也是对于圆周率 π 的认识上的重大突破.)

§4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较

从数列开始, 就已接触到无穷小量、有界量和无穷大量的概念. 在本节将介绍如何将它们用于函数极限计算, 其中特别是等价量代换法将成为计算函数极限的基本方法.

4.4.1 记号 o, O 与 $\sim$

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某个去心邻域 $O(a)-\{a\}$ 上定义, 并且 $g(x)\neq 0$. (对于 a 为无穷大量的情况和单侧极限等情况可类推.)

1. $f(x)=o(g(x))\ (x\to a)$ 的定义是: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$. 如果当 $x\to a$ 时 f 和 g 都是无穷小量, 则称 f 是比 g 更高阶的无穷小量.

2. $f(x)=o(1)\ (x\to a)$ 的定义是: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. 因此与数列情况一样, 记号 $o(1)$ 用于表示关于某个极限过程的无穷小量.

3. $f(x)=O(g(x))\ (x\to a)$ 的定义是: 存在常数 $M>0$, 使得 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant M$ 在 a 的某个去心邻域上成立, 因此成立不等式 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$.

4. $f(x)=O(1)\ (x\to a)$ 定义是: 存在 a 的某个去心邻域, 使 f 在其上有界. 这与数列情况不太一样, 在那里 $O(1)$ 就是有界量, 而在这里记号 $O(1)\ (x\to a)$ 用于表示在点 a 的某个去心邻域上的一个有界量, 因此也称为局部有界量.

5. 如果有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, 而且当 $x\to a$ 时 f 和 g 都是无穷小量 (无穷大量), 则称 f 和 g 是同阶无穷小量 (无穷大量).

6. $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$ 的定义是: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. 如果当 $x\to a$ 时 f 和 g 是无穷小量 (无穷大量), 则称 f 和 g 是等价无穷小量 (无穷大量).

   今后我们还将含有 o, O 和 $\sim$ 的等式称为**渐近等式**, 并将 $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$ 说成是函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时具有相同的**渐近性态**. 特别是当 $x\to\infty$ (包括数列极限中的 $n\to\infty$) 时这种表述在数学中用得很广泛.

7. 以上所说有关阶的概念还可以量化, 其方法是对有关的极限过程取一类简单的无穷小量 (或无穷大量) 作为标准. 下面只举出常用的情况. 设已知 $f(x)=o(1)\ (x\to a)$. 若有常数 $\alpha>0$, 使得 $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}\right|=l>0$, 则称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时是 α 阶的无穷小量.

8. 在使用这些记号时, 必需写出有关的极限过程. 除了对数列可以不写出 $(n\to\infty)$ 外, 其他极限过程均不可省略 (除非另加说明). 例如以下关于对数函数的三个性质当然是与相应的极限过程不可分开的:

$$\ln x=o(1)\ (x\to 1),\quad \ln x=o(x)\ (x\to+\infty),\quad \ln x=o\left(\frac{1}{x}\right)\ (x\to 0^{+}).$$

9. 下面是几个重要的极限关系 (其中第 (7) 题见下面的例题 4.4.4):

(1) $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$;　　(2) $\sin x\sim x\ (x\to 0)$;

(3) $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$;　　(4) $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$;

(5) $\ln x=o(x^{-\alpha})\ (x\to 0^+)\ (\alpha>0)$;　　(6) $x^k=o(a^x)\ (x\to+\infty)\ (a>1)$;

(7) $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x\ (x\to 0)$;　　(8) $\arctan x\sim x\ (x\to 0)$.

上面引进的一些记号, 即 $o,O,\sim$ 和关于阶和等价的概念在处理函数极限时是很有用的工具, 但这里对初学者来说同时也有许多陷阱, 很容易出错.

在使用 $o,O,\sim$ 时, 除了必须写明极限过程之外, 还要知道以下两点.

首先, 含有 o,O 的等式, 即渐近等式, 与普通的等式大不一样. 它们并不是量的相等, 而是代表在极限过程中的关系. 其次, 它们一般只能从左往右读, 而不能从右往左读. 例如

$$o(1)=O(1)\ (x\to a),$$

它的含义是: 若 $f(x)$ 具有性质 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, 则 $f(x)$ 在点 a 的某个去心邻域上有界. 可见这样简短的一个等式若用文字表达, 就是: 无穷小量必是局部有界量. 理解了这一点后, 不难看出

$$O(1)=o(1)\ (x\to a)$$

是错的, 因为在点 a 附近有界的函数在点 a 处当然不一定收敛于 0, 或者说, 局部有界量当然未必是无穷小量.

例题 4.4.1 证明 $O(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$.

证 根据题意, 设 $\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在某个 $O(0)-\{0\}$ 上有界, 即存在 $M>0$ 和 $\delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, 成立 $|f(x)|\leqslant Mx^2$. 于是当 $0<|x|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{Mx^2}{x}\right|\leqslant|Mx|,$$

因此令 $x\to 0$ 时上式的极限为 0. 这就是 $f(x)=o(x)\ (x\to 0)$. 这样我们就证明了当 $f(x)=O(x^2)\ (x\to 0)$ 时, 一定就有 $f(x)=o(x)\ (x\to 0)$. □

例题 4.4.2 证明 $\cos x=1+O(x^2)\ (x\to 0)$ 成立.

证 已知有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 因此存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时, $\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ 有界. 这就是说 $\cos x-1=O(x^2)\ (x\to 0)$. 再移项即得. □

关于无穷小量的阶可以从前面的许多例子得到理解. 例如, 当 $x \to 0$ 时, $\sin x$ 是一阶无穷小量, $1-\cos x$ 是二阶无穷小量, $\sin x - \tan x$ 是三阶无穷小量等等 (后者见例题 4.4.5). 又由此可见 $\sin x = O(x)$, $1-\cos x = O(x^2)$, $\sin x - \tan x = O(x^3)$ $(x \to 0)$. 但并不能从这三个公式推出关于阶的结论.

应当指出, 无穷小量 (以及无穷大量) 不一定有阶.

例题 4.4.3 证明: 当 $x \to 0$ 时无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

证 这只要观察

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x^{\alpha}}$$

即可. 如取 $\alpha \geqslant 1$, 则上述极限不存在. 但若取 $\alpha < 1$, 则上述极限为 0, 因此没有阶. 但是也可以说它的阶比任何 $\alpha < 1$ 高. □

当然有 $x\sin\dfrac{1}{x} = O(x)$, $x\sin\dfrac{1}{x} = o(x^{\alpha})\quad \forall \alpha < 1\ (x \to 0)$.

最后再举出两个用等价记号 $\sim$ 刻画的重要渐近公式.

1. 关于阶乘的 **Stirling 公式**:

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

   它的证明将在积分学中给出 (命题 11.4.2).

2. 如果将不超过 x 的素数个数记为 $\pi(x)$, 则有**素数定理**:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}\quad (x \to +\infty).$$

   素数定理是数论中的重要定理. Legendre 和 Gauss 通过实验提出了猜测. Hadamard 和 de la Vallée 于 1896 年分别独立地给出了素数定理的第一个证明. 1949 年, Selberg 和 Erdös 又给出了它的初等证明. (例如可参考华罗庚的《数论导引》.)

4.4.2 思考题

1. $10^{-10\,000}, \mathrm{e}^{-10^{10}}, x, \sin x$ 是否是无穷小量? $10^{10\,000}, \mathrm{e}^{10^{10}}, x^n, a^x (a > 1)$ 是否是无穷大量?

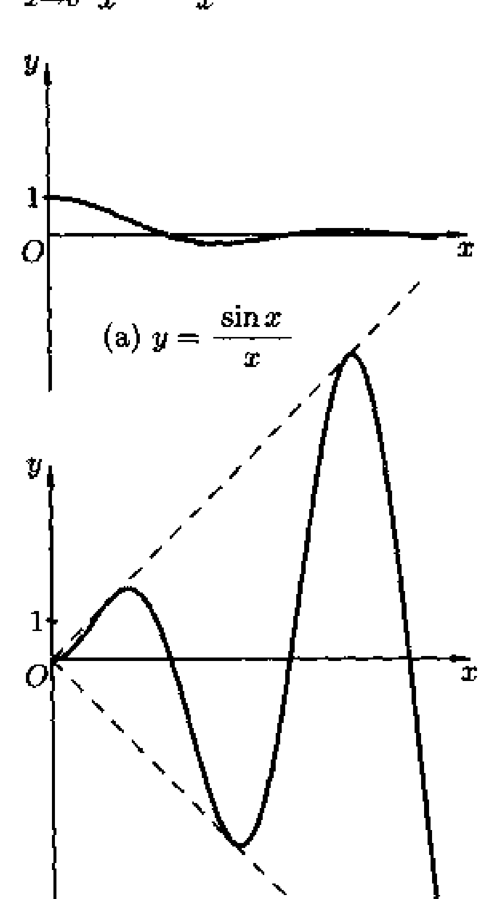
2. 确定以下极限是否存在, 若存在则等于什么? (观察图 4.2 中的图像.)

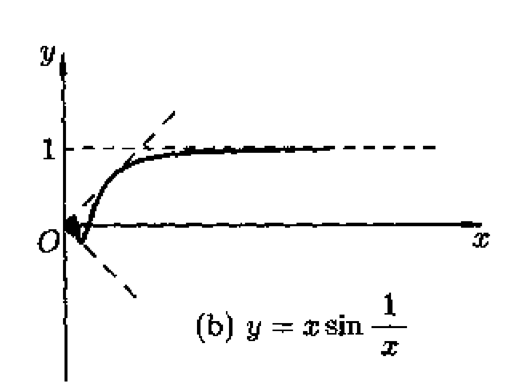
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$;　　(6) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin x$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.





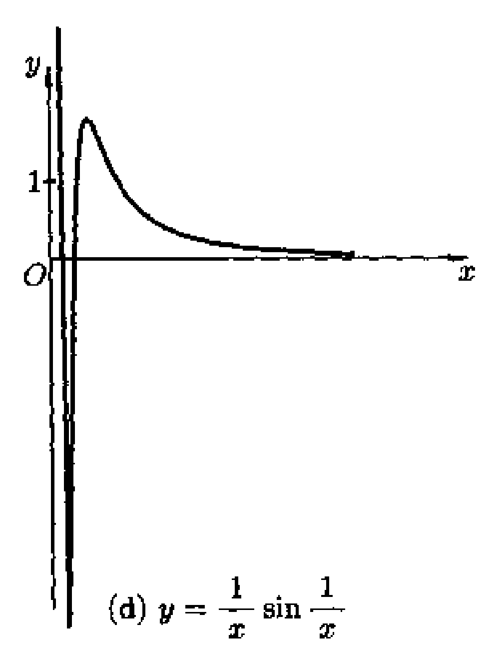


图 4.2

3. 当 $x\to 0$ 时, 下述等式中哪些可以成立?

(1) $o(1)=O(1)$;　　(2) $O(1)=o(1)$;

(3) $o(x^2)=o(x)$;　　(4) $O(x^2)=o(x)$;

(5) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$;　　(6) $\dfrac{O(x^2)}{x}=o(x)$.

4. 作出 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的图形, 观察: $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ $(x \to 0^+)$ 和 $e^{\frac{1}{x}} = o(1)$ $(x \to 0^-)$.

4.4.3 等价量代换法

在求极限的计算中等价量代换法是基本方法.

例题 4.4.4 设 $\alpha \neq 0$. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

解 令 $y = (1+x)^\alpha - 1$, 则当 $x \to 0$ 时 $y \to 0$. 利用 $1 + y = (1+x)^\alpha$, 有 $\ln(1+y) = \alpha \ln(1+x)$. 计算如下:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y}{y} = \alpha. \quad \square$$

注 1 本例是变量代换和等价量代换两个方法结合的典型例子. 在以上计算中先利用 $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$, 将分母的 x 换为 $\ln(1+x)$ (将简单换成复杂), 后来又利用 $\ln(1+y) \sim y$ $(y \to 0)$, 将 $\ln(1+y)$ 换为 y.

注 2 在本例中的指数 α 可以是不为 0 的任何实数. 而在过去我们只能用二项式展开的方法处理 α 为有理数的情况. 今后可以直接应用本题的一般结论.

例题 4.4.5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

解 1 将表达式进行分解, 利用已知极限即可如下计算:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

解 2 若用等价量代换法, 则可写出 $\dfrac{\sin x - \tan x}{x^3} = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$, 然后利用 $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $(x \to 0)$, $\cos x \sim 1$, 将上面的表达式中的 $\sin x$ 换为 x, $\cos x$ 换为 1, $\cos x - 1$ 换为 $-\frac{1}{2}x^2$, 就有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

小结 一般的等价量代换法可以叙述如下.

设要求极限 $\lim\limits_{x\to a} uv$, 其中 u, v 是 x 的函数. 如已知 $u \sim u_1$ $(x \to a)$, 则可以将上式中的因子 u 用 u_1 代替. 写成公式就是

$$\lim_{x\to a} uv = \lim_{x\to a} \left(\frac{u}{u_1}\right) u_1 v = \lim_{x\to a} u_1 v, \tag{4.8}$$

这就是说可以将 u 换成 u_1 (其中假定在 a 邻近 $u_1 \neq 0$). 当然这个做法可以反复使用, 例如在例题 4.4.5 中就代换了三个因子, 使函数的表达式大大简化.

在这里要强调指出: 在对于形式为 $u+v$ 或 $(u+v)w$ 的函数求极限时, 即使有 $u \sim u_1$ 也不能将 u 随便换成 u_1. 例如在例题 4.4.5 中, 以下做法都是错误的.

1. 利用 $\sin x \sim \tan x\ (x \to 0)$ 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x}{x^3}=0$.

2. 利用 $\sin x \sim x\ (x \to 0)$ 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$.

3. 利用 $\tan x \sim x\ (x \to 0)$ 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$.

这三个例子中的最后一步都没有错 (其中后两个数值 $-\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{6}$ 的计算在学了微分学后就可以得到), 但答案都是错的. 其原因是第一步的代换没有根据.

什么条件下才可以在和式中用等价量代换?

假定考虑的极限过程为 $x \to a$, 则一个容易证明的充分条件就是:

$$u \sim u_1,\ v \sim v_1,\ \lim_{x\to a} u+v \neq 0 \implies u+v \sim u_1+v_1. \tag{4.9}$$

它清楚地表明, 在和式中用等价量代换出问题的根源就在于当时起作用的是更高阶的无穷小量. 关于 (4.9) 的证明从略. 这方面有许多研究, 感兴趣的读者可以参考 [56] 以及其中所引的文献.

实际上等价量代换 (在无穷小量的清况) 的本质就是用较为简单的无穷小量代替比较复杂的无穷小量, 而将两个无穷小量之间的差略去不计. 当然, 这时它们的差必须是更高阶的无穷小量. 一种安全的做法就是保留高阶无穷小量, 而不是简单的代换. 从下一个例题中可以看到这是如何进行的.

例题 4.4.6 设 $f(x)=\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}$, $m,n\in\mathbf{N}_+$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 令 $y=x-1$, 则 $x\to 1 \iff y\to 0$. 计算如下:

$$\begin{aligned}
f(x)=f(1+y)&=\frac{m}{1-(1+y)^m}-\frac{n}{1-(1+y)^n}\\
&=\frac{m[1-(1+y)^n]-n[1-(1+y)^m]}{[(1+y)^m-1]\cdot[(1+y)^n-1]}\\
&=\frac{n\left[my+\dfrac{m(m-1)}{2}y^2+o(y^2)\right]-m\left[ny+\dfrac{n(n-1)}{2}y^2+o(y^2)\right]}{nm(y+o(y))\cdot(y+o(y))}\\
&=\frac{\dfrac{mn}{2}(m-n)y^2+o(y^2)}{mn(y^2+o(y^2))}=\frac{1}{2}(m-n)+o(1),
\end{aligned}$$

其中的 $o(y^2), o(y), o(1)$ 均是对 $y \to 0$ 而言的, 可见极限为 $\frac{1}{2}(m-n)$. □

注 以上所用的方法已经超出了等价量代换法的思想. 一般称

$$(1+y)^n = 1 + ny + o(y) \ (y \to 0)$$

或

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2} + o(y^2) \ (y \to 0)$$

中的 $o(y)$ 或 $o(y^2)$ 为余项. 在上一个例题中出现的各个余项是根据需要而分别选取的. 在今后学了微分学中带 Peano 余项的 Taylor 公式后 (见命题 7.2.2), 可以将这个例题中的方法发展成更一般的方法 (见 §8.1 节 "函数极限的计算").

4.4.4 练习题

1. 确定以下无穷小量的阶:

(1) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} \ (x \to 0)$;　(2) $\ln x - \ln a \ (x \to a), a > 0$;

(3) $a^x - 1 \ (x \to 0)$, 其中 $a > 0$;　(4) $a^{x^2} - b^{x^2} \ (x \to 0)$, 其中 $a, b > 0$;

(5) $\ln(x + \cos\frac{\pi}{2}x) \ (x \to 1)$;　(6) $\ln x \ln(x-1) \ (x \to 1^+)$.

2. 设存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$, 又有 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x) \ (x \to 0)$, 证明 $f(x) = o(x) \ (x \to 0)$.

3. 与数列中的几个常见的无穷大量之间的关系 $\ln n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n! \ll n^n \ (a > 1, \varepsilon > 0)$ 相类似, 证明当 $x \to +\infty$ 时有

$$\ln x \ll x^\varepsilon \ll a^x \ll x^x \ (a > 1, \varepsilon > 0),$$

其中 $u \ll v$ 的定义是 $\lim \frac{u}{v} = 0$.

4. 用等价量代换方法计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - x}{\ln(x^2 + \mathrm{e}^{2x}) - 2x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(x+1)]$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$;　(6) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\arcsin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$.

§4.5 对于教学的建议

4.5.1 学习要点

1. 学习函数极限的基本概念和计算极限的方法是这一章中的主要内容. 它们为下面学习微分学中的导数计算做好了准备. 这里含有许多重要的基本计算技巧. 其中除了与过去相似的适当放大法、夹逼方法、单调函数的单侧极限存在定理和 Cauchy 收敛准则外，还有许多新的工具. 今后虽然会学到以微分学为基础的许多更有力的方法, 但是本章有许多基本技巧并不能为将来的工具所覆盖或代替. 在下面的参考题中有许多就是如此.

2. **对习题课的建议** 对于学过此章的人来说, 本章一开始举出的多种不同类型的极限 (或广义极限) 似乎很平常, 但对于多数初学者来说仍然会有很大的困难. 举一反三已是不易, 更何况这里有二十几种极限. 细心观察一些优秀教材, 可以看到在安排上有很好的考虑. 例如, 一开始应当集中力量学习基本类型的函数极限 (即本章第一小节), 在有了基础后再涉及其余, 加以推广. 又往往将广义极限另列一节单独处理. 这样比较符合人的认识规律.

   本章习题课重点为: 函数极限的定义; Heine 归结原理; 无穷大(小)量的比较. 估计需安排二次. 可在第一次围绕概念, 第二次围绕 Heine 归结原理和求极限技巧 (如等价量的替换, 两个重要极限等) 来讲解.

4.5.2 参考题

1. 若函数 f 在区间 (a,b) 上单调, 且有一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to a^+$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. 请按照单侧极限的定义直接证明: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$.
2. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调增加, 且有一个在区间 $[a,b]$ 内的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \to f(a)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
3. 在 Heine 归结原理 (命题 4.2.3) 的条件中,
   (1) 若将 "每个数列 $\{x_n\}$" 改为 "每个单调数列 $\{x_n\}$", 其他要求不变, 则结论是否仍然成立?
   (2) 若对 "每个数列 $\{x_n\}$" 增加要求 $|x_{n+1}-a| < |x_n - a|, n \in \mathbf{N}_+$, 其他不变, 则又如何?

   又若在它的推论 (命题 4.2.4) 中作这些改动, 结论是否仍然成立?
4. 证明 $\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$ 当 $x \to +\infty$ 时极限为 0, 并分析其阶数.
5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a>0, a\neq 1$.

6. (1) 设函数 $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$, 且对所有 x 成立 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$. 证明: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

   (2) 设函数 $f(x) = a_1\ln(1+x) + a_2\ln(1+2x) + \cdots + a_n\ln(1+nx)$, 且对于所有 $x > 0$ 成立 $|f(x)| \leqslant |x|$. 试陈述与 (1) 相应的不等式并加以证明.

7. 对一般的自然数 n 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx - n\sin x}{x^3}$.

8. 证明 Dirichlet 函数 (4.1.5 小节第 4 题) 有以下解析表达式:

$$D(x) = \lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi m!\, x)]^{2n}\right\}.$$

9. (1) 设函数 f 在区间 $(0,+\infty)$ 上满足要求 $f(2x) = f(x)$, 且存在有限极限 $f(+\infty)$. 证明: f 是常值函数.

   (2) 设存在 $a > 0$, $a \neq 1$, 使得函数 f 在区间 $(0,+\infty)$ 上满足要求 $f(ax) = f(x)$. 证明: 若存在有限极限 $f(+\infty)$ 或 $f(0^+)$, 则 f 为常值函数.

10. 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 在 $x = 0$ 邻近有界, 又有 $a > 1, b > 1$, 使得对每个 $x \in \mathbf{R}$ 成立 $f(ax) = bf(x)$. 证明: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

11. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$. 证明: 对每个 $a > 0$, 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

12. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上定义, 且在其中的每个有界子区间上有界. 证明等式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)]$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立.

13. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上定义, 且在其中的每个有界子区间上有界. 证明: 等式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1) - f(x)}{x^n}$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立.

14. 设 T 为正常数, 若函数 f, g 在 $[a,+\infty)$ 上满足条件:

    (1) $g(x+T) > g(x), x \in [a,+\infty)$;

    (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的每个有界子区间上有界;

    (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$,

    则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

15. 设成立 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = o(x)\ (x \to 0)$. 证明: $f(x) = o(x)\ (x \to 0)$. (本题比 4.4.4 小节的练习题 2 要难一点.)

第五章 连续函数

连续函数类是数学分析中的主要函数类之一. 有关连续函数的一系列重要结论是支持数学分析整个体系的支柱. 本章的主要内容是介绍连续函数的基本定理. 由于这些性质都和连续函数的整个定义域密切联系, 与局部有界性、局部保号性等局部性质有根本的不同, 因此称为连续函数的**整体性质**, 或**非局部性质**.

在 §5.1 节的基本概念之后, 将基本定理分成三组, 逐节介绍它们的方法和应用. §5.5 节为单调函数. 在 §5.6 节中介绍连续函数在混沌中的应用, 这是 §2.6 节 (迭代生成数列) 的现代发展. 最后一节为学习要点和两组参考题.

§5.1 连续性概念

5.1.1 内容提要

1. 函数 f 在点 a 连续有两个定义: (1) 第一定义是: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$; (2) 第二定义是: 对于收敛于 a 的每个数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. 两个定义的等价性可用函数极限的 Heine 归结原理得到.
2. 函数 f 在点 a 左连续 (右连续) 的定义是: $f(a^-) = f(a)$ $(f(a^+) = f(a))$. 函数 f 在点 a 连续的充分必要条件是 $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$.
3. 设点 a 属于函数 f 的定义域, 若 f 在 a 连续, 则称 a 为 f 的连续点, 否则称点 a 为函数 f 的不连续点, 即间断点. 间断点的分类: 若存在两个单侧极限, 则为第一类, 否则为第二类. (请注意: 各种教材对于间断点的定义不完全相同.)
4. 区间上连续函数的定义: 函数 f 在区间 I 上的每一点都连续 (即处处连续), 则称函数 f 在区间 I 上连续. 若区间包含端点, 则在端点处的连续性是按左连续或右连续来定义的. 本书经常采用记号 $f \in C(I)$ 表示函数 f 为区间 I 上的连续函数.
5. 用**函数在一个点的振幅**来刻画连续性有时是很方便的. 其定义如下. 对于点 a 的邻域 $O_\delta(a)$ 定义 f 在这个邻域上的振幅为

   $$\omega_f(a,\delta) = \sup_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\} - \inf_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\},$$

   然后令

   $$\omega_f(a) = \lim_{a\to 0^+} \omega_f(a,\delta),$$

   称为函数 f 在点 a 的振幅. 容易证明, 函数 f 在点 a 连续的充分必要条件是 $\omega_f(a) = 0$ (留作练习).

5.1.2 思考题

1. 当 f 于点 a 连续时, 函数 f^2 和 $|f|$ 在点 a 是否连续? 反之如何?
2. 设函数 f, g 在点 a 都不连续, 问 $f+g$ 和 $f\cdot g$ 在点 a 是否连续?
3. 设函数 f 在区间 (a,b) 上定义, 若对于每个闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$, 函数 f 在 $[c,d]$ 上连续, 证明 f 在 (a,b) 上连续.
4. 讨论下列函数的连续性, 若有间断点则确定它的类型:

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x\in(-\infty,0),\\ x^2, & x\in[0,+\infty);\end{cases}\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x\in\mathbf{R}-\{0\},\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

5. 找出下列函数的间断点, 并确定类型:

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$; (2) $g(x)=x-[x]$;

(3) $f(g(x))$ (f 和 g 由 (1) (2) 给定); (4) $g(f(x))$ (f 和 g 同 (3));

(5) $h(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$; (6) $y(x)=\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$.

5.1.3 例题

例题 5.1.1 设函数 f 在 $x=0$ 处连续, 对每一个 $x\in\mathbf{R}$ 成立 $f(x)=f(2x)$. 证明: f 是常值函数.

证 任取一个 $x\in\mathbf{R}$, 则

$$f(x)=f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 因此 (根据连续性的第二定义)

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0).$$

这样就知道对每一个 $x\in\mathbf{R}$ 成立 $f(x)=f(0)$. □

例题 5.1.2 设函数 f, g 是 $-\infty,+\infty$ 上的连续函数, 又在所有有理点上 $f(x)=g(x)$, 证明: $f\equiv g$.

证 只要对 $\mathbf{R}$ 中的每个无理数 x 证明 $f(x)=g(x)$ 成立即可. 取有理数列 $\{r_n\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. 例如, 取无理数 x 的不足近似值 $r_n=[10^n x]/10^n$, 则有

$$r_n = \frac{[10^n x]}{10^n} = \frac{10^n x - \theta_{x,n}}{10^n},$$

其中 $0 \leqslant \theta_{x,n} < 1$. 因此就有 $r_n \to x\,(n\to\infty)$.

由于 $f(r_n)=g(r_n), n\in\mathbf{N}_+$, f,g 在点 x 连续, 利用连续性的第二定义, 就有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} g(r_n) = g(x). \quad \square$$

例题 5.1.3 (一个函数方程的连续解) 设函数 f 在 $x=0$ 连续, 且对一切 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 且 $f(x)=f(1)x$.

证 在方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中令 $y=0$ 代入, 可知 $f(0)=0$. 因此有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

任取点 $x_0\in\mathbf{R}$, 将 x 写成 $x=x_0+\Delta x$, 计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+f(\Delta x)]\\ &= f(x_0) + \lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(x_0),\end{aligned}$$

可见 f 处处连续.

由于 $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$, 可见有 $f(-x)=-f(x)$. 因此只需讨论 x 为正数的情况. 对正有理数 $x=m/n$, 其中 $m,n\in\mathbf{N}_+$, 用数学归纳法可以知道对自然数 $m\in\mathbf{N}_+$ 成立

$$f(mx)=mf(x).$$

再从

$$f(x) = f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$$

得到 $f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$. 因此就有

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

令 $x=1$ 代入, 得到

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

因此等式 $f(x)=f(1)x$ 对一切有理数 $x\in\mathbf{Q}$ 已成立. 最后, 利用例题 5.1.2 的结论, 就知道 $f(x)=f(1)x$ 对一切实数成立. $\square$

注 本例与例题 5.1.1 都是函数方程问题 (参见 [14, 43]). 但本例的结论和证明的方法具有较大的典型意义. 对于函数方程方面的研究很多, 本书不拟对此作很多介绍. 在 [63] 的第 48–50 页有这方面的较新材料. 此外, 本题所求出的是该函数方程的连续解. 实际上, 这个函数方程还有不连续解. 由以上证明可见, 这个方程的解只要在一个点上连续, 就处处连续. 因此所说的不连续解一定是处处不连续的函数. 有兴趣的读者可以参考 [57] 的第 68–70 页.

例题 5.1.4 (Riemann 函数的连续性) Riemann 函数的定义为

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \text{ 其中 } p,q \text{ 为互素整数}, q > 0, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

确定 R 的间断点及其类型. (对于 $x=0$, 可写出 $0 = \dfrac{0}{1}$, 因此 $R(0) = 1$.)

解 以下主要是证明对每个 $x_0 \in \mathbf{R}$ 成立

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0. \tag{5.1}$$

如果这一点已得到证明, 则从函数 $R(x)$ 的定义即可以知道, 在所有无理点处 $R(x)$ 连续, 而在所有有理点处 $R(x)$ 不连续, 且为可去间断点.

取定 x_0. 由于 (5.1) 与 $R(x_0)$ 无关, 因此无需区分 x_0 是有理点或无理点.

对给定的 $\varepsilon > 0$, 我们只需要证明有 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $(0 \leqslant) R(x) < \varepsilon$. 考虑其反面, 使这个不等式不成立 (即 $R(x) \geqslant \varepsilon$) 的 x 是什么? 当然 x 只能是有理数. 将它写成 $x = p/q$, 其中 p, q 互素, $q > 0$, 则有

$$R\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon.$$

这等价于

$$q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \text{ 即 } q \in \left\{1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

由以上分析可见, 可以先取 $\delta_1 = 1$, 然后将去心邻域

$$(x_0 - 1) \cup (x_0 + 1)$$

中分母为 $q \in \{1, 2, \cdots, [1/\varepsilon]\}$ 的所有有理数 p/q 都挑出来. 由于这样的有理数至多只有有限个, 可以将它们记为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 然后取

$$\delta = \min\{1, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_k - x_0|\},$$

则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时就成立 $0 \leqslant R(x) < \varepsilon$. 因此 (5.1) 成立. □

注 如果用 $\delta_1 = \varepsilon^2/2$ 代替 $\delta_1 = 1$, 则可以证明在 $(x_0 - \delta_1) \cup (x_0 + \delta_1)$ 中分母 $q \leqslant 1/\varepsilon$ 的有理数 p/q 至多只有一个 (见 [42]).

5.1.4 练习题

1. (1) 将对偶法则用于连续性的第一定义和第二定义, 写出函数 f 在点 a 处不连续的两个正面叙述. (2) 证明连续性的两个定义的等价性.

2. 讨论下述函数的间断点及其类型:

(1) $f(x)=[x]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=[x]+[-x]$; (4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq 0,\pm1,\\ 1, & x=0,\pm1.\end{cases}$

3. 设函数 $f\in C[a,b]$. 若有数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

4. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义, 在 $x=0,1$ 两点连续, 且满足 $f(x)=f(x^2), x\in\mathbf{R}$. 证明: f 是常值函数.

5. 设 $f,g\in C(I)$, 证明: $\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in C(I)$.

(可以从连续定义证, 也可用公式 $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$ 等.)

6. 设有三个函数 $f_1,f_2,f_3\in C[a,b]$, 对每个 $x\in[a,b]$, 定义 $f(x)$ 是三个函数值 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 中处于中间的一个值, 证明: $f\in C[a,b]$.

7. 证明: f 为连续函数的充分必要条件是: 对每个自然数 n, 函数

$$f_n(x)=\begin{cases}-n, & f(x)\leqslant -n,\\ f(x), & -n<f(x)\leqslant n,\\ n, & f(x)>n\end{cases}$$

连续.

(可用 $f_n(x)=\max\{-n,\min\{f(x),n\}\}$ 归结为上一题, 也可直接用定义做.)

8. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)$ (其定义见第四章 4.1.5 小节第 11 题) 处处不连续, 并确定其类型.

9. 构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数, 使得它在某个指定点处连续, 但在所有其他点处都不连续.

10. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 证明: 这个函数方程的解除了 $f\equiv 0$ 之外, 就是 $f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)>0$.

11. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 且对任意 $x,y \in \mathbf{R}$ 有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$. 证明: $f(x) = [f(1)-f(0)]x + f(0)$.
12. 根据 5.1.1 小节中第 5 点给出的定义, 证明: 函数 f 在点 a 连续的充分必要条件是 f 在该点的振幅为 0, 即 $\omega_f(a) = 0$.

§5.2 零点存在定理与介值定理

这两个定理有密切的关系. 从内容上看, 后者包含了前者. 但实际上前一个定理是核心, 由它出发用一个辅助函数就可以推出后一个定理. 由于 f 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的根, 因此也经常将零点存在定理称为根的存在定理:

命题 5.2.1 (零点存在定理) 设 $f \in C[a,b]$, 并满足条件 $f(a)f(b)<0$, 则存在点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

注 由于定理的内容有明显的几何意义 (参见图 5.1), 非常直观, 因此很早就被我国古代数学家用来求方程的近似根 (见 [35]). 但实际上它和实数理论密切相关. 例如, 在有理数范围内函数 $f(x)=x^2-2$ 在区间 $[0,2]$ 上满足定理的条件, 但是没有零点. 由此可见, 下面的证明必然要利用实数系的这个或那个基本定理.

5.2.1 定理的证明

关于零点存在定理的证明在数学分析的教科书中都有, 原则上从实数系的每一个基本定理 (包括与它们等价的每一个命题) 出发都可以证明它. 以下用例题的形式举出几个证明. 它们是学习实数系基本定理的好材料.

例题 5.2.1 用闭区间套定理和 Bolzano 二分法证明零点存在定理.

证 记 $a=a_1, b=b_1$. 用区间的中点 $c_1=(a_1+b_1)/2$ 从 $[a_1,b_1]$ 得到两个闭子区间 $[a_1,c_1]$ 和 $[c_1,b_1]$. 考虑 $f(c_1)$ 的符号. 如果恰好有 $f(c_1)=0$, 则 c_1 就是 f 的零点, 讨论结束. 否则, 由于 $f(a_1)$ 和 $f(b_1)$ 异号, 其中一定有一个值的符号和 $f(c_1)$ 的符号相反. 因此在两个闭子区间中必有一个闭子区间, 在它的两端 f 的值异号. 将这个闭子区间记为 $[a_2,b_2]$, 这时满足条件 $f(a_2)f(b_2)<0$.

用数学归纳法可以证明, 或者在有限次运用二分法后已经找到了 f 的一个零点, 或者以上过程可以无限地做下去, 得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$. 由于这个闭区间套是根据以上过程归纳地构造出来的, 因此它具有以下特点: (1) $b_{n+1}-a_{n+1}=(b_n-a_n)/2$; (2) $f(a_n)f(b_n)<0\ \forall n \in \mathbf{N}_+$.

对这个 $\{[a_n,b_n]\}$ 应用闭区间套定理, 就知道存在一个点 ξ, 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

考虑 $f(\xi)$ 的符号. 如果 $f(\xi)\neq 0$, 则从连续函数的局部保号性定理, 就有 ξ 的一个邻域 $O(\xi)$, 使得 f 在邻域 $O(\xi)$ 上同号. 但当 n 充分大时, a_n 和 b_n 将同时进入这个邻域, 从而保号性与 $f(a_n)f(b_n)<0$ 矛盾. 因此只能有 $f(\xi)=0$. □

注 1　这个证明是闭区间套定理的典型应用. 如在第三章中所说, 闭区间套定理可以将原来的闭区间的某种性质 "浓缩" 到某一个点的附近. 在上面正是这样做的. 通过 Bolzano 二分法, 函数 f 在区间 $[a,b]$ 两端异号这个性质导致函数 f 在每个区间 $[a_n,b_n]$ 的两端异号, 而且将这个性质"浓缩"到一个点 ξ 的任意邻近. 从而如 $f(\xi)\neq 0$ 的话, 就与连续函数的局部保号性矛盾.

注 2　这个证明方法有一个优点, 即可以用于求近似解. (我们将这类证明方法称为构造性的证明.) 例如, 设 f 在区间 $[0,1]$ 上连续, $f(0)f(1)<0$, 且只有一个根 ξ. 用以上二分法做 9 次, 得到 $[a_{10},b_{10}]$. 取这个区间的中点 c 为近似值, 则误差可估计为

$$|c-\xi|<2^{-10}\approx 0.001.$$

当然, 这个方法相当原始, 计算效率也低. 较好的求根方法见 §8.7 节.

在第三章中曾指出, 在上述注解 1 的意义上, 覆盖定理具有与闭区间套定理相反的特点, 即可以从局部性质推出整体性质. 根据具体问题的特点, 可以事先看出应当采取什么思路. 由于条件是非局部的, 而所要证明的结论, 即在一个点上函数值为 0, 是局部的, 这与覆盖定理的方向相反. 由此可见, 若用覆盖定理证明零点存在定理的话, 就应当用反证法.

例题 5.2.2 用覆盖定理证明零点存在定理.

证　用反证法. 设连续函数 f 在区间 $[a,b]$ 两端有 $f(a)f(b)<0$, 但在区间中无零点. 任取一点 $x_0\in[a,b]$, 因为 $f(x_0)\neq 0$, 从连续函数的局部保号性定理, 存在 $\delta>0$, 使得函数 f 在邻域 $O_\delta(x_0)\cap[a,b]$ 上保号. 对区间 $[a,b]$ 中的每一个点都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 在这个开覆盖中的每一个开区间 (和区间 $[a,b]$ 的交集) 内, 函数 f 保号.

若现在直接用开覆盖定理, 则不容易说清楚如何引出与条件 $f(a)f(b)<0$ 的矛盾 (请读者试试看). 改用加强形式的覆盖定理 (即第三章例题 3.5.3), 存在 Lebesgue 数 $\delta>0$, 使得对 $[a,b]$ 中的任何两点 x',x'', 只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有开覆盖中的某一个开区间将这两个点 x',x'' 覆盖住. 对本题的开覆盖来说, 即保证了当 $|x'-x''|<\delta$ 时, $f(x')$ 和 $f(x'')$ 同号, 即 $f(x')f(x'')>0$.

用这个 Lebesgue 数 δ 在区间 $[a,b]$ 中插入一系列点, 连同端点一起, 记为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $|x_i - x_{i-1}| < \delta, i \in \{1,2,\cdots,n\}$. 由于 $f(x_{i-1})f(x_i) > 0, i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 可见 $f(a)f(b) > 0$. 引出矛盾. □

注 与用闭区间套定理的证明比较, 可见这个证明不是构造性的. 它断定了根的存在, 但并未提供方法去求这个根. 这种证明称为非构造性证明, 或纯粹存在性证明. 在过去已遇到过很多这类证明. 例如用反证法的证明都是如此.

例题 5.2.3 用确界存在定理和 Lebesgue 方法证明零点存在定理.

证 (请参考关于 Lebesgue 方法的例题 3.5.2 和 3.7.1 的第六个证明.) 为确定起见, 设 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. 定义数集

$$S = \{\, x \in [a,b] \mid f(x) \geqslant 0 \,\}. \tag{5.2}$$

从 $f(a) > 0$ 知 $a \in S$, 所以 S 为非空有界数集. 用确界存在定理, 记 ξ 为 S 的上确界. 由于 $f(b) < 0$, 我们知道 f 在 b 附近也取负值 (局部保号性), 因此成立

$$\xi = \sup S < b.$$

我们断言: $f(\xi) = 0$.

由于实数只有三种可能, 即大于 0, 等于 0 和小于 0 (即实数的三歧性), 因此只要证明 $f(\xi) > 0$ 和 $f(\xi) < 0$ 都不可能.

如 $f(\xi) > 0$, 则 $\xi \in S$. 由于 $\xi < b$ 和连续函数的局部保号性, f 在点 ξ 的右侧邻近也取正值. 这与 ξ 是数集 S 的上界相矛盾.

如 $f(\xi) < 0$, 则由同理知道 f 在点 ξ 左侧邻近也取负值. 这与 ξ 是数集 S 的最小上界矛盾. □

注 这个证明也没有能够提供具体的求根方法, 但从方法上看并不抽象, 倒是有很直观的几何意义. 如图 5.1 所示, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有三个零点. 由公式 (5.2) 定义的数集 S 在图上由两个粗黑线段表示. S 的上确界 ξ 是 $f(x)$ 的最大的零点.

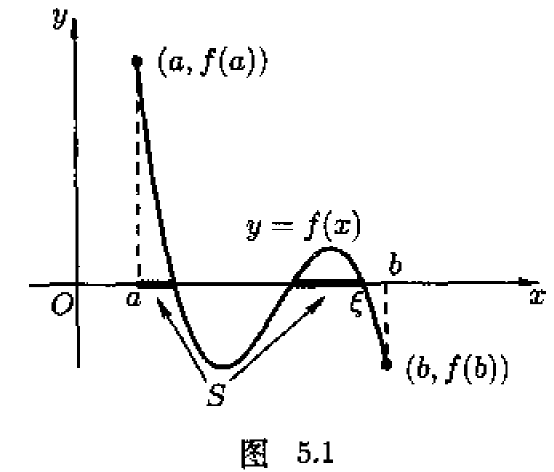


图 5.1

现在给出介值定理和它的证明. 这个定理的表达方式可有多种. 如果将各种区间 (包括有限区间、无限区间、开区间、闭区间以及半开半闭区间等) 的共同点抽出来, 则可以将介值定理表达如下:

命题 5.2.2 (介值定理) 区间上的连续函数的值域必是区间 (可缩为一点).

证 设 $f \in C(I)$, 其中 I 为区间. 为了证明 $f(I)$ 是区间, 只要证明: 若有 $x', x'' \in I$, 且 $f(x') \neq f(x'')$, 则函数 f 能取到在 $f(x')$ 和 $f(x'')$ 之间的每一个值.

为确定起见, 只写出 $x' < x'', f(x') < c < f(x'')$ 时的证明. 我们要证明, 存在点 $\eta \in (x', x'') \subset I$, 使得 $f(\eta) = c$.

为此作辅助函数

$$F(x) = f(x) - c.$$

这时有

$$F(x')F(x'') = (f(x') - c)(f(x'') - c) < 0.$$

在闭区间 $[x', x'']$ 上对函数 $F(x)$ 应用连续函数的零点存在定理, 就知道存在点 $\eta \in (x', x'')$, 使得 $F(\eta) = 0$. 这就是 $f(\eta) = c$. □

注 1 介值定理的常见形式为: 若 $f \in C[a, b]$, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, 且 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则 f 可取到在 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的每个值. 我们将此称为**介值性质**.

思考题 举例说明: 区间上的函数即使处处不连续, 也可以具有介值性质.

注 2 介值定理只肯定在所说的条件下值域是区间, 未说是什么区间. 在下一节会知道在闭区间上的连续函数的值域一定是闭区间. 但若定义域是其他类型的区间, 包括无限区间, 则连续函数的值域可以是所有可能的各种区间.

5.2.2 例题

例题 5.2.4 设 $f \in C[a, b]$, 且有 $f([a, b]) \subset [a, b]$. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ (即 f 在区间 $[a, b]$ 中有不动点).

证 引入辅助函数 $F(x) = f(x) - x$. 从条件 $f([a, b]) \subset [a, b]$ 可以得到

$$F(a) = f(a) - a \geqslant 0, \quad F(b) = f(b) - b \leqslant 0,$$

因此 $F(a)F(b) \leqslant 0$. 如果此式等于零, 则 f 以 a 或 b 为不动点. 否则, 应用连续函数的零点存在定理, 知道 f 在 (a, b) 中有不动点. □

注 这个例题是著名的 Brouwer 不动点定理的特例. Brouwer 不动点定理是说, 从 n 维空间的球

$$D^n = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1 \,\}$$

到自身的连续映射必有不动点. 在数轴上的闭区间就是一维的球. 关于 Brouwer 不动点定理的一个简洁而漂亮的证明见 [40].

例题 5.2.5 若 $f \in C[a, b]$, 且对每一个 $x \in [a, b]$ 存在 $y \in [a, b]$, 使得 $|f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明: f 在 $[a, b]$ 中有零点.

证 任取一点 $x_0 \in [a,b]$, 则存在 $x_1 \in [a,b]$, 使 $|f(x_1)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$. 这样继续下去, 就可以归纳地得到一个数列 $\{x_n\}$, 使得成立

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_{n-1})| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|f(x_0)|.$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, 即数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷小量.

对数列 $\{x_n\}$ 用凝聚定理, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设极限为

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \eta,$$

则有 $\eta \in [a,b]$. 由于 f 在 η 连续, 就有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\eta).$$

由于 $\{f(x_{n_k})\}$ 是 $\{f(x_n)\}$ 的子列, 因此 $f(\eta) = 0$. □

注 在构造数列 $\{x_n\}$ 时, 有可能某个 x_n 恰好是 f 的零点. 这时当然可以不必做下去. 但上面写出的证明即使对这种特殊情况仍然是正确的.

5.2.3 练习题

1. 设 $f \in C[a,b]$, $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$, 证明: 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使成立

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

2. 设 f 是定义在一个圆周上的连续函数. 证明: 存在一条直径, 使得 f 在其两端取相同的值.

3. 若余弦多项式 $C_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ 的系数满足条件 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k| < a_n$, 证明: $C_n(x)$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 中至少有 $2n$ 个零点.

4. 设 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 且 $b_1 < b_2 < b_3$. 证明: 方程

$$\frac{a_1}{x - b_1} + \frac{a_2}{x - b_2} + \frac{a_3}{x - b_3} = 0$$

在区间 (b_1, b_2) 和 (b_2, b_3) 内恰好各有一个根.

5. 证明: (1) 奇数次多项式方程 $f(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$ 至少有一个实根;

   (2) 偶数次多项式方程 $f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$ 可以没有实根, 但当 $a_{2n} < 0$ 时则至少有两个实根.

6. 证明: $x^{17} + 215/(1 + \cos^2 3x) = 18$ 必有实根.

7. 若 $f \in C[a,b]$, 且 $f(x)$ 只取有理数. 问: f 有何特点?

8. 设 $f \in C[a,b]$, 且为一对一映射. 证明:

(1) 若 $f(a) < f(b)$, 则 f 严格单调增加;

(2) 若 $f(a) > f(b)$, 则 f 严格单调减少.

9. 设 $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且有 $f(-\infty) = A < B = f(+\infty)$, 证明: 对每个 $c \in (A, B)$, 存在 ξ, 使得 $f(\xi) = c$.

10. 设 $f \in C[a, b)$, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset [a, b)$, 已知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B,$$

但 $A \neq B$. 证明: 对每一个 $\eta \in (A, B)$, 存在数列 $\{z_n\} \subset [a, b)$, 满足要求

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta.$$

§5.3 有界性定理和最值定理

命题 5.3.1 (有界性定理) 有限闭区间上的连续函数一定有界.

命题 5.3.2 (最值定理) 有限闭区间上的连续函数一定取到最大值和最小值.

注 1 容易看出最值定理蕴涵有界性定理. 因此如果能直接证明最值定理的话, 则同时也就证明了有界性定理.

注 2 容易举出例子说明, 如果将有限闭区间换成其他区间, 则这两个定理都不再成立. 因此这两个定理是有限闭区间上连续函数才具有的性质. 由于有限闭区间与覆盖定理的紧密联系 (参见在第三章有关覆盖定理后的讨论), 因此可以看出, 要证明这两个定理也需要实数系的基本定理.

注 3 由连续函数的局部有界性定理知, 当 $f \in C[a, b]$ 时, f 在区间 $[a, b]$ 上的每一点的一个邻域上有界. 联系到 3.7.2 小节中的内容, 可见我们已经对有界性定理作出了六个不同的证明. 但是本节还将举出对这个定理的新证明.

注 4 由最值定理再加上介值定理就得到有限闭区间上的连续函数的值域一定是闭区间的结论, 这就是连续函数的**值域定理**: 若 $f \in C[a, b]$, M, m 是 f 的最大值和最小值, 则有

$$f([a, b]) = [m, M].$$

(当 $m = M$ 时值域 $[m, M]$ 退化成一点, f 为常值函数.)

5.3.1 定理的证明

最值定理的证明往往是以有界性定理为基础，但下面的第一个证明却不是如此，因此它同时也可以看成是有界性定理的新证明 (见 [42]).

例题 5.3.1 用确界定理和凝聚定理同时证明有界性定理和最值定理.

证 由于值域 $f([a,b])$ 非空，因此可取

$$M = \sup f([a,b]), \quad m = \inf f([a,b]).$$

这里并未假定 M, m 是有限数. 我们的目的是证明 $M, m \in f([a,b])$. 以下只写出 $M \in f([a,b])$ 的证明，它同时说明 f 在 $[a,b]$ 上有上界.

从上确界的性质，存在数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. (对于 M 为有限数的情况，参见例题 3.1.3; 对 $M = +\infty$，请读者完成.) 对 $\{x_n\}$ 用凝聚定理，有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 记这个子列的极限为 ξ，则由 f 在 ξ 处的连续性，就有

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

这就表示 $M \in f([a,b])$. □

注 实际上用覆盖定理或闭区间套定理都不难同时证明有界性定理与最值定理. 这是实数系基本定理的很好的练习题. 请读者试之.

下一个证明说明从有界性定理到最值定理只是一步之遥.

例题 5.3.2 用两次有界性定理就可以证明最值定理，关键是通过一个适当的辅助函数 (见 [14]).

证 只证明其中的最大值部分. 由有界性定理知道，若 $f \in C[a,b]$，则 f 有上界. 因此值域的上确界 $M = \sup f([a,b])$ 是有限数. 我们断言 $M \in f([a,b])$.

反证法. 若 $M \notin f([a,b])$，则有 $f(x) < M \ \forall x \in [a,b]$. 构造辅助函数

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

由于 $f \in C[a,b]$，且 f 的取值始终小于 M，因此从连续函数的除法运算法则知道，函数 g 在 $[a,b]$ 上处处连续，即也有 $g \in C[a,b]$. 而且有 $g(x) > 0, x \in [a,b]$.

对 g 再次应用有界性定理，知道它有上界. 将它记为 M'，则有

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant M' \ \forall x \in [a,b].$$

这就导致

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{M'} \ \forall x \in [a,b].$$

因此 $M - \dfrac{1}{M'}$ 是值域 $f([a,b])$ 的上界. 这与 M 是值域的最小上界矛盾. □

5.3.2 例题

例题 5.3.3 设 $f \in C(a,b)$, $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 有限. 证明: f 在 (a,b) 上有界.

证 在闭区间 $[a,b]$ 上构造辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ f(a^+), & x=a, \\ f(b^-), & x=b. \end{cases}$$

则可以看出 $F \in C[a,b]$. 对 F 应用连续函数的有界性定理, 可见 F 在 $[a,b]$ 上有界. 因此 f 在 (a,b) 上也有界. □

证 2 根据函数极限的局部有界性定理, 存在 $\delta > 0$, 使得函数 f 在 $(a, a+\delta)$ 和 $(b-\delta, b)$ 上有界. 这里假定有 $a+\delta < b-\delta$ 成立. 然后在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上可以用有界性定理. 这样就得到所要的结论. □

注 注意: 证 2 对 $a=-\infty$ 和 $b=+\infty$ 的情况同样有效.

用同样的方法可以解决下面的例题, 证明从略.

例题 5.3.4 设 $f \in C(a,b)$, 极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 有限. 若存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f(\xi) \geqslant \max\{f(a^+), f(b^-)\},$$

证明 f 在 (a,b) 上有最大值.

用最值定理可以对于例题 5.2.5 给出简单得多的证明.

例题 5.3.5 若 $f \in C[a,b]$, 且对每一个 $x \in [a,b]$ 存在 $y \in [a,b]$, 使得 $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明 f 在 $[a,b]$ 中有零点.

证 这时也有 $|f| \in C[a,b]$, 对 $|f|$ 用最值定理, 在题设条件下可见最小值只能是 0. 这时的最小值点就是 $|f|$ 的零点, 当然也是 f 的零点. □

5.3.3 练习题

1. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 证明: f 在 $[a,b]$ 上有界.
2. 若 $f \in C[a,+\infty)$, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.
3. 问: 是否存在从 (1) $(0,1)$, (2) $[0,1]$, (3) $(0,1]$ 映射到整个实数集 $\mathbf{R}$ 的连续函数? (如果回答存在, 请举出例子; 如果回答不存在, 请作出证明.)
4. 问: 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的值域为闭区间, 则 f 是否在 $[a,b]$ 上连续?

5. 若 $f \in C[a,+\infty)$, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上至少可以取到最大值或最小值中的一个.

   (可以与例题 2.2.1 作比较.)

6. 若 $f \in C(a,b)$, 且 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$, 证明: f 在 (a,b) 上有最小值.

7. 若 $f \in C(a,b)$, 且 $f(a^+) = f(b^-)$, 证明: f 在 (a,b) 上至少可以取到最大值或最小值中的一个.

8. 若 $f \in C(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 证明: 复合函数 $f(f(x))$ 至少在两个点上取到它的最小值.

9. 求出 Dirichlet 函数和 Riemann 函数的所有极值点和最值点.

§5.4 一致连续性与 Cantor 定理

函数的一致连续性是一个比较精细的概念. 可以认为这个概念是由于数学分析内部理论发展的需要而产生的. 因此我们在下面先对这个概念列出要点, 提出几个思考题, 然后给出 Cantor 定理的证明, 并讨论其应用.

5.4.1 内容提要

关于函数的一致连续性的要点如下.

1. 定义: 函数 f 在区间 I 上为一致连续, 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x', x'' \in I$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2. 若 f 在区间 I 上一致连续, 则 f 在 I 上一定连续.

3. 若 f 在区间 I 上一致连续, 又有区间 $J \subset I$, 则 f 在 J 上也一致连续.

4. 函数 f 在区间 I 上连续就是在 I 的每一点连续, 因此这是一个逐点 (pointwise) 定义的概念. 从本质上看, 连续性是个局部概念. 但是 f 在区间 I 上的一致连续性则是由 f 和 I 二者共同确定的整体性概念. 与此类似的是函数在区间上的有界性等概念.

5. Cantor 定理: 有限闭区间上的连续函数必在这个区间上一致连续.

6. 有限开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ (见下面的例题 5.4.5).

7. 有限区间 (不论开或闭或半开半闭) 上的一致连续函数一定有界 (留作练习).

5.4.2 思考题

1. 写出函数 f 在区间 I 上不一致连续的正面叙述.
2. 判断对或错: f 在区间 $[a,b)$ 连续, 则 f 在 $[a,b)$ 上一致连续.
3. 判断对或错: f 在区间 (a,b) 内的每一个闭区间上连续, 则 f 在 (a,b) 上一致连续.
4. 判断对或错: f 在区间 (a,b) 上连续, 又有 $a<c<d<b$, 则 f 在区间 (c,d) 上一致连续.

5.4.3 Cantor 定理的证明

例题 5.4.1 用覆盖定理证明 Cantor 定理.

证 对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $x_0\in[a,b]$, 由于 f 在 x_0 连续, 存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in O_{\delta_0}(x_0)\cap[a,b]$ 时, 成立 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 因此当 $x',x''\in O_{\delta_0}(x_0)\cap[a,b]$ 时, 就有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x'')|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

对每个点 $x\in[a,b]$ 都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 这里出现了一个困难. 即如果对这个开覆盖直接应用覆盖定理的话, 则难以完成定理的证明. (读者可以试一下, 看看困难何在.) 再次应用例题 3.5.3 (即加强形式的覆盖定理), 将其中的 Lebesgue 数记为 η. 当 $x',x''\in[a,b]$, 且 $|x'-x''|<\eta$ 时, 在开覆盖中存在一个开区间, 它覆盖点 x' 和 x''. 由于上述构造方法, 就知道成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

这样就已经证明了 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. □

例题 5.4.2 用凝聚定理证明 Cantor 定理.

证 用反证法. 设 $f\in C[a,b]$, 但在 $[a,b]$ 上不一致连续. 应用 §1.4 节的对偶法则, 可以得到不一致连续的正面叙述: $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$, 使得 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$ 成立.

取 $\delta_n=1/n$, 将对应的点 x',x'' 记为 x_n 和 x_n'. 并对每一个 $n\in\mathbf{N}_+$ 都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 中的两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n'\}$, 使得

$$|x_n-x_n'|<\frac{1}{n},\ |f(x_n)-f(x_n')|\geqslant\varepsilon_0\ \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

对数列 $\{x_n\}$ 用凝聚定理, 知道存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 记它的极限为 ξ, 即有

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi.$$

由于

$$x_{n_k}-\frac{1}{n_k}<x'_{n_k}<x_{n_k}+\frac{1}{n_k},$$

以及 $n_k\geqslant k$, 因此数列 $\{x'_n\}$ 的对应子列 $\{x'_{n_k}\}$ 也收敛于 ξ, 即有

$$\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}=\xi.$$

由于 f 在点 ξ 连续, 因此对 ε_0 存在 $\eta>0$, 当 $x',x''\in O_\eta(\xi)$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$. 但当 k 充分大时, 就有 $x_{n_k},x'_{n_k}\in O_\eta(\xi)$. 这样就和

$$|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$$

矛盾. □

5.4.4 例题

例题 5.4.3 证明: (1) 对于满足 $0<\eta<1$ 的每个 η, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[\eta,1)$ 上一致连续. (2) 但是它在开区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

证 对 $x',x''\in[\eta,1)$, 有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}\leqslant\frac{|x'-x''|}{\eta^2}.$$

因此对 $\varepsilon>0$, 只要取

$$\delta=\eta^2\varepsilon,$$

就可以使得 $x',x''\in[\eta,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $\left|\dfrac{1}{x'}-\dfrac{1}{x''}\right|<\varepsilon$. 这表明 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[\eta,1)$ 上一致连续.

对于 (2) 用反证法. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上一致连续. 则对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(0,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}<1.$$

设 $n\geqslant2$, 并令

$$x'=\frac{1}{n},x''=\frac{1}{2n},$$

则有

$$|x'-x''|=\frac{1}{2n},|f(x')-f(x'')|=n\geqslant2>1.$$

因此只要取

$$n>\frac{1}{2\delta},$$

就引出矛盾, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续. □

注 1 若初学者对一致连续性概念有困难, 建议先将本例题彻底搞清楚. 利用 $y=1/x$ 的几何图形, 可以体会出一致连续性与函数的"陡度"有关. 从证明也可看出, 本例中的困难完全发生在点 $x=0$ 的右侧临近.

注 2 可以类比: 同一个函数 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上无界, 但在 $(0,1)$ 内的每一个闭区间上有界. 由此可见, 有界性和一致连续性是属于同一类型的概念, 即整体性质, 也就是说与函数在整个区间上的性质有关. 而连续性、极限的存在性等是局部性质, 即只与所考虑的点附近的函数性质有关.

例题 5.4.4 若函数 f 在区间 $(a,b]$ 和 $[b,c)$ 上分别为一致连续, 证明: f 在 (a,c) 上一致连续.

证 对 $\varepsilon>0$, 由条件知道存在 $\delta_1>0$, 使得当 $x',x''\in(a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$. 又存在 $\delta_2>0$, 使得当 $x',x''\in[b,c)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 我们断言: 当 $x',x''\in(a,c)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

先考虑 $x'<b<x''$ 的情况. 这时从 $|x'-x''|<\delta$ 推出 $|x'-b|<\delta_1, |x''-b|<\delta_2$ 成立, 因此

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(b)|+|f(b)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

对于其他情况, 即 x',x'' 同属区间 $(a,b]$ 或 $[b,c)$, 结论是明显的. 因此就证明了 f 在 (a,c) 上是一致连续的. □

注 用下一个例题的结果可立即导致本题的结论. 但上面的证明只涉及到一致连续性的定义, 完全是初等的. 而下一个例题的证明则需要用到 Cantor 定理和 Cauchy 收敛准则, 要 "高级" 得多.

例题 5.4.5 证明: 有限开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$.

证 先证充分性. 在闭区间 $[a,b]$ 上构造辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b.\end{cases}$$

则可以看出 $F\in C[a,b]$. 对 F 应用 Cantor 定理, 可见 F 在 $[a,b]$ 上一致连续. 因此 f 在 (a,b) 上也一致连续. (这与例题 5.3.3 的第一个证明完全相同.)

再证必要性. 不妨只写出存在 $f(a^+)$ 的证明. 对 $\varepsilon>0$, 由于 f 在 (a,b) 上一致连续, 因此存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(a,b)$, 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

因此当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立. 应用关于右侧极限的 Cauchy 收敛准则 (命题 4.2.5), 可见存在极限 $f(a^+)$. □

以下讨论在无限区间上函数的一致连续性. 首先有

例题 5.4.6 设 $f\in C[a,+\infty)$, 且存在有限极限 $f(+\infty)=A$. 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 对 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 当 $x>M$ 时成立 $|f(x)-A|<\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 又利用 Cantor 定理知道 f 在 $[a,M+1]$ 上一致连续. 因此对上述 ε 存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in[a,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

不妨假定上述 $\delta<1$. 我们断言: 当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

实际上, 如 $x',x''\in[a,M+1]$, 则已无问题. 又若 $x',x''>M$, 则有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|A-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于 $|x'-x''|<\delta<1$, 只可能发生以上两个情况. □

但是对于在无限区间上的函数的一致连续性来说, 上述极限 $f(+\infty)$ 的存在并非必要. 函数的有界性也不是必要的. 例如 $f(x)=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 再举一个例题:

例题 5.4.7 证明: 函数 $\sqrt{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证 先分别证明 $\sqrt{x}$ 在区间 $(0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的一致连续性,

从例题 5.4.5 或在 $[0,1]$ 上用 Cantor 定理就知道 $\sqrt{x}$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

在区间 $[1,+\infty)$ 上, 可以从

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqslant\frac{1}{2}|x'-x''|$$

推出 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

然后可以用例题 5.4.4 中的方法合并两个区间, 得到所要的结论 (从略). □

证 2 利用一个可以直接验证的不等式, 即当 $0\leqslant b\leqslant a$ 时成立

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\leqslant\sqrt{a-b},$$

就有对任何 $x',x''>0$ 成立的不等式

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant\sqrt{|x'-x''|}.$$

因此对 $\varepsilon>0$ 只要取 $\delta=\varepsilon^2$, 就可以直接得到所要的结论. □

在无限区间上的有界函数也可以不一致连续. 下面就是一个例子.

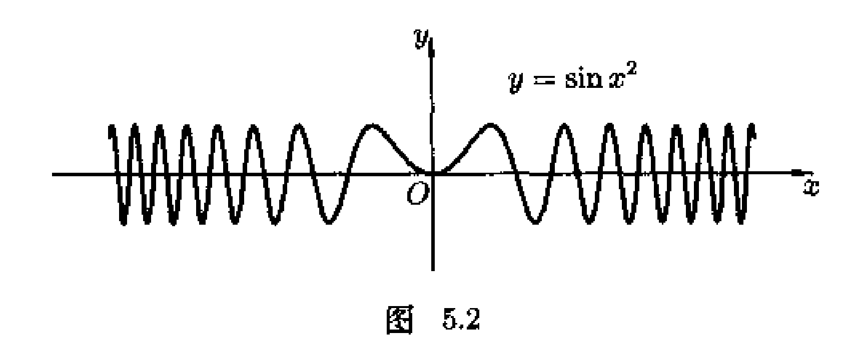


图 5.2

例题 5.4.8 证明: 函数 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

证 用反证法. 设 $\sin x^2$ (如图 5.2 所示) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 x_1,x_2 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 成立

$$|\sin x_1^2-\sin x_2^2|<\varepsilon. \tag{5.3}$$

设 $n\in\mathbf{N}_+$, 令

$$x_1=\sqrt{n\pi},x_2=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}},$$

则 $\sin x_1^2=0$, $\sin x_2^2=\pm1$. 因此当 $\varepsilon<1$ 时, 不等式 (5.3) 不能成立.

但又有

$$|x_1-x_2|=\frac{|\pi/2|}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}},$$

因此可以看出, 当 n 充分大时就有 $|x_1-x_2|<\delta$ 成立. 由此引出矛盾. □

5.4.5 练习题

1. 若 f 在区间 I 上定义, 且存在 $L>0$, 使得对任意 $x_1,x_2\in I$ 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$, 则称 f 在 I 上满足 **Lipschitz 条件**. 证明: 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件的函数必是一致连续函数.
2. 根据一致连续性的定义直接证明: 若 f 在 (a,b) 上一致连续, 则 f 有界.

3. (1) 设 f,g 在区间 I 上均为一致连续, 问: 它们的线性组合 $af+bg$ 和乘积 fg 在 I 上是否一致连续?
   (2) 设 f 在区间 I_1 上一致连续, g 在区间 I_2 上一致连续, 且区间 I_2 包含了 f 的值域, 问: 复合函数 $g\circ f$ 在区间 I_1 上是否一致连续?
4. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且为周期函数. 证明: f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.
5. (1) 设 $f\in C[0,+\infty)$, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 证明 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续;
   (2) 若将 (1) 中的 $ax+b$ 换成 ax^2+bx+c, 结论是否成立?
   (3) 又若将 $ax+b$ 换成某个函数 $g(x)$, 问: 当 $g(x)$ 具有什么性质时 (1) 中的结论仍成立?
6. 证明: 当 $n>1$ 时, x^n 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.
7. 证明: $f(x)=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 一致连续, 但在 $(0,1)$ 上不一致连续.
8. (1) 证明: 函数 $f(x)=|\sin x|/x$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 均为一致连续, 但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续. (注意 $(-1,0)\cup(0,1)$ 不是一个区间.)
   (2) 若函数 f 在区间 (a,b) 和 $[b,c)$ 上分别为一致连续, 问: f 在 (a,c) 上是否一致连续?
9. 讨论以下函数在指定区间上是否一致连续: (可参考图 4.2)
   (1) 在区间 $(0,1)$ 上的函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$;
   (2) 在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $\dfrac{\sin x}{x}$;
   (3) 在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数 $x\sin x$.

§5.5 单调函数

5.5.1 基本性质

单调函数是在数学分析中除连续函数类之外的又一类重要函数. 本小节列出关于单调函数的主要结果.

首先, 从单调函数的单侧极限存在定理 (命题 4.2.2) 可以知道:

命题 5.5.1 单调函数的间断点是跳跃点, 即在该处有两个不等的单侧极限.

证 不妨只讨论 f 是 (a,b) 上的单调增加函数的情况. 设 $x_0\in(a,b)$ 是 f 的间断点, 任取 x_0 两侧的点 $x<x_0<x'$, 则成立

$$f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x'). \tag{5.4}$$

令 $x \to x_0^-$, $x' \to x_0^+$, 应用单调函数的单侧极限存在定理, 得到

$$f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+),$$

并且其中的两个单侧极限都是有限数. 因此 x_0 是第一类间断点.

由于 x_0 是间断点, 因此在上面的两个不等号 $\leqslant$ 不可能同时成立等号. 这样就只能有严格的不等式

$$f(x_0^-) < f(x_0^+),$$

因此 x_0 是第一类间断点中的跳跃点. □

命题 5.5.2 单调函数的间断点至多为可列个.

证 不妨只讨论 f 是开区间 (a,b) 上的单调增加函数, 且有无限多个间断点.

若 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 的一个间断点, 则有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 这时 f 在点 x_0 的函数值满足不等式 $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$. 称 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间.

对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 我们要证明, 任何两个不同的间断点所对应的跳跃区间必不相交.

设 x_1 是 f 的另一个间断点, 且 $x_0 < x_1$. 我们要建立

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \varnothing. \tag{5.5}$$

为此在 x_0 和 x_1 之间插入 x, x' 如下:

$$x_0 < x < x' < x_1,$$

则有不等式

$$f(x) \leqslant f(x').$$

固定 x', 令 $x \to x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的比较定理, 得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x').$$

再令 $x' \to x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-).$$

于是得到

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-) < f(x_1^+).$$

即所要证明的 (5.5).

这样就得到与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交. 又在每个跳跃区间中取一个有理数, 从而得到一个有理数集, 它与跳跃区间全体形成一一对应. 由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 为可列集, 它的无限子集也是可列集, 因此跳跃区间集合为可列集. 这就证明了单调函数如有无限个间断点, 则必为可列个. □

命题 5.5.3 设 f 是区间 I 上的单调函数，其值域 $f(I)$ 为区间的充分必要条件是 $f \in C(I)$.

证 先证充分性. 若 $f \in C(I)$, 则 $f(I)$ 为区间. 这就是前面已得到的介值定理. 这里不需要单调性条件.

再证必要性. 不妨设 f 单调增加，已知 $f(I)$ 为区间. 要证明 f 处处连续. 这里用反证法. 若 f 有间断点 x_0, 在它的两侧任取两点 x 和 x', 则与前面的公式 (5.4) 一样可以得到

$$f(x) \leqslant f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+) \leqslant f(x').$$

由于 x_0 是 f 的间断点，所以有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$ 成立. 以上不等式对于小于 x_0 的所有 x 和大于 x_0 的所有 x' 成立. 这样一来在非空开区间 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 中至多只可能有一个点在值域 $f(I)$ 中，可见 $f(I)$ 不可能是区间. 这个矛盾表明 f 不能有间断点. □

命题 5.5.4 设 f 是区间 I 上的严格单调连续函数. 证明: f 的反函数是值域 $f(I)$ 上的严格单调连续函数，且具有与 f 相同的单调性.

证 不妨只讨论 f 为区间 I 上的严格单调增加连续函数的情况. 由于 $f \in C(I)$, 所以 $f(I)$ 是区间. 由于 f 严格单调增加，从 $x_1 < x_2$ 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 因此从 I 到 $f(I)$ 的对应是一对一的. 这就保证了从 $f(I)$ 到 I 的逆映射存在，即 f 有反函数，记为 f^{-1}. 反函数的定义域为区间 $f(I)$, 值域为 f 的定义域 I.

若记映射 f 为 $y = f(x), x \in I$, 则记其逆映射 f^{-1} 为 $x = f^{-1}(y), y \in f(I)$.

现证 f^{-1} 也是严格单调增加函数. 设有 $y_1, y_2 \in f(I)$, 且 $y_1 < y_2$. 则有

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2).$$

它们是由

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

确定的. 由于 f 严格单调增加，可见当 $y_1 < y_2$ 时 $x_1 = x_2$ 和 $x_1 > x_2$ 都不能成立，因此只有 $x_1 < x_2$ 是可能的. 这已表明 f^{-1} 为严格单调增加.

由于 f^{-1} 是区间 $f(I)$ 上的单调函数，而值域 I 是区间，因此从上一个命题知道 f^{-1} 是连续函数. □

直接用命题 5.5.4 即可得到如下结论:

例题 5.5.1 反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 都是严格单调的连续函数.

在 3.4.5 小节的练习题 7 中出现 Kepler 方程. 若将这个方程 $x - q\sin x = a\,(0 < q < 1)$ 中的 a 看成变量，改记为 y, 则有以下结论.

例题 5.5.2 证明: 由 Kepler 方程 $y = x - q\sin x\,(0 < q < 1)$ 可以唯一地确定函数 $x = f(y)$, 而且它是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格单调增加连续函数.

证 从 $y = x - q\sin x$ 知道它是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 由于 $|\sin x| \leqslant 1$, 可见值域也是 $(-\infty, +\infty)$. 为研究单调性, 设 $x_1 < x_2$, 则有

$$y_1 - y_2 = (x_1 - q\sin x_1) - (x_2 - q\sin x_2) = (x_1 - x_2) - q(\sin x_1 - \sin x_2).$$

由于不等式 $|\sin x| \leqslant |x|$, 从

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant |x_1 - x_2|$$

和 $0 < q < 1$, 可知

$$|q(\sin x_1 - \sin x_2)| < |x_1 - x_2|,$$

因此 $y_1 - y_2$ 与 $x_1 - x_2$ 同号. 这就表明 $y = x - q\sin x$ 是严格单调增加函数. 用前面的命题 5.5.4 即得所要的结论. □

注 与单调函数类密切有关的是有界变差函数类. 有界变差函数可定义为两个单调增加函数之差. 它在数学的许多领域中起重要作用. 由于篇幅所限本书不介绍有界变差函数. 有需要的读者可参考 [14] 的第三卷第 15 章第 4 节.

5.5.2 练习题

1. 设函数 f 在开区间 (a, b) 上定义, 且对每一个点 $x \in (a, b)$, 存在邻域 $O(x)$, 使得 f 在 $O(x)$ 上单调增加, 证明: f 在 (a, b) 上单调增加.
2. 设 $f \in C[a, b]$, 且对 $[a, b]$ 上任意两个有理数 r_1, r_2, $r_1 < r_2$, 成立 $f(r_1) \leqslant f(r_2)$, 证明: 函数 f 在 $[a, b]$ 上单调增加.
3. 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调函数, 在每一点定义 $g(x) = f(x^+)$, 证明: g 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处右连续的函数.
4. 设 f 为 $(\infty, +\infty)$ 上的单调函数, 且对一切 $x, y \in \mathbf{R}$ 满足 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 证明: $f(x) = f(1)x$.
5. 设 $f \in C[a, b]$. 证明: f 在 (a, b) 中没有极值点的充分必要条件是 f 在 $[a, b]$ 上严格单调.

§5.6　周期 3 蕴涵混沌

本节的标题取自论文 [34] 的题目 "Period implies chaos". 在本节中我们将介绍该文并证明其中的第一定理, 这样做有几个理由:

1. 该论文发表在美国数学月刊上, 该杂志拥有广大读者, 包括高等学校的教师和学生. 阅读该论文所需要的数学分析知识只限于本章的连续函数.
2. 该文在混沌发展的历史上起了极为重要的作用. 从此以后, 混沌不再只是一个普通名词, 而是有确切数学内容的一个科学名词了.
3. 该文的内容是在迭代生成数列方面的新发现, 因此和本书中已经多次介绍的内容 (§2.6 节和 3.4.4 小节) 有直接的关系.
4. 由该文的第二定理产生了混沌的第一个数学定义, 即 Li-Yorke 定义. 我们虽然不给出第二定理的证明, 但读者还是可以由此对混沌有一个了解. 因为其中的关键概念恰恰就是 §3.6 节中的上、下极限.

在 1998 年出版的数学分析教科书 [7] 中已经将与本节大体相当的内容收入教材, 作为函数的连续性一章的最后一节. 在同年出版的数学分析参考书 [63] 中收入了更多的材料. Li-Yorke 原论文 [34] 的译文和该文的第一作者李天岩关于发现经过的一篇短文可以在数学译林的 1989 年第 3 期中找到.

5.6.1 动力系统的基本概念

现在很多论著中所说的动力系统是一个比较模糊的名词, 实际上只要系统的状态随时间而变化, 我们就可以说它是一个动力系统. 但是这样一来, 所有以时间为自变量的常微分方程, 以及在自变量中有一个是时间的偏微分方程的理论都可以说成是动力系统的理论了. 实际上在数学的学科分类中, 微分方程仍保持不变, 包含传统的稳定性理论、定性理论和解的存在性、唯一性等内容, 而动力系统中研究的对象则主要是在 20 世纪六、七十年代之后形成的, 混沌就是其中占有突出地位的一部分.

关于混沌这门学科的诞生及其概况可以看 [16], 这是一本普及读物. 它的作者是纽约时报的记者, 他访问了开创混沌研究的许多科学家, 然后用完全通俗的语言写成此书.

这里我们主要介绍由迭代而生成的离散动力系统, 它的一般形式就是在前面已出现多次的递推公式

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbf{N}_+,$$

在动力系统理论中称之为一维迭代动力系统 (或离散动力系统).

先讲动力系统中的几个名词. 从初值 x_0 出发由迭代生成一个数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$, 称为由初值 x_0 确定的**轨道**. 在轨道中占有特殊地位的是不动点和周期轨道.

如果对所有 $n \geqslant 0$ 有 $x_{n+1} = x_n$, 则称点 x_0, 也就是由它确定的轨道, 为系统的不动点. 这个概念在前面已多次出现.

如果对某一轨道 $\{x_n\}$ 存在自然数 p, 使 $x_{n+p}=x_n$ 对一切 $n\geqslant 0$ 成立, 就称这个轨道是以 p 为周期的周期轨. 周期轨中的点称为周期点. 显然, 不动点就是周期为 1 的周期轨. 对周期轨来说, 具有以上性质的最小 p 称为轨的最小周期. 实际上在第二章的最后两个参考题中都出现了周期 2 轨.

我们知道, 从函数 $y=f(x)$ 的几何图像就可以直接看到不动点. 实际上也不难从几何上看出是否有周期 2 轨 (请读者考虑如何看出). 但要从几何上发现是否有周期大于 2 的周期轨则并非易事.

注 在这里读者可以发现, 虽然迭代动力系统的外表形式与第二章中迭代生成数列的递推公式并无区别, 但实际上所研究的对象已大不相同. 在 §2.6 节以及后来在 3.4.4 小节中介绍压缩映射原理时所关心的主要问题就是所得到的数列是否收敛, 若收敛则极限是什么. 而从以上的简单介绍中可以看到, 我们已经将周期轨 (和周期点) 作为更一般的研究对象了. 还应指出, 迭代动力系统的主要研究内容是比周期轨复杂得多的混沌现象. 这在下面讲了混沌的 Li-Yorke 定义后就会明白.

5.6.2 Li-Yorke 的两个定理

在李天岩和 Yorke 的论文 [34] 中主要有两个定理. 我们先介绍第一个.

命题 5.6.1 (Li-Yorke 第一定理) 设 I 为区间, 函数 $f\in C(I)$, 且有 $f(I)\subset I$. 设有点 a,b,c,d 属于区间 I, 满足条件

$$f(a)=b, f(b)=c, f(c)=d, \quad d\leqslant a<b<c \ (\text{或 } d\geqslant a>b>c),$$

则 f 有最小周期为每个自然数的所有周期轨.

现在我们来证明这个命题. 为此先要做一些准备工作, 证明几个引理. 其中前两个引理恰好是关于连续函数基本性质的练习题.

例题 5.6.1 (引理 1) 设 I 为有限闭区间, $f\in C(I)$. 如果有 $f(I)\supset I$, 则 f 在 I 中有不动点.

证 记 $I=[a,b], f(I)=[c,d]$, 由闭区间上连续函数的值域定理知道 $f(I)$ 也是有限闭区间, 即有 $c\leqslant a<b\leqslant d$. 由连续函数的介值定理, 存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=a, f(\eta)=b$. 不妨设 $\xi<\eta$. 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,$$

F 的零点即 f 的不动点, 则有

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=a-\xi\leqslant 0,\ F(\eta)=f(\eta)-\eta=b-\eta\geqslant 0.$$

因此知道

$$F(\xi)F(\eta)\leqslant 0.$$

若 ξ 或 η 不是 F 的零点，则由零点存在定理可知在 $(\xi,\eta)\subset[a,b]$ 中有 F 的零点，即 f 的不动点. □

注 与此题类似的是经典性的例题 5.2.4，注意它们的证明相似而不相同.

例题 5.6.2 (引理 2) 设 I,J 是两个有限闭区间，$f\in C(I)$. 如果有 $f(I)\supset J$，则在 I 中存在一个闭子区间 I'，使得 $f(I')=J$.

证 设 $I=[a,b], J=[c,d]$. 由于 $f([a,b])\supset[c,d]$，由介值定理知道有 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c, f(\eta)=d$.

先考虑 $\xi<\eta$ 的情况. 定义

$$u=\sup\{\ s\mid f(s)=c,\xi\leqslant s<\eta\ \},$$
$$v=\inf\{\ t\mid f(t)=d,u<t\leqslant\eta\ \}.$$

我们断言：$f(u)=c, f(v)=d$. 实际上，u 是数集 $A=\{\ s\mid f(s)=c,\xi\leqslant s<\eta\ \}$ 的上确界. 如有 $u\in A$，则当然 $f(u)=c$. 否则，至少在集合 A 中存在数列收敛于 u (参见例题 3.1.3)，由 f 的连续性可知有 $f(u)=c$. 同理有 $f(v)=d$.

由 u,v 的定义可见 $u<v$，而且在 (u,v) 中函数值 $f(x)$ 不可能取到 c 和 d，从而一定有 $f((u,v))\subset(c,d)$. 这样就得到

$$f([u,v])=[c,d]=J,$$

因此 $I'=[u,v]$ 即为所求. 对于 $\xi>\eta$ 的讨论是类似的. □

第三个引理是引理 2 的进一步发展，而且和引理 1 结合起来了. 但是在这里要引进在迭代动力系统研究中使用的一个特定记号，这个新记号就是将复合函数 $f(f(x))$ 简记为 $f^2(x)$，将 $f(f(f(x)))$ 简记为 $f^3(x)$，$\cdots$，一般地记

$$f^n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n\text{ 重}}=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 个}})(x). \tag{5.6}$$

例题 5.6.3 (引理 3) 设 f 是在有限闭区间 $I_0, I_1, \cdots, I_{n-1}$ 上有定义的连续函数，满足条件

$$f(I_0)\supset I_1, f(I_1)\supset I_2,\cdots, f(I_{n-2})\supset I_{n-1}, f(I_{n-1})\supset I_0,$$

则存在点 $x_0\in I_0$，使得 $f^n(x_0)=x_0$，且满足 $f^i(x_0)\in I_i,\ i=1,\cdots,n-1$.

证 应用引理 2 于 $f(I_0)\supset I_1$，知道存在闭区间 $I_0^1\subset I_0$，使得 $f(I_0^1)=I_1$.

从条件 $f(I_1)\supset I_2$，又有 $f^2(I_0^1)\supset I_2$. 再次用引理 2 于区间 I_0^1 上的函数 f^2，有闭区间 $I_0^2\subset I_0^1\subset I_0$，使得 $f^2(I_0^2)=I_2$. 于是有

$$f(I_0^2) \subset I_1, f^2(I_0^2) = I_2.$$

这样进行下去就得到 $I_0^{n-1} \subset I_0$, 使得

$$f(I_0^{n-1}) \subset I_1, f^2(I_0^{n-1}) \subset I_2, \cdots, f^{n-2}(I_0^{n-1}) \subset I_{n-2}, f^{n-1}(I_0^{n-1}) = I_{n-1}. \quad (5.7)$$

用最后一个条件 $f(I_{n-1}) \supset I_0$, 有 $f^n(I_0^{n-1}) \supset I_0 \supset I_0^{n-1}$. 对于区间 I_0^{n-1} 上的 f^n 应用引理 1, 知道存在 f^n 的不动点 $x_0 \in I_0^{n-1} \subset I_0$, 使得 $f^n(x_0) = x_0$.

同时由于 (5.7), 可见 $f(x_0) \in I_1, f^2(x_0) \in I_2, \cdots, f^{n-1}(x_0) \in I_{n-1}$. □

命题 5.6.1 (Li-Yorke 第一定理) 的证明 定义区间 $L = [a, b]$, $K = [b, c]$, 则从定理的主要条件

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d, \quad d \leqslant a < b < c \text{ (或 } d \geqslant a > b > c),$$

可以看出有

$$f(L) \supset K, f(K) \supset L, f(K) \supset K.$$

现在对每个自然数 n 寻找最小周期为 n 的周期点. 分以下几种情况分别讨论.

(i) $n = 1$. 从 $f(K) \supset K$ 和引理 1 即得.

(ii) $n = 2$. 从 $f(L) \supset K$, $f(K) \supset L$, 和引理 3, 存在点 $x_0 \in L$, 满足 $f(x_0) \in K$ 和 $f^2(x_0) = x_0$. 如果点 x_0 的最小周期不是 2, 则 x_0 就是 f 的不动点, 即 $x_0 = f(x_0)$. 但从 $x_0 \in L$ 和 $f(x_0) \in K$, 而 $L \cap K = \{b\}$, 因此只能是 $x_0 = b$. 但已知 $f(b) = c > b$, b 不会是不动点, 引出矛盾.

(iii) $n \geqslant 3$. 令 $I_0 = L$, $I_1 = I_2 = \cdots = I_{n-1} = K$, 这样就如图 5.3 所示构成了一个圈. 图中所用的记号 $I \longrightarrow J$ 表示 $f(I) \supset J$. 从 $f(L) \supset K$, $f(K) \supset K$ 和 $f(K) \supset L$ 可见这个圈是成立的, 也就是说引理 3 的条件满足.

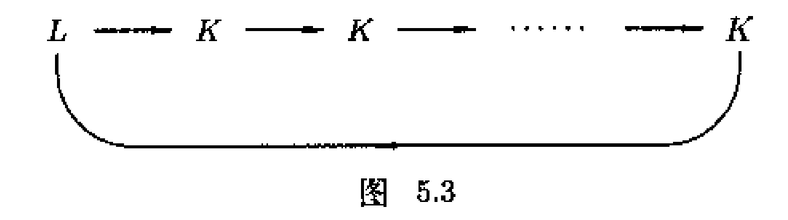


图 5.3

对于所取的 n 个区间应用引理 3, 知道存在点 $x_0 \in L$, 满足

$$f^n(x_0) = x_0, f^i(x_0) \in K, i = 1, \cdots, n-1. \quad (5.8)$$

若 n 不是点 x_0 的最小周期, 则有 p, $1 \leqslant p < n$, 使得 $f^p(x_0) = x_0$. 由于这时 $f^p(x_0) \in K$, 而 $x_0 \in L$, 因此与 (ii) 一样, 只能有 $x_0 = b$. 但从条件 $n \geqslant 3$ 和 $f^2(x_0) = f^2(b) = f(f(b)) = f(c) = d \leqslant a$ 可见 $f^2(x_0) \notin K$, 与 (5.8) 相矛盾. □

例题 5.6.4 在区间 $[0,1]$ 上定义分段线性函数 (其图像在图 5.4 上用粗黑的折线表示):

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2};\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 f 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 存在以 n 为最小周期的周期轨.

证 取 $a=0$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=1$, 则有 $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $f(1)=0$. 因此从 Li-Yorke 第一定理知道结论成立. □

注 从图 5.4 可以清楚地看出, 其中有周期 3 轨 $\{0,\dfrac{1}{2},1\}$, 还有不动点 $\dfrac{2}{3}$ 和由 $\{\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{6}\}$ 组成的周期 2 轨, 其中周期 2 轨还特地用粗黑线的方框标出. 图 5.4 中的箭头是按照第二章 §2.6 节中介绍的蛛网工作法作出的. 由于命题 5.6.1, 在这样简单地由两段直线组成的图像上还存在无穷多个其周期取到一切自然数的周期轨, 这完全超出了几何上的直观想像. 在 [34] 发表之前很少有人能想到如此简单的函数会有如此奇妙的可能性.

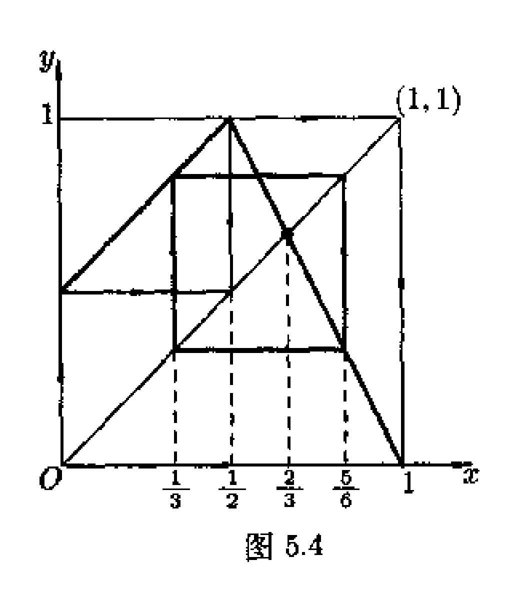


图 5.4

现在介绍 [34] 中的第二个定理. 虽然我们在这里并不证明, 但了解一下它的内容也是很有意义的. 这里的主要预备知识就是在第三章中的上、下极限.

命题 5.6.2 (Li-Yorke 第二定理) 在与命题 5.6.1 相同的条件下, 在区间 I 中存在一个不可列集 S, 使得以 S 中的任何两点 x, y $(x\neq y)$ 为初值的迭代生成数列 $\{f^n(x)\}$ 和 $\{f^n(y)\}$ 具有以下三个性质:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|f^n(x)-f^n(y)|>0$, (2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|f^n(x)-f^n(y)|=0$,

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|f^n(x)-f^n(p)|>0$,

其中 p 是 f 的任何一个周期点.

根据我们对上、下极限的理解, 可以看出, 由 S 中任意两点出发的两个轨道 (就是两个迭代生成数列) 既会无限靠近, 但又总会分离开. 这样复杂的性态超出了过去的认识. 因此就产生出 Li-Yorke **混沌** 的定义:

定义 设 f 是区间 I 上的连续函数, 满足条件 $f(I)\subset I$. 如果满足以下条件:

(1) f 的周期点的最小周期无上界,

(2) 存在 I 的不可列子集 S, 对于 S 中的任意两点 x, y, $x \neq y$, 满足以下要求:

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$;　　(ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$,

则称由 f 迭代生成的动力系统为混沌.

应当指出, 混沌在数学上目前存在各种不同的定义. 而上述的 Li-Yorke 定义是在数学上第一个可操作的混沌定义. 对混沌有兴趣的读者可以从 [21, 34, 38, 39] 中得到比这里丰富得多的材料.

§5.7　对于教学的建议

5.7.1　学习要点

本章在极限理论的基础上介绍连续函数 (以及单调函数) 的基本性质. 这是进入微分学 (以及积分学) 前的最后准备工作.

1. 证明连续函数的基本定理和应用它们去解决各个问题不是一回事. 实际上, 由于这些基本定理反映了连续函数的深刻本质, 因此它们将成为今后的重要工具. 读者只有通过解题才能对如何运用这些工具获得直接的经验.
2. 单调函数在数学分析中经常用到. 本章对单调函数的基本性质作了小结. 读者应当注意它们的基础是上一章中的命题 4.2.2.
3. 以 "周期 3 蕴涵混沌" 为标题的一节可以作为课外活动材料. 由于已有不少数学分析的新书收入了同样的 (或更多的) 材料, 因此在 [39] 中作者的希望, 即将迭代动力系统的材料放到初等课程中去教, 正在变为现实. 相信读者只要浏览一下就会看到这些最新发现与数学分析有密切关系. 注意其中的第一个引理 (即例题 5.6.1) 已经成为数学分析教学中的基本题.
4. **对习题课的建议**　函数在某点的连续性概念的基础是极限概念. 习题课老师可以把两者联系起来讲. 可通过若干例题或课堂练习题来巩固这些概念. 当然, 复合函数的连续性 (包括复合函数的极限存在性) 是需要作一定训练的. 例题 5.1.2, 5.1.4 和 5.1.4 小节 (练习题) 中的不少题等都是合适的材料.

   本章习题课重点在于连续函数的整体性质. 从以往的教学经验看, 学生对学习零点定理、介值定理、有界性定理和极值定理的兴趣比较大. 这些定理也很直观. 用本书所列举的材料已可组织起比较好的习题课. 难点是一致连续性, 应该安排为某次习题课的训练重点. 本章 §5.4 节给出了训练的框架供参考. 比如可分为一致连续的概念, 一致连续的判断条件, 一致连续的应用三个层次来复习.

5.7.2 参考题

第一组参考题

1. 设非负函数 $f \in C[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 对任一实数 $a \in (0,1)$, 存在 $x_0 \in [0,1]$, 使得 $x_0+a \in [0,1]$, 又满足要求 $f(x_0)=f(x_0+a)$. 又问, 如去掉函数 f 非负的条件, 则结论还成立否?
2. 设 $f \in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$. 证明: $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 存在 ξ, 使得 $f(\xi+\dfrac{1}{n})=f(\xi)$.
3. 设 $f \in C[0,1]$, $f([0,1]) \subset [0,1]$. 证明: $y=f(x)$ 的图像不仅与直线 $y=x$ 有交点, 而且还与直线 $y=1-x$ 有交点.
4. 设 $f \in C(0,+\infty)$, 又设对每个实数 c, 方程 $f(x)=c$ 至多只有有限个解. 试分别给出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ 存在的充分必要条件, 并加以证明.
5. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 对于任意 x,y, 满足 $|f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|$ $(0<k<1)$. 证明:

   (1) 函数 $kx-f(x)$ 单调增加,

   (2) 存在唯一的 $\xi \in (-\infty,+\infty)$, 使 $f(\xi)=\xi$.

6. 设 $f_n(x)=x^n+x, n \in \mathbf{N}_+$. 证明:

   (1) 对每个 $n>1$, 方程 $f_n(x)=1$ 在 $(1/2,1)$ 内有且仅有一个根,

   (2) 若 $c_n \in (1/2,1)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根, 则存在 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. 试求出极限值.

7. 设对每个自然数 n, 数集 $A_n \subset [0,1]$ 是有限集, 而且 $A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall i,j \in \mathbf{N}_+, i \neq j$. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} 1/n, & \text{若 } x \in A_n; \\ 0, & \text{若 } x \in [0,1] \text{ 但不在任何 } A_n \text{ 中}. \end{cases}$$

   对每个 $a \in [0,1]$, 求 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

8. 设函数 f 在区间 I 上只有可去间断点. 定义 $g(x)=\lim\limits_{t\to x} f(t), x \in I$, 证明: $g \in C(I)$.
9. 证明: 若函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且有界, 则对任意给定的 λ, 存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足要求: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}[f(\lambda+x_n)-f(x_n)]=0$.
10. 设函数 f 在区间 I 上满足带指数的 Lipschitz 条件, 即存在 $M>0, \alpha>0$, 使得当 $x,y \in I$ 时, 成立 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$. 证明: 若 $\alpha>1$, 则 f 在 I 上是常值函数.
11. 举出一个函数 f, 它的定义域为 $[0,1]$, 处处不连续, 但它的值域为区间.

12. 若 $f \in C[a,b]$, 证明: 对每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 上的分段线性函数 $L(x)$ 使得 $|f(x) - L(x)| < \varepsilon$ 在区间 $[a,b]$ 上处处成立.
13. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x)) = \infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
14. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 且存在 $k > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant k|x_1 - x_2|$. 证明: f 严格单调且值域为 $(-\infty,+\infty)$.
15. 证明: 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 又问: 如果将连续性条件去掉, 结论还能成立否?
16. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 其中 $a > 0$. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.
17. 证明: 函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对任何满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ 的 $\{x_n\} \subset I$ 和 $\{y_n\} \subset I$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.
18. 证明: 函数 f 在有限区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 当 $\{x_n\}$ 为基本数列时, $\{f(x_n)\}$ 也一定是基本数列.
19. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x \in [0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
20. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 证明: 存在非负常数 a 和 b, 使得成立 $|f(x)| \leqslant a\,|x| + b$.

第二组参考题

1. 用连续函数的零点存在定理解决以下 "实际问题":
   (1) 一个煎饼, 不论形状如何, 必可切一刀, 使面积二等分.
   (2) 两个煎饼, 不论形状如何, 相对位置如何, 必可切一刀, 使它们的面积同时二等分 (**双煎饼定理**).
   (3) 三个煎饼, 不论形状如何, 相对位置如何, 能否切一刀, 使它们的面积同时二等分?
   (4) 一个煎饼, 不论形状如何, 是否能以相互垂直的方式切两刀, 使面积四等分?
   (5) 某短跑运动员用 10 秒跑完 100 米. 证明: 其中至少有一段长为 10 米的路程恰用 1 秒完成.
   (6) 四只脚的方台在不平整的地上可能会摇晃. 但如适当转动的话, 一定能找到使它不摇晃的位置.
   (7) 给定平面上的一条光滑的封闭曲线. 能否作一个包含这条闭曲线的正方形, 并且它的四边都与曲线相切?

(本题中出现的许多概念,包括区域、边界、面积、光滑曲线和相切等,在今后的教学中将会得到严格的数学处理. 但是目前可以采取朴素的观点来对待题中的条件,因为在所有这些题中,主要的工具只是零点存在定理,再加上你的想像力.)

2. 设函数 f 在区间 $[0,n]$ 上连续,且有 $f(0)=f(n)$,其中 n 是一个自然数. 证明:至少有 n 对不同的 (x,y),使得 $f(x)=f(y)$,同时 $x-y$ 为非零整数.
3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上定义,且处处有极限. 证明:
   (1) 对每个 $\varepsilon>0$,在 $[a,b]$ 中使 $|\lim\limits_{t\to x}f(t)-f(x)|>\varepsilon$ 的点至多只有有限个;
   (2) f 在 $[a,b]$ 至多只有可列个间断点.
4. 证明:区间上的函数不可能以区间的每个点为它的可去间断点.
5. 是否存在定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f,使对于任何 $c\in\mathbf{R}$,
   (1) 方程 $f(x)=c$ 都恰有两个解?
   (2) 方程 $f(x)=c$ 都恰有三个解?
6. 设 n 为自然数. 求满足函数方程 $f(x+y^n)=f(x)+(f(y))^n\ \ (x,y\in\mathbf{R})$ 的所有解.
7. 设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(f(x))\equiv x$. 证明: $f(x)\equiv x$.
8. 确定使得函数方程 $f(f(x))=kx^9$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续解时参数 k 应满足的充分必要条件.
9. 设 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一对一连续映射,有不动点,又满足

$$f(2x-f(x))\equiv x\ \forall x\in\mathbf{R},$$

   证明: $f(x)\equiv x$.
10. 设函数 $f\in C[a,b]$,定义 $M(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)$, $m(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)$. 证明:函数 $M,m\in C[a,b]$.
11. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加, $f(a)>a, f(b)<b$. 证明: f 在 (a,b) 内必有不动点.
12. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上满足以下条件: (1) $f(0)>0$, $f(1)<0$; (2) 存在一个函数 $g\in C[0,1]$,使得 $f+g$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 证明: f 在 $(0,1)$ 中有零点.
13. 设 f_1,f_2 是分别以 T_1,T_2 为周期的连续函数,且均非常值函数. 证明:若周期 T_1,T_2 不可公约,则 f_1+f_2 不是周期函数.
14. 设 f,g 是周期函数,且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,证明: $f(x)\equiv g(x)$. (注意:本题并不需要 f 和 g 为连续函数的条件.)

15. 证明: 函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N, 使得当 $x, y \in I, x \neq y$ 且

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > N$$

时, 成立 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

16. 设 f 在开区间 I 上连续, 且于每点 $x \in I$ 取到极大值 (或者于每点取到极小值). 证明: f 为 I 上的常值函数.

17. (本题是对上一题的进一步加强) 设 f 在开区间 I 上连续, 且于每一点 $x \in I$ 处取到极值, 证明: f 为 I 上的常值函数.

18. 若 x_0 为函数 f 的极大值点 (极小值点), 且存在一个邻域 $O(x_0)$, 使得当 $x \in O(x_0)$ 时满足不等式 $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, 则称 x_0 为 f 的严格极大值点 (严格极小值点). 证明: 任何函数的严格极大值点 (严格极小值点) 至多可列, 并举出同时有可列个严格极大值点和严格极小值点的例子.

    (在每个区间上有严格极大值和严格极小值的连续函数也是存在的. 见美国数学月刊, 90 卷 (1983), 281–282 页和 92 卷 (1985), 209–211 页.)

19. 设 $f \in C(0, +\infty)$, 对每个 $x_0 > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx_0) = 0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

    (本题可以与 Heine 归结原理对比, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 的充分必要条件是对每个严格单调增加的正无穷大数列 $\{x_n\}$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. 本题表明, 当 $f \in C(0, +\infty)$ 时, 上述条件只需对所有等差增加的 $\{x_n\}$ 成立即可.)

20. 设 f 是将区间 $[a, b]$ 映入自身的连续映射. 从 $[a, b]$ 内任一点 x 出发, 用 $x_1 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$ 生成迭代数列 $\{x_n\}$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

    (这个出入意料的结果来自 1976 年在美国数学月刊上的论文 (83 卷 273 页). 它至少有两方面的意义: (1) 给出了一维迭代数列收敛的一个充分必要条件. 这时只假定迭代函数连续, 与第二章中依赖于单调性的几何方法完全不同. 当然也与第三章的压缩映射原理无关. (2) 又可看成是 Cauchy 收敛准则在一维迭代数列中的特殊化, 即此时不要求数列中下标任意大的两项之间的差任意小, 而只要求前后两项之差任意小即可.)

第六章 导数与微分

这是进入微分学的第一章. 本章含有四节. 在 §6.1 节中介绍导数概念、基本的求导公式和计算. §6.2 节介绍高阶导数及其他求导法则. 一阶微分的概念在 §6.3 节中讨论. 最后一节为学习要点和两组参考题.

§6.1 导数及其计算

6.1.1 内容提要

这里的要点为:

1. 导数就是变量的变化率. 它在几何上来源于如何定义一般曲线的切线, 而在运动学上则与中学物理中的瞬时速度的定义方式完全相同.
2. 从导数的定义可以看出, 计算导数就是要求 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式的函数极限. 这也就是在学习微分学之前先要学习极限理论的理由之一. 在 §4.3 节的两个重要极限以及许多例题都与此直接相关.
3. 函数在某一个点是否可导, 只与该函数在这点附近的性态有关. 因此与函数的极限和连续性类似, 函数的可导性是一种局部性概念.
4. 函数在一点可导, 则一定在该点连续. 反之未必成立.
5. 除了导数的几何意义之外, 还要知道单侧导数的几何意义, 以及在某一点的导数或单侧导数为无穷大时的几何意义.
6. 导函数的概念. 这直接导致高阶导数的概念.
7. 导数的计算. 初等函数的导函数仍是初等函数. 这里的计算可以用求导公式按部就班地进行. 对于分段定义的函数, 在特殊点上要从导数定义出发直接计算.
8. 复合函数求导的链式法则是导数计算中的基本工具.
9. 对隐函数和用参数方程定义的函数的导数计算所涉及的理论问题将在以后学习, 本章着重于学习用求导法则进行计算.

初等函数的求导公式在数学分析的教科书中都有, 本书不再重复. 请初学者注意: 求导数是数学分析中最基本的一项计算, 而这必须通过做教科书中的大量导数计算题才能学会. 否则连基本公式都记不住, 还有什么技能可谈.

6.1.2 思考题

1. 设 $f \in C(a,b)$, 又在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导. 在 $x \neq x_0$ 时定义函数

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

问: 如何在 x_0 处补充定义 $g(x)$ 才能使得 $g \in C(a,b)$?

2. 说明 $f'_+(x_0)$ 和 $f'(x_0^+)$ 的不同意义, 并举出它们取不同数值的例子.

3. $f'(x_0)$ 和 $(f(x_0))'$ 有无区别? 为什么?

4. 验证下列三个函数 $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = -\cos^2 x$, $h(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 的导函数均相等. 为什么相等?

5. 若 $f'(x_0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

6. 若 $[f(x^2)]' = [f^2(x)]'$, 证明: 或者 $f(1) = 1$, 或者 $f'(1) = 0$.

7. (1) 在圆面积公式 $S(r) = \pi r^2$ 和圆周长公式 $l(r) = 2\pi r$ 之间有微分学的关系: $S'(r) = l(r)$. 请对此作出解释;

   (2) 同样, 在球体积公式 $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ 和球面积公式 $A(r) = 4\pi r^2$ 之间有关系 $V'(r) = A(r)$, 请作出解释;

   (3) 能否在所知的初等几何计算公式中再找出类似的微分学联系?

8. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

   (1) 若 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$, 是否可以推出 $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \infty$?

   (2) 若 $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \infty$, 是否可以推出 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$?

9. 判断以下命题的真假, 并说明理由:

   (1) 若 f 在 $x = 0$ 可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $f'(0) = 0$. 反之也成立;

   (2) 若 f 在 x_0 可导, 且在某 $O(x_0)$ 内 $f(x) > 0$, 则 $f'(x_0) > 0$;

   (3) 若 f 为 $(-1,1)$ 上的偶函数, 于 $x = 0$ 处可导, 则 $f'(0) = 0$;

   (4) 若 f 为 $(-1,1)$ 上的奇函数, 于 $x = 0$ 处可导, 则 $f'(0) = 0$;

   (5) 若 f 在 x_0 可导, 则 $|f|$ 也在 x_0 可导. 反之也成立;

   (6) 若存在极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x},$$

   则 $f(x)$ 于 x_0 可导, 反之也成立.

10. (1) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续, 又右连续, 问 $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

    (2) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 既左侧可导, 又右侧可导, 问 $f(x)$ 在 x_0 是否可导? 为什么?

6.1.3 例题

以下第一个例题的内容是联系导数与连续的基本结果.

例题 6.1.1 证明: 函数在某点可导, 则在该点一定连续.

证 1 设 $f(x)$ 于点 x_0 可导. 根据定义, 存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

因此有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)\ (\Delta x\to 0).$$

两边乘以 Δx, 得到

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0). \tag{6.1}$$

由于 $\Delta x=x-x_0, \Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)$, 上式可以重写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0).$$

令 $x\to x_0$, 就得到 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. □

注 称 (6.1) 为**有限增量公式**. 它是微分学中的主要工具之一.

证 2 将因变量 y 的增量 Δy 写成 $(\Delta x\neq 0)$:

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

由于右边的差商当 $\Delta x\to 0$ 时有极限, 第二个因子是无穷小量, 因此就得到

$$\Delta y=o(1)\ (\Delta x\to 0).$$

这就是说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to f(x_0)$, 即 f 在 x_0 连续. □

证 3 直接用连续性的 ε-δ 定义来进行证明. 由于存在极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

应用局部有界性定理, 存在 $M>0,\eta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时, 成立

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M.$$

对给定的 $\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\left\{\eta,\frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 成立

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot|x-x_0|<M|x-x_0|\leqslant\varepsilon.$$

这样就证明了 f 在 x_0 处连续. □

注 与这个基本结论有关的其他内容有: (1) 若 $f(x)$ 在点 x_0 存在某个单侧导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 具有相应的单侧连续性; (2) 若 $f(x)$ 在点 x_0 存在两个单侧导数 (不论它们是否相等), 则 $f(x)$ 在 x_0 连续. (典型例子为 $f(x)=|x|, x_0=0$.)

例题 6.1.2 举例说明函数在某点可导, 但在这点外的每个点上可以不连续.

解 定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{是有理数},\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

则在 $x=0$ 处 $f'(0)=0$, 当然函数于该点连续. 但在任何 $x\neq 0$ 处函数 f 均有第二类间断 (证明细节请读者完成). □

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线

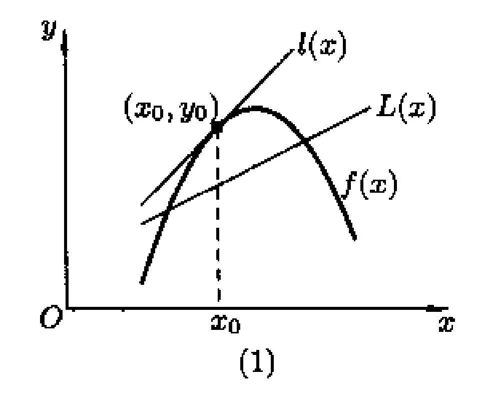
$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

下一个例题刻画了这条特殊的直线所具有的局部最优性 (见 [17]).

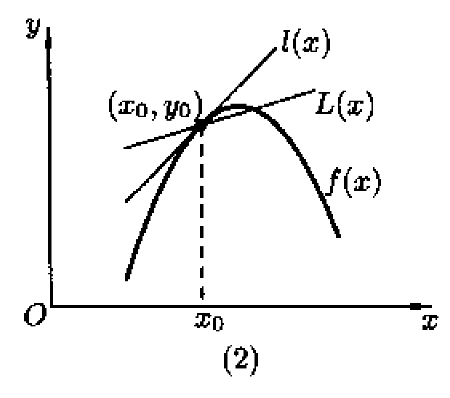
例题 6.1.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, $l(x)$ 定义如上. 对于不等于 $l(x)$ 的其他任何 $L(x)=ax+b$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 成立不等式

$$|f(x)-l(x)|<|f(x)-L(x)|. \tag{6.2}$$

证 如图 6.1 所示分两个情况讨论.



(1)



(2)

图 6.1

(1) $L(x_0)\neq f(x_0)$. 几何上这表明直线 $L(x)=ax+b$ 不经过点 (x_0,y_0), 其中 $y_0=f(x_0)=l(x_0)$. 由于 $L(x_0)\neq y_0$, 利用

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-l(x)|=|f(x_0)-l(x_0)|=0<|f(x_0)-L(x_0)|=\lim_{x\to x_0}|f(x)-L(x)|,$$

和连续函数的局部保号性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 成立所要的不等式 (6.2). 注意: 这时 $x=x_0$ 是允许的.

(2) $L(x_0)=f(x_0)$, 几何上这表明直线 $L(x)=ax+b$ 经过点 (x_0,y_0), 即有

$$L(x_0)=f(x_0)=l(x_0)=ax_0+b.$$

改写 $L(x)$ 为

$$L(x)=a(x-x_0)+f(x_0),$$

由于 $L(x)\neq l(x)$, 所以必有 $a\neq f'(x_0)$. 从导数 $f'(x_0)$ 存在, 即有 (这就是有限增量公式 (6.1))

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0).$$

因此有

$$f(x)-l(x)=o(x-x_0)\ (x\to x_0).$$

另一方面, 既然 $a\neq f'(x_0)$, 因此有

$$\frac{f(x)-l(x)}{f(x)-L(x)}=\frac{o(x-x_0)}{(f'(x_0)-a)(x-x_0)+o(x-x_0)}=o(1)\ (x\to x_0).$$

从而存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 成立

$$\left|\frac{f(x)-l(x)}{f(x)-L(x)}\right|<1,$$

这就是所要求证的不等式 (6.2). □

有限增量公式 (6.1) 可以加强为在下一个例题中更为有用的形式. (取自 [17], 又参见本章第一组参考题 14.)

例题 6.1.4 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 则成立以下公式,

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\omega(x)\Delta x, \tag{6.3}$$

其中的函数 $\omega(x)$ 满足条件 $\lim\limits_{x\to x_0}\omega(x)=\omega(x_0)=0$.

证 定义

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0), & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$

可以看出 $\omega(x)$ 在点 x_0 处连续. 因此公式 (6.3) 成立. □

公式 (6.3) 的另一个形式是

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\omega(x)(x-x_0).$$

注 公式 (6.1) 右边的第二项带有小 o 记号, 因此并不是普通的等式, 这使得它的使用不如 (6.3) 方便. 实际上, 在用 (6.3) 来证明一系列求导公式时, 我们只需要作简单的计算即可. 作为例子, 我们将用它来证明反函数与复合函数的求导公式. 这两个公式的证明对初学者往往有困难, 在证明时也很容易犯错误.

命题 6.1.1 (反函数求导公式) 设 $x=\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上为严格单调连续函数, 且有 $\varphi'(y_0)\neq 0$. 若 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数, 则 $f(x)$ 在点 $x_0=\varphi(y_0)$ 处可导, 而且有

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

注 在图 6.2 中显示了反函数求导公式的几何意义, 其中同一条曲线代表了变量 x 和 y 之间的对应关系. 以 y 为自变量 x 为因变量时即代表函数 $x=\varphi(y)$, 而以 x 为自变量 y 为因变量时就得到反函数 $y=f(x)$. 它们在点 (x_0,y_0) 的切线是同一条直线, 而与两条坐标轴的交角的正切成倒数关系. 这就是反函数求导公式的几何意义.

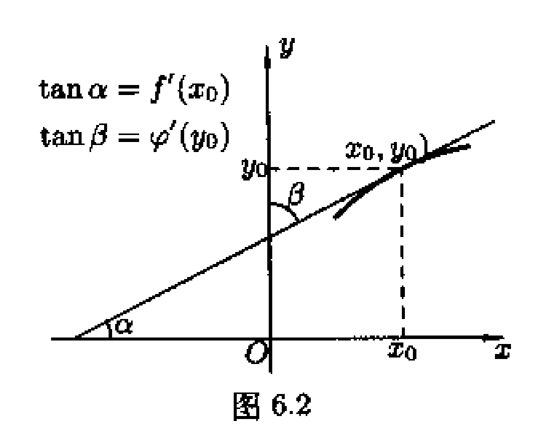


图 6.2

证 根据命题 5.5.4 (即单调连续函数的反函数定理), $f(x)$ 在点 x_0 的邻近也是严格单调连续函数. 从 $x=\varphi(y)$ 在点 y_0 可导出发, 应用公式 (6.3) 得到

$$\Delta x=x-x_0=[\varphi'(y_0)+\omega(y)](y-y_0)=[\varphi'(y_0)+\omega(y)]\Delta y, \tag{6.4}$$

其中 $\omega(y)$ 满足条件

$$\lim_{y\to y_0}\omega(y)=\omega(y_0)=0.$$

现在用 $y=f(x)$ 代入等式 (6.4) 中的 $\omega(y)$ 内. 由于 $f(x)$ 在 x_0 连续, 而 $\omega(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 连续, 从复合函数的连续性定理知道 $\omega(f(x))$ 在 x_0 连续, 且有

$$\lim_{x\to x_0}\omega(f(x))=\omega(\lim_{x\to x_0}f(x))=\omega(f(x_0))=\omega(y_0)=0.$$

再利用条件 $\varphi'(y_0)\neq 0$, 存在点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$, 当 $x\in O(x_0)$ 时, 有

$$\varphi'(y_0)+\omega(f(x))\neq 0.$$

因此当 $x\in O(x_0)$ 时, 可以从 (6.4) 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\varphi'(y_0)+\omega(f(x))}.$$

令 $x \to x_0$, 即 $\Delta x \to 0$, 就有所要的结果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}. \quad \square$$

注 对这个结果的常见说法是从

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

取极限, 就可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

这作为一种启发或记忆方法是可以的, 但要严格讲清楚的话并不容易. 而在上面的证明中只要用公式 (6.3) 进行计算.

命题 6.1.2 (复合函数求导的链式法则) 设 $u = \varphi(x)$ 于 x_0 可导, $y = f(u)$ 于 $u_0 = \varphi(x_0)$ 可导, 则 $y = f(\varphi(x))$ 于 x_0 可导, 而且有

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

证 分别将有限增量公式 (6.3) 用于 $u = \varphi(x)$ (在 x_0) 和 $y = f(u)$ (在 u_0), 得到

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = [\varphi'(x_0) + \omega_1(x)]\Delta x, \tag{6.5}$$

其中 $\omega_1(x)$ 在 x_0 连续, 且取值 0, 又有

$$f(u) - f(u_0) = [f'(u_0) + \omega_2(u)]\Delta u, \tag{6.6}$$

其中 $\omega_2(u)$ 在 u_0 连续, 且取值 0.

现在考虑复合函数 $y = f(\varphi(x))$. 在 (6.6) 中令 $u = \varphi(x)$, 利用条件 $u_0 = \varphi(x_0)$, 从而有 $\Delta u = \varphi(x) - \varphi(x_0)$. 然后再将 (6.5) 代入, 就得到

$$\Delta y = f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = f'(u_0)\varphi'(x_0)\Delta x + \omega(x)\Delta x,$$

其中

$$\omega(x) = f'(u_0)\omega_1(x) + \varphi'(x_0)\omega_2(\varphi(x)) + \omega_1(x)\omega_2(\varphi(x))$$

根据 $\omega_1(x)$ 和 $\omega_2(u)$ 分别在 x_0 和 $u_0 = \varphi(x_0)$ 连续且取值 0, 又知道 $\varphi(x)$ 在 x_0 连续, 就可以看出函数 $\omega(x)$ 在 x_0 连续且取值 0. 这样就得到

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0.$$

现在只要写出差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0) + \omega(x),$$

再令 $x \to x_0$, 就得到所要求证的公式

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0). \quad \square$$

注 关于复合函数求导法则证明的一个常见错误是从

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{6.7}$$

出发, 令 $\Delta x \to 0$, 得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

由于这里涉及对函数极限的基本理解问题, 需要作些解释.

在 (6.7) 的左边, 按照极限定义有 $\Delta x \neq 0$, 因此无问题. 但在右边的

$$\Delta u = u - u_0 = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

完全可能取到 0 值 (甚至有可能在 $\Delta x \to 0$ 的过程中无限次取到 0 值), 因此等式 (6.7) 是不合法的. 这里的 Δu 是中间变量 $u = \varphi(x)$ 的增量, 它是由自变量 x 的增量 Δx 决定的, 没有理由加上 $\Delta u \neq 0$ 的限制.

但在命题 6.1.2 的上述证明中不存在任何概念上的困难, 只是有关连续性的普通计算而已. 这就是用有限增量公式 (6.3) 代替 (6.1) 的优点.

例题 6.1.5 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

的导函数, 并讨论连续性 (参见图 6.3).

解 在 $x \neq 0$ 处可以用初等函数的求导法则, 但在点 $x = 0$ 处则必须按导数的定义, 先写出差商, 再求极限. 根据 f 的定义, 可得到 $f'(0) = 0$ (具体计算过程从略). 这里只写出所得的结果:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

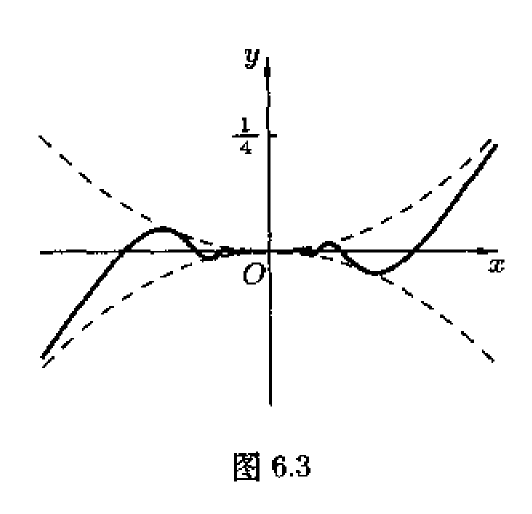


图 6.3

由此可见, 函数 $f(x)$ 处处可导, 但导函数 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续. 由于极限 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ 不存在, 因此 $x = 0$ 是第二类间断点. $\square$

注 函数在某点的单侧导数和导函数在该点的单侧极限是不同的概念. 初学者在这一个问题上容易把两者混淆. 对本题来说, 既然有 $f'(0)=0$, 因此在 $x=0$ 处的两个单侧导数均为 0, 即 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. 但从 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 时的表达式可以看出, 导函数在点 $x=0$ 的两个单侧极限, 即 $f'(0^-)$ 和 $f'(0^+)$ 都不存在. (参见下一章的命题 7.1.7.)

例题 6.1.6 确定在函数

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

中的 a,b, 使得函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解 根据函数在一点存在导数的充分必要条件是两个单侧导数存在且相等, 我们将分别计算 $f'_-(1)$ 和 $f'_+(1)$.

左侧导数 $f'_-(1)$ 可以直接计算如下:

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x+\Delta^2 x}{\Delta x}=2.$$

右侧导数的计算有所不同. 这里一方面涉及两个待定的数 a,b, 另一方面又必须保证函数在点 $x=1$ 为右连续. 由函数 f 在 $x>1$ 的表达式 $ax+b$ 和 $f(1)=1$ 可见 a,b 必须满足要求 $a+b=1$, 否则 $f'_+(1)$ 就不可能存在. 令 $b=1-a$, 然后可以计算如下:

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{a(1+\Delta x)+(1-a)-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a.$$

令 $f'_-(1)=f'_+(1)$, 得到 $a=2$, 从而 $b=-1$. □

注 由于单侧导数与导函数的单侧极限是不同的概念, 因此本题应当按单侧导数的定义计算. 注意在求 (单侧) 导数之前先要看是否 (单侧) 连续.

导数计算中的一个困难是求形式为 $u(x)^{v(x)}$ 的函数的导函数.

例题 6.1.7 计算 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的导函数.

解 用对数求导法. 先取对数得到

$$\ln f(x)=\ln(x^{\frac{1}{x}})=\frac{\ln x}{x},$$

然后求导. 在左边用复合函数求导法则得到

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

在右边直接计算得到

$$\left[\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]'=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

这样就计算出

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).\quad\square$$

注　对数求导法在对乘积形式的函数求导数时也有用处. 例如设有多项式

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

且其中 $x_i, i=1,2,\cdots,n$, 互不相等, 则为了求 p 的导数, 可以先取绝对值, 再取对数, 然后将

$$\ln|p(x)|=\ln|x-x_1|+\ln|x-x_2|+\cdots+\ln|x-x_n|,$$

对 x 求导, 就很方便地得到

$$p'(x)=p(x)\cdot\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}\right).$$

6.1.4　练习题

1. 证明以下基本事实:
   (1) 可导的偶函数的导函数为奇函数,
   (2) 可导的奇函数的导函数为偶函数,
   (3) 可导的周期函数的导函数为周期函数.
2. 已知偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 求 $f'(0)$.
3. 确定 a 的值, 使两条曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切.
4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 均可导. 证明: $f(x)-g(x)=o(x-x_0)\ (x\to x_0)$ 的充分必要条件是两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 时相切.
5. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)$ 无零点. 证明: 两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=f(x)\sin x$ 在相交处相切.
6. 设 $p(x)$ 是有 n 个实根的 n 次多项式, 记它的相异根为 $x_1,\cdots,x_k$, 其中根 x_i 的重数为 n_i, $i=1,2,\cdots,n$, $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 证明: 成立

$$p'(x)=p(x)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i}\right).$$

7. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

研究 $f(x)$ 的可导性.

8. 设 n 为自然数, 在什么条件下, 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 连续, (2) 在 $x=0$ 可导, (3) 在 $x=0$ 处导函数连续.

9. 设函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, 且已知 $f'(0)=1$. 证明: $f(x)$ 处处可导, 且成立 $f'(x)=f(x)$.

10. 给定函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ x, & x\text{ 为有理数},\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ x^2, & x\text{ 为有理数},\end{cases}$$

讨论它们的连续性与可导性.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ x^2+x, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$

(1) 证明 $x\neq 0$ 时, f 不连续; (2) 计算 $f'(0)$.

12. 设在原点某邻域 $O(0)$ 上有 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$, 且 $g(0)=g'(0)=0$. 求 $f'(0)$.

§6.2 高阶导数及其他求导法则

本节的内容为高阶导数的计算方法、隐函数求导法则和用参数方程给出的函数的求导法则.

6.2.1 高阶导数计算

高阶导数的计算, 特别是 n 阶导数的一般表达式的计算往往会有困难. 这里 Leibniz 公式是主要工具:

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)}&=\binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''v^{(n-2)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v^{(0)}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.\end{aligned}$$

由于这个公式在各种教科书中都有证明, 这里不再重复.

在 Leibniz 公式的右边有 $n+1$ 项, 如果在 uv 中有一个函数是低次多项式, 则实际出现的项数就很少. 这对于计算很有利:

例题 6.2.1 计算 $(x^2\sin x)^{(80)}$.

解 用 Leibniz 公式和 $(\sin x)^{(4)}=\sin x,(\cos x)^{(4)}=\cos x$, 就有

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(80)}&=x^2(\sin x)^{(80)}+\binom{80}{1}(x^2)'(\sin x)^{(79)}+\binom{80}{2}(x^2)''(\sin x)^{(78)}\\&=(x^2-6320)\sin x-160x\cos x.\quad\square\end{aligned}$$

例题 6.2.2 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 分解为简单分式后再求导. 先将 f 改写为

$$f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x},$$

这样就有

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}.$$

然后可以试求几次找出规律, 并用数学归纳法证明 (细节从略):

$$\left(\frac{2x}{1-x}\right)^{(n)}=n!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].\quad\square$$

例题 6.2.3 对 $y=\arcsin x$ 计算 $y^{(n)}(0)$.

解 直接计算很难总结出规律. 关键是寻找递推关系. 首先有

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

将它改写为

$$y'\sqrt{1-x^2}=1$$

后再求导, 得到

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

又将它整理为

$$(1-x^2)y''-xy'=0,$$

然后用 Leibniz 公式得到

$$y^{(n+2)}(1-x^2)+ny^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2)-(xy^{(n+1)}+ny^{(n)})=0.$$

整理后得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

现在用 $x=0$ 代入,就得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0.$$

从 $y(0)=0$ 即可知道 $y(x)$ 在 $x=0$ 的所有偶数阶导数都等于零: $y^{(2k)}(0)=0, k\in\mathbf{N}_+$. 再从 $y'(0)=1$ 出发用递推公式, 计算出 $y'''(0)=1$, $y^{(5)}(0)=3^2$, $y^{(7)}(0)=5^2\cdot 3^2, \cdots$, 即可以总结出 $y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2, k\in\mathbf{N}_+$. □

注 在第七章学了 Taylor 公式后可以提出一种计算高阶导数的间接方法. 见那里的例题 7.2.1 解 1 后对本题的回顾.

例题 6.2.4 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明 $f^{(n)}(0)=0, n\in\mathbf{N}_+$ (见图 6.4).

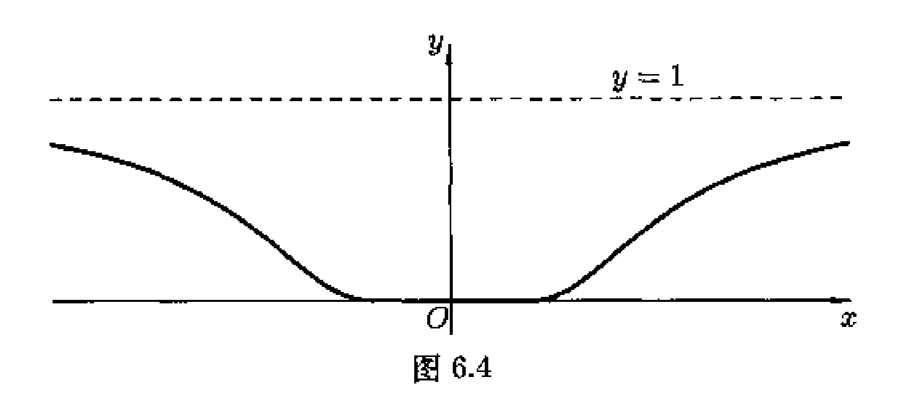


图 6.4

证 这里的基础是对于任何 α 成立

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^\alpha}{\mathrm{e}^u}=0.$$

先计算 $f'(0)$. 作代换 $y=1/x$ 后按定义计算, 就有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}=0.$$

然后求出 $x\neq 0$ 时的导函数表达式

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

再按定义计算出

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

然后求出 $x\neq 0$ 时的二阶导函数表达式

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

可以提出猜测, 即函数 f 的 n 阶导数在 $x\neq 0$ 时具有以下形式:

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中的 $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的意义是在变量 y 的多项式 $P_n(y)$ 中用 $y=\dfrac{1}{x}$ 代入. 由于我们只要求计算 $f^{(n)}(0)$, 而从前面的两次计算可以知道, 我们不必去关心多项式 $P_n(y)$ 的具体次数、系数和递推关系.

用数学归纳法来证明这个猜测. 已看到 $n=1,2$ 时猜测成立. 设 $f^{(k)}(x)$ 已具有所说的形式, 讨论 $f^{(k+1)}(x)$. 通过对 $f^{(k)}(x)$ 求导, 就有

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=(f^{(k)}(x))'\\
&=\left(P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)'\\
&=P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}+P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\\
&=[P_k'(y)(-y^2)+P_k(y)(2y^3)]\Big|_{y=\frac{1}{x}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},
\end{aligned}$$

将第一个因子记为 $P_{k+1}(1/x)$ 即可.

最后, 用数学归纳法来证明对于任意的自然数 n 有 $f^{(n)}(0)=0$ 成立. 在 $n=1,2$ 时已经成立. 设在 $n=k$ 时已有 $f^{(k)}(0)=0$, 则对于 $n=k+1$ 可以利用 $n=k$ 和 $x\neq 0$ 时 $f^{(k)}(x)$ 的上述特殊形式作以下计算:

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0.\quad \square
\end{aligned}$$

注 这是在数学分析中的重要例子. (1) 它说明一个非常值函数也可以在某些点上的任何阶导数等于 0; (2) 幂函数 x^n $(n\geqslant 2)$ 在 $x=0$ 处直到 $n-1$ 阶的导数均为 0, 当 $x\to 0$ 时为 n 阶无穷小量. 因此 x^n 的图像在原点附近随着 n 增加越来越平坦. 但是与本例的函数相比, 就大为不如. 因为这里对所有 n 都成立

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o(x^n)\,(x\to 0).$$

从图 6.4 可见这个函数在 $x=0$ 附近的图像极其平坦. (3) 在 Taylor 公式 (§7.2 节) 和 Taylor 级数 (见下册) 的理论中本例的函数有重要的应用.

下一个例题说明: 上述例子不只是理论上的 "精品", 而且有实际上的价值. 其中的辅助函数在许多研究中有用.

例题 6.2.5 将 $(-\infty,0]$ 上的常值函数 $u(x)\equiv 0$ 和 $[1,+\infty)$ 上的常值函数 $v(x)\equiv 1$ 延拓为在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无限次可微函数, 且使其值域为 $[0,1]$.

解 先定义

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0,\end{cases}$$

然后令

$$f(x)=\frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)},$$

则 $f(x)$ 就满足要求. (请读者验证.) □

6.2.2 隐函数求导法

从上一章的命题 5.5.4 和其后的两个例题中我们已经看到, 函数的给定方法已经突破了过去的显式方法, 而可以采用隐式方法. 具体地说, 再举那里的 Kepler 方程为例, 即可以用一个方程

$$y=x-q\sin x\ \ (0<q<1)$$

来定义一个函数 $x=x(y)$. 用第二、三章中的迭代生成数列的方法可以计算这个函数 (的近似值), 在上一章我们能够确定这个函数是连续单调增加函数, 而在本章则从反函数求导法则 (即命题 6.1.1) 还知道它可导, 且可以将导数 $x'(y)$ 计算出来 (看下面的例题).

本小节的隐函数求导法则与多元函数的偏导数计算有关, 它的一般形式将在多元微积分的隐函数章节中学习. 在这里只介绍这个法则的基本思想, 并计算一些较为简单的问题.

这里的要点是: 如果一个函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则将它代入后就得到恒等式 $F(x,y(x))\equiv 0$. 然后对 x 求导, 就有可能将导数 $y'(x)$ 计算出来.

可以认为隐函数求导法则是反函数求导法则的一个发展. 实际上根据上述思想就可以导出反函数的求导法则如下.

若 $y=y(x)$ 和 $x=x(y)$ 互为反函数, 则可将 $y=y(x)$ 代入后者, 得到

$$x\equiv x(y(x)).$$

对 x 求导, 就有

$$1=x'(y(x))y'(x),$$

这样就可以得到反函数求导公式

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)},$$

其中 $y = y(x)$ 由 $x = x(y)$ 决定. (这不能代替命题 6.1.1. 为什么?)

例题 6.2.6 设函数 $x = x(y)$ 满足 Kepler 方程 $y = x - q\sin x\,(0 < q < 1)$, 求 $x'(y)$.

解 1 已知 $y = x - q\sin x\,(0 < q < 1)$ 是以 $(-\infty, +\infty)$ 为定义域和值域的连续单调增加函数, 从导数 $y' = 1 - q\cos x \neq 0$ 就可以应用命题 6.1.1, 知道反函数 $x(y)$ 可导, 且得到导数

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 - q\cos x(y)}. \quad \square$$

解 2 将函数 $x = x(y)$ 代入方程 $y - x + q\sin x = 0$ 中, 得到以 y 为自变量的恒等式

$$y - x(y) + q\sin x(y) \equiv 0.$$

对 y 求导, 得到

$$1 - x'(y) + q\cos x(y) \cdot x'(y) \equiv 0.$$

这样就可以得到

$$x'(y) = \frac{1}{1 - q\cos x(y)}. \quad \square$$

注 对这两个方法进行比较. 第一种解法是严格的, 反函数的存在是由命题 5.5.4 保证的, 而反函数的可导与计算方法是以命题 6.1.1 为根据的. 它的缺点是不能解决一般的隐函数的存在和求导问题.

第二种解法的优点是可以用于一般的隐函数求导计算. 但在这一章中对隐函数的存在性和可导性都还不可能建立严格的理论基础, 这些问题要到多元微积分中才能解决, 在那里会证明这里的计算方法是正确的. 此外, 在一般计算中上述恒等式只写成为普通的等式.

现在举一个简单的例子, 从中可以看出隐函数求导方法的一个优点.

例题 6.2.7 设函数 $y = y(x)$ 满足单位圆方程 $x^2 + y^2 = 1$, 用显式和隐式两种方法求 $y'(x)$, 并作比较.

解 从所给方程可以得到两个显函数: 记为

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2} \text{ 和 } y_2 = -\sqrt{1 - x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{6.8}$$

它们在 $-1 < x < 1$ 内处处可导. 容易计算出

$$y_1' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ 和 } y_2' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.9}$$

另一方面, 用隐函数求导法则, 将 $y = y(x)$ 代入方程, 有恒等式

$$x^2 + y^2(x) \equiv 1.$$

对 x 求导, 得到 $2x + 2y(x)y'(x) \equiv 0$, 就有

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}. \tag{6.10}$$

现比较这两个不同的方法. 从前面的计算可见, 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定的函数不止一个. 实际上, 根据函数的定义, 两个函数只要定义域不同, 即使解析表达式相同, 也应当看成是不同的函数. 因此从这个观点看的话, 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 所确定的函数就不是只有两个, 而是多得不计其数了. (这正是将来要学习的隐函数理论中的观点.) 那么就产生了一个问题, 即第二个方法所得的公式 (6.10) 中的 $y'(x)$ 是指哪一个函数 $y(x)$ 的导数?

这个问题的回答是: 用隐函数求导法则所得到的导数公式对 (由方程确定的) 每一个函数同时有效. 由于本题十分简单, 只要在公式 (6.10) 中用公式 (6.8) 中的 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别代入, 就可以分别得到用第一个方法计算出来的 y_1' 和 y_2', 即公式 (6.9). 至于由单位圆方程确定的其他函数, 它们的定义域都是 $[-1, 1]$ 的子集合, 因此只要可导, 公式 (6.10) 同样有效. □

例题 6.2.8 设 $y = y(x)$ 可导, 且满足方程 $x^2 + xy + y^2 = 1$, 求 y', y'', y'''.

解 将 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 看成关于 x 的恒等式, 其中 $y = y(x)$, 对 x 求导得到

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0, \tag{6.11}$$

就有

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

根据这个表达式可以直接看出, 在函数 $y(x)$ 可导的假定下, 只要分母 $x + 2y \neq 0$, 二阶导数 y'' 一定存在.

将 (6.11) (它实际上也是关于 x 的恒等式) 对 x 求导, 得到

$$2 + 2y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0.$$

由此可以计算出 (请读者补充计算过程)

$$y'' = -\frac{6}{(x + 2y)^3}.$$

从这个公式又一次推知, 只要 $x+2y\neq 0$, 函数 $y(x)$ 就会有三阶导数. 对 y'' 的公式再求导, 就得到

$$y'''=-\frac{54x}{(x+2y)^5}. \quad \square$$

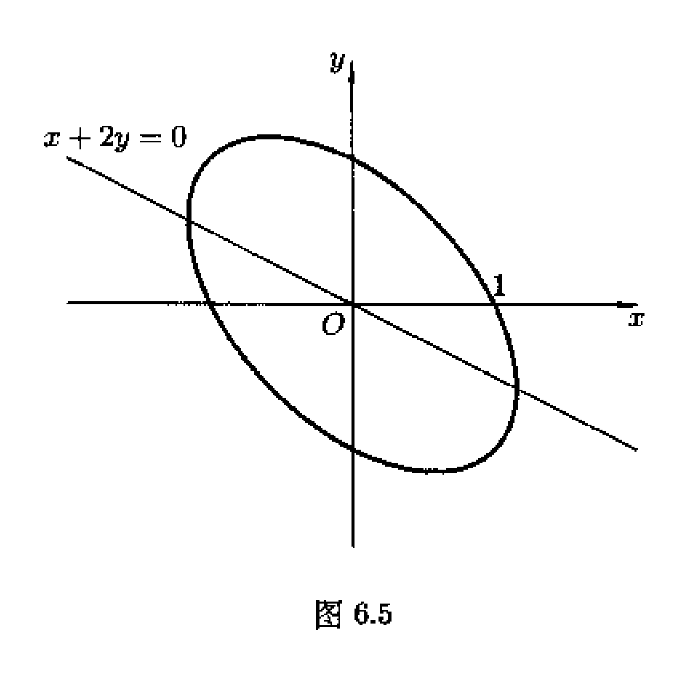


图 6.5

注 从平面解析几何的二次曲线理论可知, 如图 6.5 所示, 本题的方程是一个以原点为中心的椭圆, 但其主轴与坐标轴不重合. 这个椭圆与直线 $x+2y=0$ 的交点处的切线平行于 y 轴, 斜率为无穷大. 当然可以从方程出发得到 $y(x)$ 的显式, 但这时的显式表达式较复杂, 计算并不方便. 而且我们也不知道题意中的 $y(x)$ 是哪一个. 因而隐函数求导法则即使在能求出函数的显式公式时也有它的优点.

6.2.3 参数方程求导法

用参数方程给出平面或空间曲线的做法由来已久. 从解析几何的发展开始, 许多有实际意义的曲线都是这样给定的, 如果一定要用 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ 来表示它们反而会很不方便. 这即使对于常见的圆也是如此. 在中学里已经学过极坐标和用 $\rho=\rho(\theta)$ 来表示的曲线. 若写出

$$x=\rho(\theta)\cos\theta, y=\rho(\theta)\sin\theta,$$

就得到了以 θ 为参数的参数方程.

对于一般的参数方程

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), a\leqslant t\leqslant b,$$

在一定的条件下可以确定函数关系 $y=y(x)$ (或 $x=x(y)$). 这时对函数 $y=y(x)$ 的研究完全可以从参数方程出发来进行, 而不一定需要 $y=y(x)$ 的显式表达式. 因为这样的显式表达式一般地说不一定存在, 而即使存在也不一定有用. 这里的情况与上一小节完全类似.

命题 6.2.1 设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 在区间 (a,b) 上处处可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0\ \forall t\in(a,b)$, 则有以下结论成立:

(1) $x=\varphi(t)$ 是区间 (a,b) 上的严格单调连续函数, 因而存在反函数 $t=t(x)$;

(2) 在 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 之间存在函数关系 $y=\psi(t(x))$, 简记为 $y=y(x)$;

(3) 函数 $y=y(x)$ 可导, 且有公式

$$y'(x)=\left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=t(x)}.$$

证 关于 (1) 的证明见注 2 的说明, 在这里暂且先承认它. (2) 是 (1) 的推论. 下面只对于 (3) 给出证明.

由 $\varphi'(t)\neq 0$ 和 (1), 可以用反函数求导法则 (即命题 **6.1.1**) 知道 $t=t(x)$ 可导, 且有

$$t'(x)=\left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=t(x)}.$$

对 $y=\psi(t(x))$ 用复合函数求导公式, 就有

$$y'(x)=\psi'(t(x))\cdot t'(x)=\left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=t(x)}. \qquad \square$$

注 1 以上法则可以写为

$$y'_x=y'_t\,t'_x=\frac{y'_t}{x'_t},$$

因此是复合函数求导公式与反函数求导公式的结合.

注 2 关于 (1) 的证明在此作个说明. 由于在区间 (a,b) 上处处有 $\varphi'(t)\neq 0$, 应用下一章的导函数介值定理 (Darboux 定理), 即例题 7.1.4 , 可见导函数 $\varphi'(t)$ 在区间 (a,b) 上保号. 然后再用第八章 §8.2 节中关于单调性的讨论即可.

例题 6.2.9 将例题 6.2.8 中的椭圆用参数方程表示为

$$x=\frac{2}{\sqrt3}\cos t,\ y=\sin t-\frac{1}{\sqrt3}\cos t,$$

计算 y 对 x 的前三阶导数: y'_x, y''_x, y'''_x.

解 由上面的注解, 可以计算如下:

$$\begin{aligned}
y'_x&=(\sin t-\frac{1}{\sqrt3}\cos t)'_x=(\sin t-\frac{1}{\sqrt3}\cos t)'_t\cdot t'_x\\
&=(\cos t+\frac{1}{\sqrt3}\sin t)\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{\sqrt3}{2}\cot t-\frac12,\\
y''_x&=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\frac{\sqrt3}{2}\csc^2 t\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac34\csc^3 t,\\
y'''_x&=(y''_x)'_x=(y''_x)'_t\cdot t'_x=-\frac{9\sqrt3}{8}\cdot\frac{\cos t}{\sin^5 t}.
\end{aligned}$$

当然在三个答案中的 t 都应当理解为反函数 $t = t(x) = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. 同时只有当分母中的 $\sin t \neq 0$ 时公式有效, 从 $x'_t = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ 可知这就是在推导法则时的条件. 实际上有 $x + 2y = 2\sin t$, 因此与例题 6.2.8 一致. □

6.2.4 练习题

1. 对 $y = \arctan x$ 计算 $y^{(n)}(0)$.
2. 对 $y = (\arctan x)^2$ 计算 $y^{(n)}(0)$.
3. 对 $y = (\arcsin x)^2$ 计算 $y^{(n)}(0)$.
4. 设 $y = x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 证明: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
5. 求下列函数的 n 阶导函数:

   (1) $y = \sin^3 x$; (2) $y = \mathrm{e}^x \sin x$;

   (3) $y = x^{n-1}\ln x$; (4) $y = x^3\mathrm{e}^x$;

   (5) $y = \dfrac{x^n}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{x^n}{(x+1)^2}$;

   (7) $y = \sin ax \sin bx$.

6. 证明: $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 满足微分方程 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$.
7. 证明: $y = C_1\sin(\omega t + \varphi) + C_2\cos(\omega t + \varphi)$ 满足微分方程 $y'' + \omega^2 y = 0$.
8. 若曲线由极坐标方程 $\rho = f(\theta)$ 表示, 则可得到参数方程 $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$, 求 $y'(x)$.
9. 证明: Archimedes 螺线 $\rho = a\theta$ 与双曲螺线 $\rho = a\theta^{-1}$ 在相交处的切线正交.
10. 对下列参数方程求 $y'(x)$ 和 $y''(x)$ (在 (4) 中假定 f 二阶可导):

    (1) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t; \end{cases}$

    (3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t). \end{cases}$

11. 求出由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 确定的曲线上有水平切线的点.
12. 是否可以利用函数 $y = \sin x \sin 3x \sin 5x$ 的奇偶性计算 $y''(0)$?
13. 是否可以不展开乘积 $y = (6+5x)(4+3x)^2(2+x)^3$ 就求出 $y^{(5)}(0)$?

14. 设 f 为 7 次多项式, 若 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除, 能否利用导数工具求出 f.

§6.3 一阶微分及其形式不变性

6.3.1 基本概念

1. 微分是增量中的线性主部. 具体来说, 考虑 $y=f(x)$ 在点 x_0 由自变量的增量 Δx 引起的因变量的增量 Δy. 若有常数 a, 使得
$$\Delta y = a\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0),$$
则称 Δy 有线性主部 $a\Delta x$. 这时称 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微, 并将这个线性主部称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分.
2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 可导, 而且这时的导数就等于上述线性主部中的系数 a, 即 $f'(x_0)=a$.
3. 由可微和可导的关系可知: 并非每个函数在某点的增量中都能分离出线性主部.
4. 上述微分的记号是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, 其中将自变量的增量 Δx 写为 $\mathrm{d}x$. 这是因为, 对于最简单的线性函数 $y=x$, 确实有 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=\Delta x$.
5. 如果不只是考虑某个点 x_0 处函数 $y=f(x)$ 的微分, 而是一般地考虑函数 $y=f(x)$ 的微分, 则微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$ 实际上是二元函数. 每当给定了自变量 x 的值和增量 Δx 的值之后, 微分 $\mathrm{d}y$ 就有确定的值. 如果 x 固定, 则 $\mathrm{d}y$ 必是 $\mathrm{d}x$ 的线性函数.
6. 由于历史原因, 有时会将微分说成是 "很小很小的量", "小于任何给定量的量" 等等. 应当指出这样说是错误的. 在 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$ 中 $\mathrm{d}x$ 只不过是一个自变量, 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 只要 $\Delta x=\mathrm{d}x$ 取得足够大, 微分 $\mathrm{d}y$ 的值就可以取到任意大的值.
7. 固定点 x_0, 将微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ 中的 $\mathrm{d}y$ 改写为 $y-f(x_0)$, $\mathrm{d}x$ 改写为 $x-x_0$, 就得到曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程
$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

6.3.2 微分与近似计算

由于微分是增量的线性主部, 即有 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$, 可见当 Δx 充分小时, 可以用微分作为增量的近似值. 这就是所谓的"一次近似". 这种方法的效果有限, 也不能作误差估计. 但是在一些简单问题上还是很有用的工具.

例题 6.3.1 在没有数学用表和计算工具的情况下, 求 $\sqrt[3]{2}$ 的近似值.

解 若取 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则有 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 这时有

$$\sqrt[3]{x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\mathrm{d}\sqrt[3]{x},$$

其中第二项是函数 $\sqrt[3]{x}$ 在点 x_0 的微分

$$\mathrm{d}\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot\Delta x.$$

若取 $x_0=1$, 则 $\Delta x=1$, 计算很简单, 即

$$\sqrt[3]{2}\approx 1+\frac{1}{3}\approx 1.333.$$

但是这个近似值太差. 问题出在 $\Delta x=1$ 太大了. 可以改进如下.

取近似值的前两位 1.3, 计算 1.3 的立方, 得到 $1.3^3=2.197$. 因此可以取

$$x_0=2.197, \Delta x=-0.197.$$

再次计算如下:

$$\sqrt[3]{2}=1.3+\frac{1}{3\cdot 1.3^2}\cdot(-.197)=1.3-\frac{.197}{5.07}\approx 1.3-\frac{.2}{5}=1.3-.04=1.26.$$

实际上有 $\sqrt[3]{2}\approx 1.25992$. 第二次的结果较好. 原因是这次的增量 Δx 较小. □

注 用微分代替增量, 就是在有限增量公式 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$ 中将余项 $o(\Delta x)$ 去掉. 这种做法很简单. 缺点是对于由此带来的误差不能作出定量估计. 在第八章微分学的应用中将会对此作进一步的讨论.

在测量问题中一般来说往往是测量一些容易得到的量, 然后通过计算得到最后结果. 这时使用微分可以对于测量的绝对误差和相对误差作出估计.

例题 6.3.2 假定用测量球的直径来得到球的体积. 为了所得的球体积的相对误差不超过 1%, 问测量直径的相对误差应如何才行?

解 从直径 D 计算球体积 V 的公式是

$$V=\frac{\pi}{6}D^3.$$

因此有

$$\mathrm{d}V=\frac{\pi}{2}D^2\mathrm{d}D.$$

我们看到, 由于用了微分代替增量, 公式就很简单, 而且一定是线性的. 这样就有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=3\frac{\mathrm{d}D}{D}.$$

因此为了所得到的球体积的相对误差不超过 1%, 在测量直径时的相对误差应当控制在 0.33% 之内. □

6.3.3 一阶微分的形式不变性

这是一个初学者不容易理解的问题. 由于这个不变性在一元微分学中不起重要作用, 更使它容易被忽视. 但在多元微分学中的情况不一样, 一阶微分的形式不变性将变得很有用处. 因此作为基础, 在这里应当了解: 一阶微分的形式不变性的确切意义是什么? 为什么叫 "形式" 不变性? 它会有什么用处?

为了讨论这些问题, 先简要回顾教科书中的内容.

若 $y=y(x)$ 可导, 则有微分

$$\mathrm{d}y=y'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.12}$$

又若在 $y=y(x)$ 中的 x 并非自变量, 而只是中间变量, 即有 $x=x(t)$, 这里的 t 才是真的自变量. 这时若假定 $x(t)$ 也可导, 则对于函数 $y=y(x(t))$ 有微分

$$\mathrm{d}y=[y(x(t))]'_t\mathrm{d}t=y'_x(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.13}$$

从 $x=x(t)$ 又可以写出微分 $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t$. 将它代入 (6.13), 就可以将这个公式改写为

$$\mathrm{d}y=y'_x(x(t))\,\mathrm{d}x=y'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.14}$$

因此从形式上看, 公式 (6.14) 与公式 (6.12) 是一样的. 从而, 不论在 $y=y(x)$ 中的 x 是否是真的自变量, 一阶微分 (6.12) 在形式上是不变的.

仔细考察以上论证过程就可以发现, 这种不变性只是形式上的, 而并非真正的不变性. 这里至少可以列出以下几点:

1. 在 (6.12) 中的 $\mathrm{d}x=\Delta x$, 如将公式写成 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 也是正确的. 但在 (6.14) 中的 $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t$ 一般不等于 Δx. 我们知道它们之间相差一个 $o(\Delta t)$ $(\Delta t\to 0)$.
2. 在 (6.12) 中的 $\mathrm{d}y$ 与 Δx 成比例, 而在 (6.14) (即 (6.13)) 中的 $\mathrm{d}y$ 与 Δt 成比例. 它也与 $\mathrm{d}x$ 成比例, 但并不一定与 Δx 成比例, 因为 $\mathrm{d}x$ 一般不等于 Δx.
3. 在 (6.12) 中的 $\mathrm{d}y$ 是 x 和 $\mathrm{d}x$ $(=\Delta x)$ 的二元函数, 但在 (6.14) (即 (6.13)) 中的 $\mathrm{d}y$ 是 t 和 $\mathrm{d}t$ $(=\Delta t)$ 的二元函数. 只不过在 (6.14) 中我们故意抹去了它与 t 和 $\mathrm{d}t$ 的真正依赖关系, 从而造成了形式上的不变性.

既然我们关于一阶微分的形式不变性讲了这样多的 "坏话", 那么学习这种不变性还有什么意义呢? 先观察一个例子.

例题 6.3.3 计算函数 $y=\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}$ 的微分.

解 1 根据 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$, 只要计算出导数 $y'(x)$. 根据复合函数的求导法则, 可以得到

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}]' &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot [\sin(ax+b)]' \\ &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot \cos(ax+b) \cdot [(ax+b)]' \\ &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot \cos(ax+b) \cdot a \\ &= a\cos(ax+b)\,\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}.\end{aligned}$$

因此有 $\mathrm{d}y = a\cos(ax+b)\,\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}\mathrm{d}x$. □

解 2 根据一阶微分的形式不变性, 可以计算如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}) &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot \mathrm{d}(\sin(ax+b)) \\ &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot (\cos(ax+b)) \cdot \mathrm{d}(ax+b) \\ &= \mathrm{e}^{\sin(ax+b)} \cdot \cos(ax+b) \cdot a\mathrm{d}x \\ &= a\cos(ax+b)\,\mathrm{e}^{\sin(ax+b)}\mathrm{d}x. \quad \square\end{aligned}$$

注 一方面, 可以认为这两个解法没有很大的本质差别. 从 (6.13) 到 (6.14) 的推导可以知道, 其中的主要工具就是复合函数的求导法则. 因此从这一点来看, 两个解法之间的差别只是表面的, 其实质是完全一样的.

另一方面, 一阶微分的形式不变性毕竟为一阶微分的计算提供了一种新解法. 它的优点就是在每一步计算时不必考虑真正的自变量是什么. 由于微分的定义是由真正的自变量的增量所引起的因变量增量中的线性主部, 因此上述第二种解法确实含有新的思想.

6.3.4 练习题

1. 证明: 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1$.

2. 设 u, v, w 均为 x 的可微函数, 求 y 的微分:

   (1) $y = uvw$;　　(2) $y = \dfrac{u}{v^2}$;

   (4) $y = \arctan \dfrac{u}{vw}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

3. 证明: 在 $x/a^n \approx 0$ 时有近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0).$$

   并用于计算: (1) $\sqrt[3]{9}$;　(2) $\sqrt[4]{80}$;　(3) $\sqrt[7]{100}$;　(4) $\sqrt[10]{1\,000}$.

4. 设通过单摆振动的实验, 用公式 $g=4\pi^2 l/T^2$ 求重力加速度 g. 分别研究由 (a) 测量摆长 l, (b) 测量周期 T 时的相对误差对 g 的影响.
5. 设要求测量值 x 的常用对数, 问: x 的相对误差会给结果带来什么影响?

§6.4 对于教学的建议

6.4.1 学习要点

1. 本章的重点包含: (1) 导数和微分的概念, (2) 求导的计算能力.
2. 在求导计算中, 主要的错误有这样几类: (1) 基本求导法则记不住, (2) 粗心, (3) 概念不清. 由于一般读者都明白如何克服前两类毛病, 因此本书在这一章中的内容主要是围绕概念来展开的. 实际上在运用反函数求导法则和复合函数求导法则时的错误主要是对于这两个法则并不真正理解.
3. 在一元微分学中, 微分的概念从另一种与变化率完全不同的角度加深了我们对导数的了解. 这对于今后在多元微分学的学习是必要的基础.
4. 既然微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的线性主部, 因此在 Δx 充分小时可以用微分作为增量的近似值. 但这里不能对误差作出定量估计, 因此这只是近似计算的初步方法, 它是在以后学习 Taylor 公式的基础.
5. 本章没有提到二阶微分和一般的高阶微分的概念. 但是应当知道, 对于二阶微分以及更高阶的微分来说, 不存在形式上的不变性.
6. **对习题课的建议** 本章内容不难理解. 训练重点应当放在基本概念和基本运算能力上. 在习题课上要对概念模糊和运算马虎的学生提出警告. 同时, 在第一学期数学分析的讲授中这一章的内容也是比较容易的部分, 习题课教师可以利用这段时间处理一些前面的遗漏事项. 初学者往往对微分不予重视, 其实微分这种线性近似的观点是十分重要的. 要重视有限增量公式. 这是进入下一章学习的重要基础.

6.4.2 参考题

第一组参考题

1. 利用导数的定义计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x}$.
2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 计算 $f^{(100)}(0)$, 要求相对误差不超过 1%.
3. 设 f 在点 a 可导, $f(a)\neq 0$. 计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

4. 设 $a \neq 0$, 计算 $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)}$ 的导数并对结果作出解释.

5. 设 $f(0) = 0$, $f'(0)$ 存在. 定义数列

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right), n \in \mathbf{N}_+,$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2}\right)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

7. 设 $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 计算 $y^{(n)}(x), n \in \mathbf{N}_+$.

8. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上有任意阶导数, 证明: 对每个自然数 n 成立

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}.$$

9. 利用 $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ 的和, 求以下各式之和:

(1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,

(2) $1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1}$.

又问: 不用微分学方法能否求出 (1) 与 (2) 中的和?

10. 证明组合恒等式:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k} = n2^{n-1}, n \in \mathbf{N}_+$,

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\dbinom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}, n \in \mathbf{N}_+$.

11. 证明: 由抛物线的焦点出发的射线经抛物线反射后一定平行于抛物线的对称轴.

12. 证明: 由椭圆的焦点出发的射线经椭圆反射后一定经过椭圆的另一个焦点.

13. 证明: 在曳物线 $x = a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2} + \cos t\right), y = a\sin t$ 的每一条切线上从切点到与 x 轴的交点的长度为常数.

14. 证明: 函数 f 在点 x_0 可微的充分必要条件是 f 在 x_0 的某个邻域内可以写成为 $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$, 其中 $\varphi(x)$ 于 x_0 连续.

    (上述充要条件称为导数的 Carathéodory 定义. 若在教学中一开始就用它作为导数的定义, 则有不少优点. 这方面可以参考美国数学月刊上的两篇文章 (1991) 40–44 页, (1994) 332–338 页, 还可以参考教材 [69] 在这方面的内容. 本章多次利用例题 6.1.4 中的有限增量公式 (6.3) 的做法与此类似.)

15. 设 $n\geqslant 2$, 函数 $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$, $\varphi(x)$ 在某邻域 $O(x_0)$ 中 $n-1$ 阶可微, 且 $\varphi^{(n-1)}(x)$ 于 x_0 连续. 证明: 存在 $f^{(n)}(x_0)$.

16. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有 n 阶导数, 且存在不全为 0 的 $n+1$ 个常数 a_0, $a_1,\cdots,a_n$, 使得

$$a_0f(x)+a_1f'(x)+\cdots+a_nf^{(n)}(x)\equiv 0.$$

    证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上存在任意阶导数.

17. 设多项式 $p(x)$ 只有实零点. 证明: $[p'(x)]^2-p(x)p''(x)\geqslant 0\ \forall x\in\mathbf{R}$.

18. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且使得 $\{\,x\in[0,1]\mid f(x)=0=f'(x)\,\}=\varnothing$. 证明: f 在 $[0,1]$ 中只有有限个零点.

19. 对于 $y=\arctan x$, 证明: (1) $y^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n y\sin n(y+\dfrac{\pi}{2})$; (2) $y^{(n)}(x)=\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, 其中 $P_{n-1}(x)$ 为最高次项系数是 $(-1)^{n-1}n!$ 的 $n-1$ 次多项式.

20. 定义 $f_0(x)\equiv 1$, $f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_n'(x)$, $n=0,1,\cdots$. 证明: (1) $f_n(x)$ 是 n 次多项式; (2) $f_n(x)$ 有 n 个不同实根, 且关于原点对称.

第二组参考题

1. (1) 求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx$;

   (2) 求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\sin kx$ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cos kx$.

2. 证明: (例题 5.1.4 中的) Riemann 函数 R 处处不可导.

3. 若从点 (x_0,y_0) 向抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 能够作出两条切线, 或只能作出一条切线, 或不能作出切线, 问: 在这三种情况中的 (x_0,y_0) 的位置与抛物线有什么关系?

4. 证明: Legendre 多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 满足方程

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x).$$

5. 证明: Legendre 多项式满足方程

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

6. 分析三项式 $(u+v+w)^n$ 展开的系数规律, 猜测并证明 $(uvw)^{(n)}$ 的一般计算公式.

7. 设 $f(x) = ax^2+bx+c$, 当 $|x| \leqslant 1$ 时 $|f(x)| \leqslant 1$. 证明: 当 $|x| \leqslant 1$ 时 $|f'(x)| \leqslant 4$.

8. 证明: 对每个自然数 n 成立

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant m \leqslant n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

9. 设 $f(x) = x^n \ln x, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(1/n)}{n!}$.

10. 设 f 在 $x=0$ 处连续, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = A$. 证明: $f'(0) = A$.

11. 设 $y = (1+\sqrt{x})^{2n+2}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $y^{(n)}(1)$.

12. 设 $f(x)$ 在区间 I 上三阶可导, $f'(x) \neq 0$, 则可以定义 $f(x)$ 的 Schwarz 导数如下:

$$S(f,x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

证明:

(1) 若 $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, 即分式线性函数, 则 $S(f,x) = 0$;

(2) 若 $p(x)$ 是 x 的多项式, 且 $p'(x) = 0$ 的根都是互不相等的实数, 则 $S(p,x) < 0$;

(3) 若 f, g 具有所需的各阶导数, 则 $S(f\circ g, x) = S(f, g(x))(g'(x))^2 + S(g,x)$;

(4) 若 $S(f,x) < 0$, $S(g,x) < 0$, 则 $S(f\circ g, x) < 0$;

(5) 若 $S(f,x) < 0$, 又记 $f^n = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 个 } f}$, 则 $S(f^n, x) < 0$.

第七章　微分学的基本定理

本章是微分学的核心部分，主要内容是微分学中值定理和 Taylor 定理，将分别在前两节中讨论. 最后一节为学习要点和两组参考题.

本章的重点是基本理论，关于应用将在下一章中分专题介绍.

从本章开始，在谈到函数性质时经常使用“连续可微”的用语. 这就是指该函数存在连续的导函数. 为了避免误解，有时就说“有连续导函数”. 记号 $f \in C^k[a,b]$ 表示函数 f 在区间 I 上 k 阶连续可微，即有 k 阶连续的导函数.

如果说函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可微，则应当理解为 f 在 (a,b) 的每一点可导，同时又存在有限的单侧导数 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$.

§7.1　微分学中值定理

这里一共有四个基本定理: Fermat 定理、Rolle 定理、Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理. 实际上后三个是一个比一个更一般的中值定理. 中值定理名称的由来是因为在定理中出现了“中值” ξ. 虽然我们对中值 ξ 缺乏定量的了解，但一般来说这并不影响中值定理的广泛使用.

7.1.1　基本定理

由于 Fermat 定理是关于函数极值的基本定理，因此在讲这个定理之前，必须确切了解什么是函数的极值和极值点.

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域 $O(x_0)$ 内有定义. 如果对于每个 $x \in O(x_0)$ 成立不等式

$$f(x) \leqslant (\geqslant) f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处达到**极大值 (极小值)**，且称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个**极大值点 (极小值点)**. 极大值和极小值统称**极值**，极大值点和极小值点统称**极值点**.

注　在这里必须了解函数的极值点和最值点的区别和联系. 从极值点的定义中可以看出它必须是区间的内点. 因此若某个最值点又是区间的内点，则必是极值点. 当然，极值点不一定是最值点. 又若最值点是区间的端点，则不是极值点 (有时也称为单侧极值点).

为了方便初学者，在这里将一般教科书中的内点定义重复一下. 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个非空点集. 称 $x \in S$ 为 S 的**内点**，如果存在点 x 的一个邻域 $O(x) \subset S$. 对于有限区间，开区间 (a,b) 的每一个点都是区间的内点. a, b 是它的端点，但不

属于 (a,b). 闭区间 $[a,b]$ 含有自己的两个端点 a,b, 它们不是这个区间的内点, 但所有其他点都是区间 $[a,b]$ 的内点. 对半开半闭区间和无限区间可依此类推.

这里采取与多数教科书中不同的方法. 先建立一个预备性质的结果. 它不仅可以证明 Fermat 定理, 而且还可以处理更一般的问题. 它的证明也极其简单. 这里有四种情况. 我们只处理其中之一, 即右侧导数为非负的情况 (参见图 7.1).

命题 7.1.1 设函数 f 在点 x_0 存在右侧导数 $f'_+(x_0)$.

(1) 若 $f'_+(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 成立 $f(x) > f(x_0)$;

(2) 若有 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 成立 $f(x) \geqslant f(x_0)$, 则 $f'_+(x_0) \geqslant 0$.

证 (1) 写出右侧导数的定义

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

根据函数极限的局部保号性质, 就知道当 $f'_+(x_0) > 0$ 时, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 成立

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

由于 $x > x_0$, 所以就得到 $f(x) > f(x_0)$. 对 (2) 的证明完全类似. □

这个命题有明显的几何意义. 在下面的图 7.1 中显示了单侧导数大于 0 和小于 0 的 4 种可能情况. 其中情况 (a) 就是命题 7.1.1 中的情况 (1). 应当指出, 在命题 7.1.1 中实质上包含了比 Fermat 定理更一般的结论.

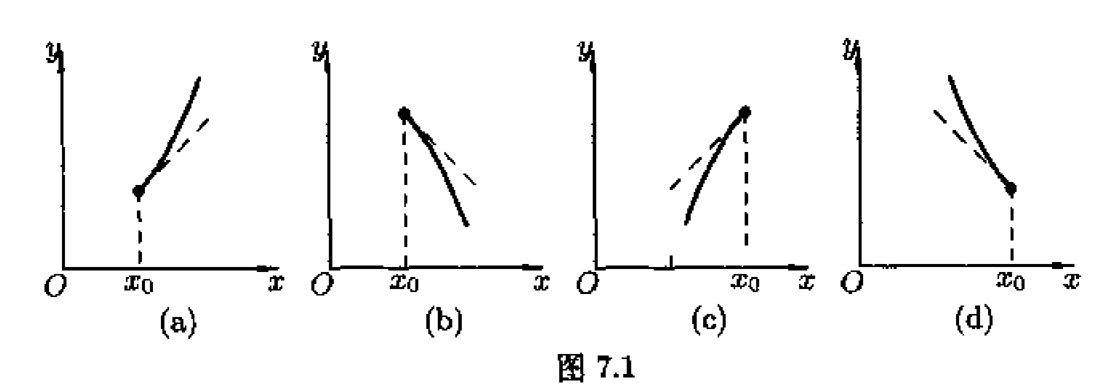


图 7.1

下面给出 Fermat 定理的两个证明. 第一个证明以命题 7.1.1 为依据, 第二个证明则完全不同, 它是用上一章的有限增量公式为工具.

命题 7.1.2 (Fermat 定理) 若 x_0 是函数 f 的极值点, 且存在导数 $f'(x_0)$, 则一定有 $f'(x_0) = 0$.

证 1 不妨只给出 x_0 为极小值点时的证明. 根据定义, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立

$$f(x) \geqslant f(x_0). \tag{7.1}$$

由于存在导数 $f'(x_0)$, 所以两个单侧导数存在且相等, 即有

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \tag{7.2}$$

从命题 7.1.1 之 (2) 和它对于 $f'_-(x_0)$ 的平行结论, 就有

$$f'_+(x_0) \geqslant 0,\ f'_-(x_0) \leqslant 0.$$

与 (7.2) 合并, 就得到 $f'(x_0) = 0$. □

证 2 利用有限增量公式 (6.1), 可以写出

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0)\,(x \to x_0) \\ &= [f'(x_0) + o(1)](x - x_0)\,(x \to x_0). \end{aligned}$$

用反证法. 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 x 与 x_0 充分接近时, $[f'(x_0) + o(1)]$ 与 $f'(x_0)$ 同号, 因此当变量 x 经过 x_0 时, $f(x) - f(x_0)$ 变号. 这与 x_0 为极值点矛盾. □

注 1 以上两个证明方法都很重要. 第一个证明的主要工具 (即命题 7.1.1) 还会出现在下面的命题 7.1.6 (Darboux 定理) 的证明中. 第二个证明的方法可用于处理更为一般的极值条件 (见命题 8.3.1).

注 2 由 Fermat 定理知道, 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则只有两种情况: (1) $f(x)$ 在点 x_0 处不可导; (2) $f'(x_0)$ 存在且等于零. 因此在寻找函数 f 的极值点时, 将 f 的不可导点和导数为零的点统称为 "极值可疑点". 当然这只是 "可疑", 因为容易举例说明条件 $f'(x_0) = 0$ 成立时, 函数 $f(x)$ 并不一定在 x_0 达到极值.

注 3 若 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 为驻点 (stationary point), 或平稳点. 这些名字的意思是说在这种点的附近, 因变量 $f(x)$ 的值几乎不变. 确切地说, 从有限增量公式 (6.1) 和条件 $f'(x_0) = 0$ 就可得出

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0).$$

即当 $\Delta x \to 0$ 时, Δy 是 Δx 的高阶无穷小. 不妨看一个具体例子来理解这是什么意思. 设 $y = x^3 + 1$, 则 $x_0 = 0$ 是驻点, $y(0) = 1$. 当 $x = 0.1$ 时, $y = 1.001$, 而当 $x = 0.01$ 时, 则 $y = 1.000\,001$.

第二个基本定理是 Rolle 定理, 也可称为 Rolle 中值定理.

命题 7.1.3 (Rolle 定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 若 f 是区间 $[a,b]$ 上的常值函数, 则在 (a,b) 的每一点上有 $f'(x) = 0$. 因此可以在 (a,b) 中任取一点作为 ξ.

否则, 由有限闭区间上连续函数的值域定理知, f 在 $[a,b]$ 上取到自己的最大值 M 和最小值 m, 且有 $m < M$. 由于有条件 $f(a) = f(b)$, 因此在 m 和 M 中,

至少有一个与函数在端点的值不同. 这就是说, 至少有一个最值是在 (a,b) 中取到的. 设这个最值点为 $\xi \in (a,b)$. 由于在区间的内点处取到的最值也就是极值, 而函数 f 又在 (a,b) 上可微, 因此可以用 Fermat 定理, 知道 $f'(\xi)=0$. □

注 1 我们看到, Fermat 定理的证明只需要很少的函数极限知识, 但是在 Rolle 定理的证明中则需要用连续函数的一个基本定理——最值定理. 回忆这个基本定理的证明方法, 以及它所涉及的许多知识, 可以知道 Rolle 定理看似容易, 实际上是前面许多内容的结晶. 而这还是刚刚开始. 下面的其他许多结果都是直接或间接地建筑在 Rolle 定理的基础之上的.

注 2 在 Rolle 定理的三个条件中任意去掉一个或几个, 定理的结论就不再成立. 这些训练对于理解 Rolle 定理很有必要, 在一般教科书中也都有, 这里不再重复.

注 3 Rolle 定理的上述证明即是一般教科书均采用的经典证明. 它以闭区间上连续函数的最值定理和 Fermat 定理为主要工具. 但是实际上 Rolle 定理和这两个定理并无必然联系. 将这一点再延伸一步就可以说, 本章从 Rolle 定理开始的全部内容都无须用 Fermat 定理就可以建立起来. 支持上述观点的根据就是 Rolle 定理的新证明. 其中所用的工具是连续函数的零点存在定理和闭区间套定理 (见 *美国数学月刊*, 86 卷 (1979), 484–486 页). 此外还有用覆盖定理和 Dedekind 定理证明 Rolle 定理的工作 (参见 [56]).

证 2 (**Rolle 定理的 Samuleson 证明**) 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{b-a}{2}\right).$$

则可以从条件 $f(a)=f(b)$ 得出

$$F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right), \text{ 和 } F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)=-F(a).$$

在区间 $[a,\frac{1}{2}(a+b)]$ 上对函数 F 用零点存在定理, 知道存在 $a_1\in[a,\frac{1}{2}(a+b)]$, 使得 $F(a_1)=0$. 记 $b_1=a_1+\frac{1}{2}(b-a)$, 则就有 (参见图 7.2)

$$f(a_1)=f(b_1),\ [a_1,b_1]\subset[a,b],\ b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a).$$

将以上做法继续下去, 得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 它满足要求:

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a),\ f(a_n)=f(b_n),\ n\in\mathbf{N}_+.$$

应用闭区间套定理, 存在唯一的点 ξ, 它属于每个闭区间 $[a_n,b_n]$, 也就是说有不等式

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n\ \forall n\in\mathbf{N}_+, \tag{7.3}$$

而且有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi. \tag{7.4}$$

这里需要补充一点, 即总可以使得 $\xi \in (a,b)$. 为此只要使得 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 不是常值数列就可以了. 实际上, 若有 $a = a_1 = a_2$, 则

$$f(a) = f(a_1) = f(a_2) = f(b_1) = f(b_2),$$

可用 $[b_2, b_1]$ 代替 $[a_2, b_2]$ 进行下去. 同样可以避免 $\{b_n\}$ 为常值数列.

由于 f 在点 $\xi \in (a,b)$ 可导, 因此就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(\xi). \tag{7.5}$$

为此只要写出有限增量公式

$$f(b_n) = f(\xi) + f'(\xi)(b_n - \xi) + o(b_n - \xi)\,(b_n \to \xi),$$
$$f(a_n) = f(\xi) + f'(\xi)(a_n - \xi) + o(a_n - \xi)\,(a_n \to \xi),$$

代入 (7.5) 左边的分子, 并利用 (7.3) 和 (7.4) 即可.

由于 $f(a_n) = f(b_n)\ \forall n \in \mathbf{N}_+$, 因此从 (7.5) 可见 $f'(\xi) = 0$. □

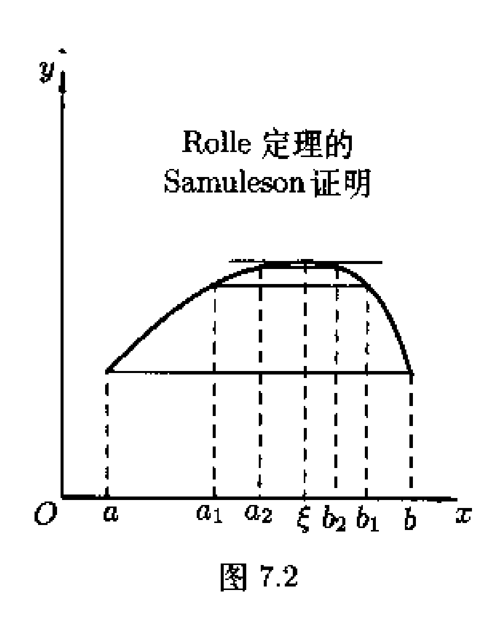


图 7.2

注 以上证明的基本思想有两点. (1) 第一步是用 a_1, b_1 代替原来的区间端点 a 和 b, 一方面保持了在两个点上的函数值相等, 另一方面则使两点之间的距离缩小了一半. (关于这一步可以参考第 5 章第一组参考题 2 的内容.) 以下就是不断重复, 用闭区间套定理得到唯一的点 ξ. (2) 利用极限 (7.5), 就保证得到 $f'(\xi) = 0$. 在图 7.2 中我们显示了构造闭区间套过程的开始几步, 即有 $f(a_1) = f(b_1)$, $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$, $f(a_2) = f(b_2)$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$. 在图 7.2 上似乎最后得到的点 ξ 是 f 的极值点. 但实际上可以举出例子, 使得在 Samuleson 证明中得到的 ξ 可以不是极值点 (作为思考题). 因此这个证明与前面的经典证明确实是完全不同的.

将 Rolle 定理中的条件 $f(a) = f(b)$ 去掉后加以推广, 就得到下面的 Lagrange 中值定理. 虽然可以说 Rolle 定理更为基本, 但总的来说 Lagrange 中值定理的用处要大得多, 因为它解决了函数研究中的一个基本问题——如何将自变量从

a 到 b 时所引起的因变量的增量与导数联系起来. 从 Lagrange 中值定理的内容来说, 也已经包含了 Rolle 定理为其特例. 以下采用与多数教科书中的经典证明不同的面积证明方法.

命题 7.1.4 (Lagrange 中值定理的面积证明) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

分析 先在图 7.3 中的 f 的图像上任取一点 $(x, f(x))$, 然后将它同点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 连接成一个三角形 (图中阴影区). 记它的面积为 $\Delta(x)$. 如果让这个三角形的顶点 $(x, f(x))$ 平行它的对边移动 (见图 7.3 经过该点的一条直线), 则三角形面积不变. 这条对边就是连接 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的直线段. 由此可见, 如果 ξ 是函数 $\Delta(x)$ 的驻点 (见 Fermat 定理证明后的注解 3), 则 f 的图像在点 $(\xi, f(\xi))$ 的切线就可能同这条直线段平行. 而这就是定理中对点 ξ 的要求. 根据这个几何分析就可以写出以下证明.

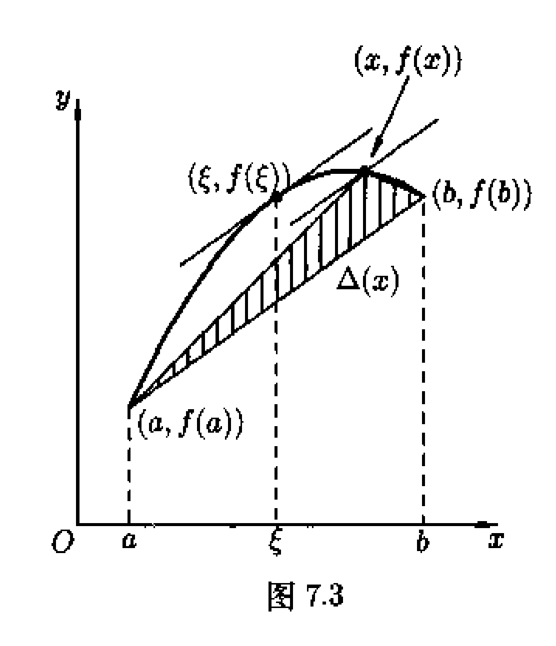


图 7.3

证 用行列式构造辅助函数:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & x-a \\ f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

(实际上这个 $\Delta(x)$ 的值等于图 7.3 中的三角形面积的两倍.) 利用 $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, 从 Rolle 定理知道有 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\Delta'(\xi) = 0$. 写出

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ f(a) & f(b) & f'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & 1 \\ f(b)-f(a) & f'(x) \end{vmatrix},$$

就可以从 $\Delta'(\xi) = 0$ 直接得到所要求证的结论. □

注 1 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理都有清晰的几何意义. 在图 7.3 中作出了曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\xi, f(\xi))$ 的切线, 它与连接点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的直

线段平行. Lagrange 中值定理的经典证明就是从这个几何意义出发, 将 f 的图像 "减去" 上述直线段来构造辅助函数. 由于一般教科书中均用这个证明, 本书不再重复. 上面的面积证明也是以几何背景为出发点的, 同时还利用了驻点所具有的特性. 又由于三角形面积可以用行列式表示, 从而证明过程带有更多的代数色彩. 这种证明方法还可以用于证明下面的 Cauchy 中值定理 (留作**思考题**).

应当看到, 几何作图虽然很有用, 但每张图都有局限性. 例如, 图 7.2 和 7.3 似乎提示我们中值 ξ 是唯一的. 实际上不一定如此. 中值可以有多个, 甚至无穷多个. 此外, 今后所遇到的许多问题并不一定都有几何背景. 即使确实有几何背景, 也不一定明显. 因此我们在下面将介绍构造辅助函数的其他方法, 它在许多问题中更实用一些.

注 2 也可以从物理上来理解这两个定理的意义. 例如, 设自变量 x 为时间, 因变量 y 是质点作直线运动时从某点起算的路程. 将 a 和 b 作为时间的起点和终点. 则 Rolle 定理表明, 若质点在起点和终点的位置相同, 则一定有瞬时速度为零的时刻. 这个时刻在 Rolle 定理的 (第一个) 证明中就是质点运动转向的时刻. 同样, Lagrange 中值定理的运动学意义也很清楚. 它表明一定存在一个时刻 ξ, 使得在该时刻的瞬时速度恰好是质点运动 (从时刻 a 到 b) 的平均速度.

注 3 Lagrange 中值定理有下列各种形式, 有时也称为**有限增量公式**:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a),\ a < \xi < b. \tag{7.7}$$

$$f(b) = f(a) + f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ 0 < \theta < 1. \tag{7.8}$$

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x. \tag{7.9}$$

将它们与上一章中的有限增量公式 (6.1) 或 (6.3) 作比较, 就可以看出这里已经前进了一大步. 从今以后, 我们有了与过去完全不同的有力工具, 在本章以及今后所能解决的许多问题都是过去的 "原始" 工具所不能对付的.

注 4 Lagrange 中值定理将函数的增量与函数在一个点上的导数值联系起来, 这就为用微分学研究函数提供了基础. 希望读者从今后的大量实例中体会引进导数 (即变化率) 的重要性.

本节的最后一个定理是

命题 7.1.5 (Cauchy 中值定理) 设函数 f, g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且满足条件

$$g(b) - g(a) \neq 0,\ \text{和}\ f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b),$$

则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 引进记号

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

我们的目的是要证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0. \tag{7.10}$$

这里要说明, 如有 $g'(\xi) = 0$, 则由上式可见也有 $f'(\xi) = 0$, 这与条件 $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ 相矛盾. 因此有了 (7.10) 之后, 就一定有 $g'(\xi) \neq 0$, 从而可以由它推出定理中所要的等式.

由 (7.10) 出发试作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x).$$

然后计算

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)},$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)},$$

可见有 $F(a) = F(b)$. 然后对 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上应用 Rolle 定理, 就知道存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 这就是要证明的结果 (7.10). □

注 1 容易看出, 只要 $g(x) \equiv x$, 就从 Cauchy 中值定理得到 Lagrange 中值定理. 因此 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的一种推广. 由于它能同时处理两个函数, 因此在今后的许多问题中起重要作用.

注 2 与 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理一样, Cauchy 中值定理也有漂亮的几何意义. 为此可以先将定理中的自变量改记为 t, 然后用参数方程

$$x = g(t), y = f(t)$$

定义在平面上的一条曲线. 如图 7.4 所示, 曲线的两个端点是 $(g(a), f(a))$ 和 $(g(b), f(b))$. 定理中关于 f, g 在 $[a, b]$ 上连续和在 (a, b) 上可微的条

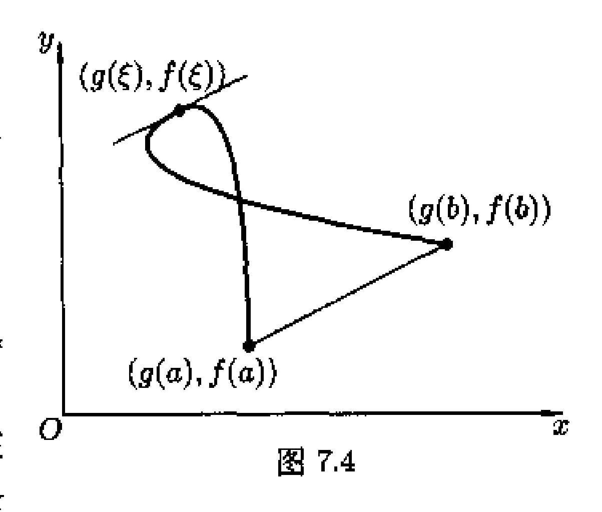


图 7.4

件表明, 这条曲线不但连续, 而且在 (除去端点之外的) 每一点都有切线. 实际上从参数方程的求导法则 (命题 6.2.1) 知道, 当 $g'(t) \neq 0$ 时, 切线的斜率

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

是有限数. 同样可以知道, 当 $g'(t) = 0$ 但 $f'(t) \neq 0$ 时, 切线将平行于 y 轴. 在 Cauchy 中值定理中的另一个条件 $g(b) - g(a) \neq 0$ 表明, 联结曲线两个端点的直线段不平行于 y 轴, 因此它的斜率

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

是有限数. 这样一来就可以看出, Cauchy 中值定理的结论就是说 (至少) 存在一个参数值 $\xi \in (a,b)$, 使得在曲线上的点 $(g(\xi), f(\xi))$ 的切线恰好与联结曲线两个端点 $(g(a), f(a))$ 和 $(g(b), f(b))$ 的直线段平行.

注 3 如果在 Cauchy 中值定理中的条件修改为 $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$, 则可以用 $g(x)$ 的反函数为工具, 从 Lagrange 中值定理推出 Cauchy 中值定理. 由于这个条件对于用参数方程给出的曲线增加了不必要的限制, 排除了例如图 7.4 中那样的曲线, 因此本书采用了较一般的条件. 从图中可以看出, 曲线上某些点处的切线可以与 y 轴平行, 曲线也可以有自交点, Cauchy 中值定理仍然成立.

注 4 如果在某点 $t_0 \in (a,b)$ 发生 $f'(t_0) = g'(t_0) = 0$, 则称点 $(f(t_0), g(t_0))$ 为曲线 $x = f(t), y = g(t)$ 的**奇点**. 奇点有几种不同的类型. 本书中将在第八章的例题 8.6.1 中介绍奇点中的 "**尖点**" (参见图 8.9).

7.1.2 导函数的两个定理

本小节证明关于导函数的两个基本定理. 第一个定理 (Darboux 定理) 是说区间上的导函数一定具有介值性质, 即使导函数不连续时也如此. 第二个定理称为单侧导数极限定理或导数极限定理, 由此可以推出导函数不会有第一类间断点. 这两个定理都表明导函数具有特殊性质. 因此并不是每个函数都可以是某个函数的导函数. 这两个定理在今后, 特别是在积分学中, 要起重要作用.

命题 7.1.6 (Darboux 定理) 设 f 在区间 I 上可微, 则 f' 具有介值性质.

首先说明定理的意义. 在第五章中我们已经有连续函数的介值定理 (即命题 5.2.2). 如果导函数 $f' \in C(I)$, 则已不必再讨论. 可见本命题的意义在于, 区间上的导函数不论是否连续, 一定有介值性质.

证 1 (这是多数教科书中采用的经典证明. 这里只作简述. 需要了解细节的读者可参考 [14] 一卷 116 小节.)

仿照 §5.2 节, 分两步进行.

(1) 为确定起见, 不妨设有 $a, b \in I, a < b$, 使得 $f'(a) < 0, f'(b) > 0$. 如图 7.5 所示, 应用命题 7.1.1 知道存在 $\delta > 0$, 使得成立 $a+\delta < b-\delta$, 且满足

$$f(a+\delta) < f(a),\ f(b-\delta) < f(b). \quad (7.11)$$

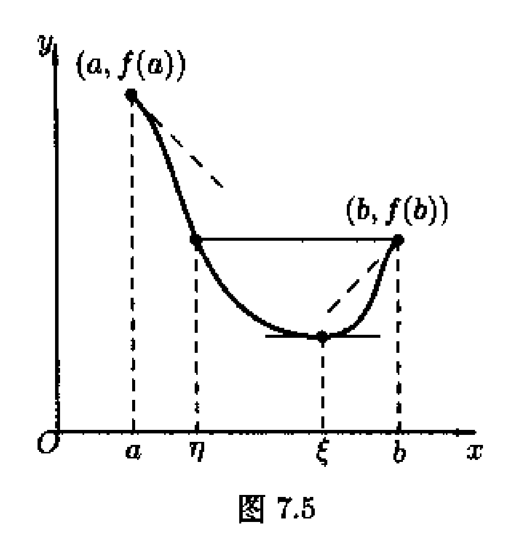


图 7.5

因此在 $[a, b]$ 上 f 的最小值点 ξ 一定是内点, 即极小值点. 应用 Fermat 定理就得到 $f'(\xi) = 0$.

(2) 对于 $f'(a) \neq f'(b)$ 的一般情况. 为确定起见, 不妨设有 $f'(a) < c < f'(b)$. 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - cx.$$

就可以将问题归结为 (1) 而知道 f' 能取到 c (细节从略). □

证 2 与 Rolle 定理的 Samuleson 证明类似, Darboux 定理的证明并不一定要用 Fermat 定理. 当然只需要修改证明 1 中的第 (1) 步. 若有 $f(a) = f(b)$, 则用 Rolle 定理即可. 否则, 不妨只看 $f(a) > f(b)$ 的情况 (如图 7.5). 由于有 $\delta > 0$, 使得 $f(b-\delta) < f(b) < f(a)$, 应用连续函数的介值定理, 就知道存在 $\eta \in (a, b-\delta)$, 满足 $f(\eta) = f(b)$. 在 $[\eta, b]$ 上再用 Rolle 定理即可 (见图 7.5). □

在上一章关于导数概念的讨论中, 我们曾强调过不要混淆函数在某点的单侧导数和这个函数的导函数在该点同侧的单侧极限. 这是两个不同的概念. 但是在那里还没有条件提及事情的另一方面, 即实际上这两者的值在很多情况中确实相等. 例题 6.1.6 就是如此. 这里的规律性就是下一个命题的内容. 根据这个命题, 今后对例题 6.1.6 类型的题可以有新的做法.

命题 7.1.7 (单侧导数极限定理) 设 f 在 (a, b) 可微, 又在点 a 右连续. 若导函数 $f'(x)$ 在点 a 存在右侧极限 $f'(a^+) = A$, 则 f 在点 a 也一定存在右侧导数 $f'_+(a)$, 且成立

$$f'_+(a) = f'(a^+) = A,$$

即 $f'(x)$ 在点 a 右连续. 此外, 这里的 A 除了为有限数外, 也可以为 $\pm\infty$.

证 令 $\Delta x = x - a, \Delta y = f(x) - f(a)$, 写出函数 f 在点 a 右侧的差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \text{ 其中 } \Delta x > 0.$$

在闭区间 $[a, a+\Delta x]$ 上应用 Lagrange 中值定理 (7.9), 有 $0<\theta<1$, 使得

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a+\theta\Delta x)\Delta x.$$

因此在 $\Delta x>0$ 时就有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a+\theta\Delta x).$$

现设有 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = A$, 其中 A 为有限数. 则对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $a<x<a+\delta$ 时, 成立不等式

$$|f'(x)-A|<\varepsilon.$$

若有 $0<\Delta x = x-a<\delta$, 则同时就有 $a<a+\theta\Delta x<x<a+\delta$. 因此当 $0<\Delta x<\delta$ 时, 也就有

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - A\right| = |f'(a+\theta\Delta x) - A| < \varepsilon.$$

这样就证明了函数 f 在点 a 存在右侧导数, 且等于 A. 对于 A 不是有限数的情况, 证明类似, 请读者补全. □

思考题 对于下列问题, 如果肯定, 请作出证明; 如果否定, 请举出例子.

1. 如果在命题中将函数 f 在点 a 右连续的条件去掉, 则结论是否还能成立?
2. 如果在命题中的 A 是无穷大量, 而且不具有确定的符号, 则结论是否还能成立?
3. 如果存在 $f'_+(a)=A$, 则是否存在 $f'(a^+)$? 为什么?

若不只是考虑单侧情况, 就可以得到

导数极限定理 设函数 f 在点 a 的某邻域 $O(a)$ 内连续, 在 $O(a)-\{a\}$ 内可导. 若导函数在 a 存在极限, 则函数 f 在 a 也可导, 而且 $f'(x)$ 在 a 连续.

注 由此可见, 若导函数在某点有极限, 则它就在该点连续. 这里甚至事先不要假定函数在该点可导. 回顾一般函数在某点存在极限时可以在该点不连续, 可见导函数的这个性质也是很独特的.

例题 7.1.1 设 f 在区间 (a,b) 上可微, 则导函数 $f'(x)$ 不会有第一类间断点.

证 用反证法. 设点 $c\in(a,b)$ 是 $f'(x)$ 的第一类间断点, 则导函数 f' 在点 c 存在有限的两个单侧极限

$$f'(c^-) \text{ 和 } f'(c^+).$$

又因存在 $f'(c)$, 所以 f 在 c 连续, 这包含了函数 f 在该点的两个单侧连续性.

应用命题 7.1.7 的结论, 知道成立两个等式:

$$f'(c^-) = f'_-(c) \quad \text{和} \quad f'(c^+) = f'_+(c).$$

由于 f 在 c 可导，因此有

$$f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c).$$

合并这些结果就得到

$$f'(c^-) = f'(c) = f'(c^+).$$

这恰恰表明导函数 $f'(x)$ 在点 c 连续. 引出矛盾. □

注 在区间上的导函数可以有第二类间断点. 如例题 6.1.5.

7.1.3 例题

由于本章的以下内容和下一章的大多数内容都可以说是中值定理的应用，因此例题极多，举不胜举. 凡能列入其他章节中的例题均不放在这一小节.

从 Rolle 定理知道，可微函数的两个零点之间一定有导函数的零点. 以下举一个这方面的例题. 初学者需要通过习题来熟悉这种基本方法.

例题 7.1.2 设 $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$，证明：方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

在区间 $(0,1)$ 中至少有一个根.

证 构造辅助函数

$$F(x) = \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \cdots + a_nx.$$

则可见 $F(0) = F(1) = 0$. 对 F 在区间 $[0,1]$ 上用 Rolle 定理，就知道 $F'(x) = f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 中有零点. □

例题 7.1.3 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a) = f(b) = 0$. 证明：对每个 $x \in (a,b)$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得成立

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

证 1 固定 $x \in (a,b)$，令 $\lambda = \dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$. 于是只要证明存在 $\xi \in (a,b)$，使成立 $f''(\xi) = \lambda$. 构造在 $[a,b]$ 上的辅助函数

$$F(t) = f(t) - \frac{\lambda}{2}(t-a)(t-b).$$

由条件 $f(a) = f(b) = 0$ 得到 $F(a) = F(b) = 0$. 从 λ 的定义还可得到 $F(x) = 0$. 在区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上分别对 F 用 Rolle 定理得到两个点 η_1 和 η_2，满足条件

$$a < \eta_1 < x < \eta_2 < b \text{ 和 } F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0.$$

然后再在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对 F' 用 Rolle 定理, 知道有 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$, 满足要求 $F''(\xi)=0$. 这就是 $f''(\xi)=\lambda$. □

证 2 也可以用 Cauchy 中值定理来证明. 将要证明的等式改写为

$$f''(\xi)=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}. \tag{7.12}$$

记区间 $[a,b]$ 的中点为 $c=\dfrac{1}{2}(a+b)$. 若 $f'(c)\neq 0$, 则 (7.12) 右边的分子和分母的导数不会同时为 0, 因此可利用条件 $f(a)=f(b)=0$ 在子区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上分别用 Cauchy 中值定理得到

$$\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{f'(\eta_1)}{\eta_1-c}=\frac{f'(\eta_2)}{\eta_2-c}=\frac{f'(\eta_1)-f'(\eta_2)}{\eta_1-\eta_2},$$

其中 η_1 和 η_2 满足要求 $a<\eta_1<x<\eta_2<b$. 最后再用Lagrange 中值定理, 得到 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$, 使 (7.12) 成立.

若有 $f'(c)=0$, 则对于每个 $x\in(a,b)$, 在子区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 中至少有一个子区间上仍可用 Cauchy 中值定理并计算如下:

$$\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{f'(\eta)}{\eta-c}=\frac{f'(\eta)-f'(c)}{\eta-c}=f''(\xi).\quad \square$$

注 以上两个方法可以解决许多类似的问题. 实际上如果仔细分析的话, 容易发现这两个方法并无多大差别, 只不过在写法上略有不同而已. 其中第一个方法可以称为**待定常数法**, 是作辅助函数的一种很有用的方法.

在某些情况下, 我们有可能对中值定理中的中值 ξ 有进一步的了解.

例题 7.1.4 设函数 f 在点 a 处二阶可导, 且 $f''(a)\neq 0$, 则在 h 充分小时, 成立 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$, 而且其中的 θ 具有性质 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=1/2$.

证 由于存在 $f''(a)$, 因此至少在 a 的一个邻域中 f 可微. 当 h 充分小时, 根据 $h>0$ 或 $h<0$ 可在区间 $[a,a+h]$ 或 $[a+h,a]$ 上用 Lagrange 中值定理, 得到

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h, \tag{7.13}$$

其中 $0<\theta<1$.

考虑分式

$$I=\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}. \tag{7.14}$$

若令 $F(x)=f(a+x)-f(a)-f'(a)x$, $G(x)=x^2$, 则上式的分子为 $F(h)-F(0)$, 分母为 $G(h)-G(0)$, 用 Cauchy 中值定理, 存在 $\eta\in(0,h)$, 使得

$$I=\frac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}.$$

另一方面, 将 (7.13) 用于 (7.14) 的分子, 又有

$$I = \frac{f'(a+\theta h)h - f'(a)h}{h^2} = \frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{h}.$$

等置以上两个表达式, 并写成

$$\theta \cdot \left(\frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{\theta h} \right) = \frac{f'(a+\eta) - f'(a)}{2\eta}.$$

由于 $0 < \theta < 1$, η 在 a 和 $a+h$ 之间, 而且有条件 $f''(a) \neq 0$, 因此在上式两边令 $h \to 0$, 就可以得到 $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 1/2$. □

从今后的一元函数积分学的角度来看, 下一个例题无疑是重要的.

例题 7.1.5 若 I 为区间, $f \in C(I)$, 且在区间 I 中的所有内点处的导数均为 0, 证明: f 为 I 上的常值函数.

证 1 任取 $a, b \in I$, 且设 $a < b$. 则可以在闭区间 $[a, b]$ 上对 f 用 Lagrange 中值定理, 知道存在 $\xi \in (a, b)\,(\subset I)$, 使得

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b).$$

由于 $f'(\xi) = 0$, 就有 $f(a) = f(b)$. 这样就证明了函数 f 在区间 I 中的任意两个点上的值相等, 因此 f 是区间 I 上的常值函数. □

注 应当指出, 不用 Lagrange 中值定理也可以证明上述结论 (例如见 [49]). 这就是下面的第二个证明, 其中的方法是 Lebesgue 方法 (见例题 3.5.2, 3.7.1 的证 6 和 5.2.3).

证 2 任取 $a, b \in I$, 且设 $a < b$. 只要证明 f 在 $[a, b]$ 上为常值函数即可.

对给定的 $\varepsilon > 0$, 从条件

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = 0,$$

可见存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时, 成立

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \varepsilon.$$

在不等式两边乘以 $(x-a)\,(>0)$, 可以得到

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|. \tag{7.15}$$

这里将不等号从 “$<$” 改为 “$\leqslant$”, 可以使得 (7.15) 在 $x = a$ 时也成立. 此外, 由函数 f 的连续性可以知道, (7.15) 在 $x = a+\delta$ 时也成立. 于是, 就得到在 $a \leqslant x \leqslant a+\delta$ 时成立的不等式 (7.15). 它也可改写为

$$f(a) - \varepsilon(x-a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + \varepsilon(x-a). \tag{7.16}$$

从几何上看, 在 $[a,a+\delta]$ 上 $y=f(x)$ 被夹在两条直线 $y=f(a)\pm\varepsilon(x-a)$ 之间.

以下用 Lebesgue 方法证明不等式 (7.15) (即 (7.16)) 在区间 $[a,b]$ 上成立.

定义数集

$$S=\{t\in[a,b]\mid |f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon|x-a|\ \forall x\in[a,t]\}.$$

已知有 $a+\delta\in S$, 因此 S 是非空有上界的数集. 根据确界存在定理, 有

$$\beta=\sup S.$$

由 S 的定义和 β 为 S 的最小上界, 可知这时有 $[a,\beta)\subset S$ (请读者补充). 在不等式 (7.15) 中令 $x\to\beta^-$, 利用 f 在 β 的连续性, 可见 $\beta\in S$.

还要证明 $\beta=b$. 实际上, 如果 $\beta<b$, 则从 $f'_+(\beta)=0$, 可知存在 $\eta>0$, 使得当 $\beta\leqslant x\leqslant\beta+\eta<b$ 时, 有

$$|f(x)-f(\beta)|\leqslant\varepsilon|x-\beta|.$$

因此当 $\beta\leqslant x\leqslant\beta+\eta$ 时就有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f(\beta)|+|f(\beta)-f(a)|\leqslant\varepsilon(|x-\beta|+|\beta-a|)=\varepsilon|x-a|.$$

这就推出 $\beta+\eta\in S$, 而与 β 为 S 的上界相矛盾.

于是我们已经证明对于区间 $[a,b]$ 上的每一个 x, 不等式 (7.15) 成立. 最后, 利用 $\varepsilon>0$ 的任意性, 就得到 $f(x)\equiv f(a)$. 因此 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数. 由于 a,b 是区间 I 中的任意两点, 因此 f 是 I 上的常值函数. □

例题 7.1.6 (不定积分的基本定理) 若 I 为区间, $f,g\in C(I)$, 且最多除有限点外已知有 $f'(x)=g'(x)$, 则存在常数 C, 使得在区间 I 上成立 $f(x)=g(x)+C$, 这就是说 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的差是区间 I 上的一个常值函数.

证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x),$$

并将区间按所指出的有限个例外点分成有限段子区间, 然后对每一子区间上的函数 F 分别用例题 7.1.5 中的结论, 知道 F 在每一子区间上为常数. 最后从 $F\in C(I)$ 推出函数 $F(x)$ 在整个区间 I 上为常值函数. □

例题 7.1.7 设 I 为区间, $f\in C(I)$, 且在 I 中的所有内点处可微. 又设存在常数 $L>0$, 使得对 I 的所有内点 x 处成立 $|f'(x)|\leqslant L$, 则 f 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件.

证 任取 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$. 在区间 $[x_1,x_2]$ 上对 f 用 Lagrange 中值定理, 就有 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|\leqslant L|x_1-x_2|.\quad\square$$

注 在 5.4.5 小节的题 1 表明满足 Lipschitz 条件的函数是一致连续函数. 因此可知, 导函数有界的函数具有良好的性质.

例题 7.1.8 设 $f \in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 上可微, 并且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 又设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 的 n 个正数. 证明: 在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同的数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, 使得

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=1. \tag{7.17}$$

证 由介值定理知可以在 $(0,1)$ 中插入 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$, 使得

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1,$$

同时满足

$$f(x_1)=k_1, f(x_2)=k_1+k_2,\cdots,f(x_{n-1})=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}.$$

在区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上用 Lagrange 中值定理, 有 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, 使得

$$k_i=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(t_i)(x_i-x_{i-1}), i=1,2,\cdots,n.$$

这样就有

$$\frac{k_1}{f'(t_1)}+\frac{k_2}{f'(t_2)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(t_n)}=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=1. \quad \square$$

注 本题的条件和求证的结论有什么意义? 若一开始就从运动学的角度来观察本题, 则就很容易理解, 而且可以很自然地想出证明的思路. 实际上, 如在 Lagrange 中值定理后的注解 2 中所说, 将 $y=f(x)$ 看成是质点作直线运动时的路程与时间的关系, 则在等式 (7.17) 中左边的每一项可以看成是 k_i 除以 t_i 时刻的瞬时速度. 因此, 若将 k_i 看成是一段路程的长度, 则从 Lagrange 中值定理的运动学意义, 适当选择 t_i 就可以使得这样的商等于运动所花的时间. 由于 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$, 又有 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$, 因此就可将全路程按长度 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 分段, 求出相应的时间 $x_1,\cdots,x_{n-1}$, 然后用 Lagrange 中值定理即可. 这就是上述证明背后的思想. 当然也可从几何角度来考虑本题的解法.

7.1.4 练习题

1. 用 Rolle 定理解决以下问题 (在方程中出现的系数均为实数):

   (1) 证明: 方程 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的不同实根不多于 3 个;

   (2) 证明: 方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根;

   (3) 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 有 $n+1$个 (不同) 实根, 证明: $f(x)\equiv 0$;

   (4) 若 $2a^2\leqslant 5b$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 不可能有 5 个不同的实根;

(5) 证明: Legendre 多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同实根;

(6) 证明: Laguerre 多项式 $L_n(x) = \mathrm{e}^x(x^n\mathrm{e}^{-x})^{(n)}$ 有 n 个不同正根.

(这里需要用 Rolle 定理的一个推广, 见下面的题 6.)

2. 若 f 在 $[a,b]$ 上满足在 Rolle 定理中的条件, 且 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$. 证明: $f'(x)=0$ 在 (a,b) 中至少有两个根.

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $0<a<b$ 成立. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\cdot\xi f'(\xi).$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

(若应用 Cauchy 中值定理, 则要讨论其条件不满足的情况.)

5. 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 其中 $g(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$. 证明: 存在 $\xi>a$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(Rolle 定理在无限区间上的推广.)

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant x/(1+x^2)$. 证明: 存在 $\xi>0$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

8. 对于 (1) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, (2) $f(x)=1/x\ (x>0)$, 计算在公式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 中的 θ, 并求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta$.

(这些计算是检验例题 7.1.4 的结论. 此外 (1) 与第二组参考题 9 有关.)

9. 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时有 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac14\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac12$, 且具有性质

$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac14,\ \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac12.$$

10. 证明: 在区间上的导函数如果单调, 则一定连续.

11. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上可微. 证明: 若 $f(a)$ 是 f 的最大值, 则 $f'_+(a)\leqslant 0$; 若 $f(b)$ 是 f 的最大值, 则 $f'_-(b)\geqslant 0$.

12. 证明: 在 $|x| \leqslant 1/\sqrt{2}$ 中, 成立 $2\arcsin x \equiv \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

13. 设函数 f 在区间 I 上二阶可微, 且 $f''(x) \equiv 0$. 问: f 是什么函数?

14. 证明: 在有限开区间 (a,b) 上无界的可微函数的导数也一定无界.

15. 设 f 在 $(0,a)$ 上可微, $f(0^+) = +\infty$. 证明: $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的右侧无下界.

16. 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, $f(a)=f(b)$, 但 f 不是常值函数. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) > 0$.

17. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可微, 又知连接点 $A(0,f(0))$ 和 $B(1,f(1))$ 的直线段与曲线 $y=f(x)$ 交于点 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ, 使 $f''(\xi)=0$.

18. 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 且 $f'(x)$ 无零点. 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}.$$

19. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 证明: (1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\eta)=\eta$; (2) 对任何实数 λ, 存在 $\xi \in (0,\eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda(f(\xi)-\xi) = 1$.

20. 设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明: f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

§7.2 Taylor 定理

这一节包含两个 Taylor 公式 (也称为 Taylor 展开式), 即分别带有 Peano 余项和 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 统称为 Taylor 定理. 前者是上一章中的有限增量公式的推广, 而后者是 Lagrange 中值定理的推广.

Taylor 定理的内容和证明对初学者有一定的困难. 仅仅从两个公式的复杂形式看, 就有点使人望而生畏. 因此我们将对它们的内容和证明做一定的剖析. 实际上这里的根本问题就是怎样用多项式来逼近函数. 但是从方法上来说, 则只是上一节中已用过多次的方法的重复 (参见例题 7.1.3 的两个证明).

在以上内容的基础上, 本节还要介绍带 Cauchy 余项的 Taylor 公式, 在例题之后还将介绍 Euler 数和 Bernoulli 数, 以供读者参考.

7.2.1 基本定理

这里要解决的基本问题就是用多项式来逼近一个函数.

实际上, 如果局限于一次多项式, 即线性函数, 则在前面已经讨论过这个问题. 回顾第 6 章中的有限增量公式 (6.1), 可见它就是用线性函数 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来逼近 $f(x)$. 例题 6.1.3 则严格建立了这个函数在所有线性函数中在一定意义上所具有的最优性质.

命题 7.2.2 可看成是公式 (6.1) 的推广. 命题 7.2.5 则是例题 6.1.3 的推广.

为此先做一项准备工作, 即证明在下列意义上于某点 x_0 附近逼近一个函数 $f(x)$ 的多项式如果存在, 则一定是唯一的.

命题 7.2.1 (唯一性引理) 设 f 在 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中有定义, 且有

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots c_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0),$$

则其中的系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 是唯一确定的.

证 根据条件可以知道以下表达式右边的极限都是存在的. 又根据极限的唯一性定理, 可见所有这些系数是唯一确定的.

$$c_0 = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$c_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-c_0}{x-x_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-[c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]}{(x-x_0)^n}. \quad \square$$

下面的第一个 Taylor 公式, 即带有 Peano 余项的 Taylor 公式, 肯定了当函数 $f(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数时, 满足唯一性引理的条件的多项式是存在的, 同时还给出了系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 的计算公式.

命题 7.2.2 (**带 Peano 余项的 Taylor 公式**) 若函数 f 在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\,(x \to x_0).$$

证 首先要对于条件有准确的理解. 从函数 f 在点 x_0 有 n 阶导数可推出函数 f 在这个邻域中存在所有的 $k\ (<n)$ 阶导函数, 但是 $f^{(n)}(x)$ 只在点 x_0 存在.

引入多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (7.18)$$

和

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x). \quad (7.19)$$

今后称多项式 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor **多项式**, 称 $r_n(x)$ 为 (第 n 次) **余项**, 即用多项式 $p_n(x)$ 代替 $f(x)$ 所带来的误差项.

可以看出, 证明的目的只不过是要建立以下的极限关系:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0. \quad (7.20)$$

由上可见, 余项的可微性质与 f 完全相同. 直接验证以下等式 (具体计算从略),

$$p_n(x_0)=f(x_0),\, p_n'(x_0)=f'(x_0),\cdots,p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0); \quad (7.21)$$

就知道余项 $r_n(x)$ 满足条件

$$r_n(x_0)=0,\, r_n'(x_0)=0,\cdots,r^{(n)}(x_0)=0. \quad (7.22)$$

最后反复使用 Cauchy 中值定理, 就可以得到所要的结果:

$$\begin{aligned}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}&=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{r_n'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}\\&=\frac{r_n'(\xi_1)-r_n'(x_0)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}=\frac{r_n''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}}\\&\cdots\cdots\\&=\frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})-r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1}-x_0)}\to\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}=0\ (x\to x_0).\end{aligned}$$

这里依次利用了余项 $r_n(x)$ 所具有的性质 (7.22) 中的每一个等式. 在反复使用 Cauchy 中值定理时得到的 "中值" $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}$ 是在 x 与 x_0 之间的单调点列. 例如当 $x_0<x$ 时, 从上面的推导可以看出有

$$x_0<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x.$$

因此当 $x\to x_0$ 时也有 $\xi_{n-1}\to x_0$.

还要注意最后一步与前面不同. 由于只知道 $r_n(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数, 所以最后一步不能用中值定理, 而只能用定义, 也就是说, 导数 $r_n^{(n)}(x_0)$ 是 $r_n(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $r_n^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 的导数. □

注 1 称 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)\,(x \to x_0)$ 为 Peano (型) 余项. 容易看出当 $n=1$ 时带 Peano 余项的 Taylor 公式就是上一章中的有限增量公式 (6.1). 由于这样的公式并非普通的等式, 而是反映了极限性质的渐近等式, 因此带有 Peano 余项的 Taylor 公式在求极限时很有用处, 对余项可以提供无穷小量的阶的估计. 但是 Peano 余项并不能提供误差的定量估计. 带 Peano 余项的 Taylor 公式的这些特点与有限增量公式 (6.1) 完全相同. 因此可以将它称为局部 Taylor 公式.

注 2 带 Peano 余项的 Taylor 公式的证明方法很多, 例如, 用数学归纳法、中值定理和下一章的 L'Hospital 法则都可以给出证明.

现在给出第二个 Taylor 公式. 在其中的余项有确定的表达式. 这就为误差估计提供了理论依据. 当然, 其中也有不确定的因素, 即出现了在每个中值定理中都有的 "中值". 因此这个结果也可以称为 Taylor 中值定理. 读者可以看出, 在下面的公式中若 $n=0$, 则就是 Lagrange 中值定理. 如果将 Cauchy 中值定理看成是 Lagrange 中值定理在两个函数情况的推广, 则 Taylor 中值定理就是 Lagrange 中值定理在高阶导数情况的推广.

命题 7.2.3 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 若 f 在 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中 $n+1$ 阶可微, 则对每个 $x \in O(x_0), x \neq x_0$, 在 x_0 和 x 之间存在 ξ, 使得

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证 1 可以与带 Peano 余项的 Taylor 公式的上述证明几乎一样来做, 即反复使用 Cauchy 中值定理, 但在最后一次是用 Lagrange 中值定理. 原因是在这里的函数 $f(x)$ (因而 $r_n(x)$) 在邻域 $O(x_0)$ 中有 $n+1$ 阶导函数, 条件要强得多了. 证明的主要过程如下:

$$\begin{aligned}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\\ &= \frac{r_n'(\xi_1)-r_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{r_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\\ &\cdots\cdots\\ &= \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \qquad \square\end{aligned}$$

回顾例题 7.1.3 的两种不同方法, 可以知道用辅助函数方法也能成功. 实际上, 在那里已经分析过这两个方法, 它们在本质上是完全一样的. 下面就是用辅助函数方法证明第二个 Taylor 公式.

证 2 对给定的 $x \neq x_0$ 定义

$$\lambda = \frac{r_n(x)(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

于是只要证明在 x 和 x_0 之间存在 ξ, 使得

$$r_n^{(n+1)}(\xi) = \lambda$$

即可. 不妨只考虑 $x_0 < x$ 的情况. 现在固定 x, 在区间 $[x_0, x]$ 上构造辅助函数

$$F(t) = r_n(t) - \frac{\lambda}{(n+1)!}(t-x_0)^{n+1}, \ x_0 \leqslant t \leqslant x.$$

可见只要证明存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

从条件 (7.22) 和 λ 的定义知, 辅助函数 F 具有性质

$$F(x_0) = 0, F'(x_0) = 0, \cdots, F^{(n)}(x_0) = 0 \text{ 和 } F(x) = 0.$$

在区间 $[x_0, x]$ 上对 F 用 Rolle 定理, 有 $\xi_1 \in (x_0, x)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$. 然后由于 $F'(x_0) = 0$, 在区间 $[x_0, \xi_1]$ 上对 F' 用 Rolle 定理, 有 $\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$, 使得 $F''(\xi_2) = 0$. 这样进行下去, 在做了 n 次后, 就有

$$x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x,$$

以及 $F^{(n)}(\xi_n) = 0$. 最后再利用 $F^{(n)}(x_0) = 0$, 在区间 $[x_0, \xi_n]$ 上对 $F^{(n)}(x)$ 用 Rolle 定理, 就得到 $\xi \in (x_0, \xi_n) \subset (x_0, x)$, 使得 $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. 这样我们就完成了证明. □

注 在上述命题中我们要求 $x \neq x_0$. 实际上在 $x = x_0$ 时 Taylor 公式自然成立, 这时的中值 ξ 可以任取. 此外, 从证明可以看出, 并不要求 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在, 也就是说只要 f 在 $O(x_0)$ 中 n 阶可微, 又在 $O(x_0) - \{x_0\}$ 中存在 $f^{(n+1)}(x)$ 即可. 这对下一个命题也是如此.

以上介绍了余项的两种不同形式, 即 Peano 余项和 Lagrange 余项. 实际上还有很多不同的其他余项, 其中对今后较为有用的是 Cauchy 余项和积分型余项. 后者见 11.4.3 小节. 下面是 Cauchy 余项及其证明.

命题 7.2.4 (带 Cauchy 余项的 Taylor 公式) 若 f 在点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中 $n+1$ 阶可微, 则对每个 $x \in O(x_0), x \neq x_0$, 在 x_0 和 x 之间存在 η, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

其中

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0).$$

证 固定 x, 在余项

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$
$$= f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n]$$

的右边将 x_0 换为变量 $t \in [x_0, x]$, 定义函数

$$\Phi(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x - t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n].$$

可以看出有

$$\Phi(x_0) = r_n(x),\ \Phi(x) = 0.$$

通过直接计算可以得到

$$\Phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

在区间 $[x_0, x]$ 上对 $\Phi(t)$ 用 Lagrange 中值定理, 就有 $\eta \in (x, x_0)$, 使得

$$r_n(x) = \Phi(x_0) - \Phi(x) = \Phi'(\eta)(x_0 - x).$$

将 $\Phi'(\eta)$ 的表达式代入就得到所要求证的 Cauchy 余项. □

注 用这个方法也可以得到其他余项形式 (见 [14] 的第一卷 124 小节).

到此为止本小节已介绍了 Taylor 公式的主要理论. 我们看到, 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数, 则就有一个 n 次多项式 (7.18), 即 Taylor 多项式, 它与 $f(x)$ 的差 (即余项 (7.19)) 当 $x \to x_0$ 时是比 $(x - x_0)^n$ 更高阶的无穷小量. 命题 7.2.1 肯定了这样的多项式是唯一的, 命题 7.2.2 则解决了它的存在性. 命题 7.2.3 和 7.2.4 给出了余项的更为精确的表达式, 当然这时对 f 要有更多的条件.

可将例题 6.1.3 推广得到下列命题. 它确切地刻画了 Taylor 多项式在局部逼近方面的最优性质,

命题 7.2.5 (Taylor 多项式的逼近性质) 设函数 f 在点 x_0 存在 $f^{(n)}(x_0)$, $p_n(x)$ 是由公式 (7.18) 定义的 Taylor 多项式. 对于和 $p_n(x)$ 不相等的每一个不超过 n 次的多项式 $p(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立不等式

$$|f(x) - p_n(x)| < |f(x) - p(x)|.$$

证 先将给定的多项式 $p(x)$ 转换成用 $(x - x_0)$ 的方幂表示的升幂多项式:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n. \tag{7.23}$$

根据命题 7.2.2, 可以将 $p(x)$ 看成为那里的 $f(x)$, 然后用公式 (7.21) 直接求出 $a_i = p^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. (当然也可以用代数方法计算, 这里从略.)

将 (7.23) 与 Taylor 多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

进行比较. 如果 $a_0 \neq f(x_0)$, 则同例题 6.1.3 的情况 (1) 完全一样, 证明是容易的. 否则, 根据这两个多项式不相等的假设条件, 两者又均已表示为以 $(x - x_0)$ 为幂次的升幂多项式, 因此一定存在一个自然数 k, 满足 $0 < k \leqslant n$ 和

$$a_0 = f(x_0), \cdots, a_{k-1} = f^{(k-1)}(x_0), \text{ 但是 } a_k \neq f^{(k)}(x_0).$$

利用命题 7.2.2 (即带 Peano 余项的 Taylor 公式), 有

$$\begin{aligned} f(x) - p_n(x) &= o((x - x_0)^n) \ (x \to x_0), \\ f(x) - p(x) &= [f(x) - p_n(x)] + [p_n(x) - p(x)] \\ &= (f^{(k)}(x_0) - a_k))(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right) \ (x \to x_0). \end{aligned}$$

其中的项 $o\left((x - x_0)^k\right)$ 是对于在多项式 $[p_n(x) - p(x)]$ 中次数 $i > k$ 的所有 $(x - x_0)^i$ 项和余项 $f(x) - p_n(x)$ 之和的一个刻画.

于是有

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{f(x) - p(x)} = \frac{o\left((x - x_0)^n\right)}{(f^{(k)}(x_0) - a_k))(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right)} \ (x \to x_0).$$

由于 $f^{(k)}(x_0) \neq a_k$ 和 $k \leqslant n$, 可见

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{f(x) - p(x)} = o(1) \ (x \to x_0).$$

从而存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立

$$\left| \frac{f(x) - p_n(x)}{f(x) - p(x)} \right| < 1,$$

这就是所要求证的不等式. □

在图 7.6 中可以看到函数 e^x 以及它的 1 次到 4 次的 Taylor 多项式的图像. 其中粗黑曲线是 e^x 的图像. 又为清楚起见, 在每一个 Taylor 多项式的图像两端都用记号 $P_n(x)$ 作了标记. 这里的 $P_n(x)$ 是 e^x 的第 n 个 Taylor 多项式:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

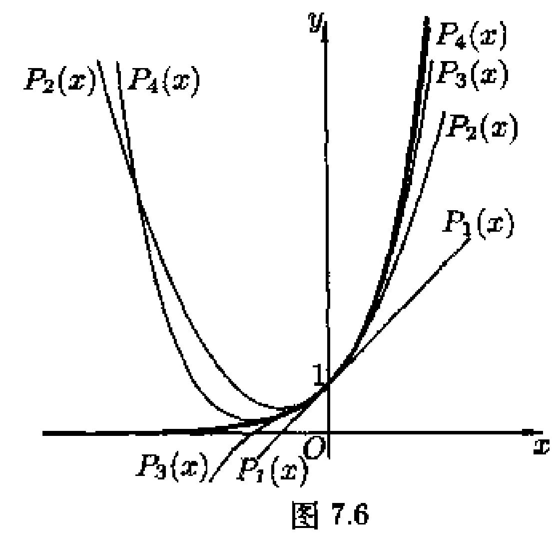


图 7.6

我们看到, 对于 $n=3,4$, Taylor 多项式在 $|x|$ 不很大时已提供了对 e^x 的较好的逼近. 但是当 $|x|$ 足够大时, 情况完全不是如此. 例如, 当 n 为奇数时 $P_n(x)$ 都有零点. 关于 e^x 的 Taylor 多项式的一般性结论可参看第八章的第二组参考题 4.

7.2.2 例题

当 Taylor 公式中的 $x_0=0$ 时, 由于历史原因也称为 Maclaurin 公式. 在各种微积分教科书中都要介绍几个基本初等函数的 Maclaurin 公式, 其中包括 $\sin x, \cos x, \arctan x, e^x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha\ (\alpha\neq 0)$ 等, 这里不再重复.

在求以上几个基本初等函数的 Maclaurin 公式时, 一般的方法是直接计算函数在 $x=0$ 点的 n 阶导数的通式, 这样就可以得到带 Peano 余项的 Maclaurin 公式. 为了得到带 Lagrange 余项的相应公式, 则需要得到 n 阶导函数的表达式, 这就困难得多了. 在上一章中关于高阶导数的不少训练与此有关.

在本小节介绍求 Taylor (或 Maclaurin) 公式的间接法. 这在很多求 Taylor公式的问题中有效, 且具有很大的灵活性. 实际上, $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 的 Maclaurin 公式也都可以用间接法得到. 但是间接法是以若干个已知的 Taylor 公式为基础的. 如果连基本的 Taylor 公式都不知道, 也就不可能用间接法.

在本小节中除了 Taylor 公式的计算外, 还将介绍 Taylor 公式的其他应用, 特别是不能归入下一章的一些问题.

在下面有关 Taylor (或 Maclaurin) 公式的计算题中, 如不另作说明, 则均指带 Peano 余项的公式.

例题 7.2.1 计算 $f(x)=\arcsin x$ 的 Maclaurin 公式直到 x^5 项.

解 1 对 f 求导, 并利用二项式展开公式, 就有

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5).$$

根据上一小节的唯一性引理和带 Peano 余项的 Taylor 公式, 可见上式就是 $f'(x)$ 的 Maclaurin 公式. 利用 Taylor 公式中的系数公式, 就可以从上式右边的已知系数反过来求出 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的值和各阶导数值:

$$1=f'(0), 0=f''(0), \frac{1}{2}=\frac{f'''(0)}{2}, 0=f^{(4)}(0), \frac{3}{8}=\frac{f^{(5)}(0)}{4!}, 0=f^{(6)}(0).$$

这样就求出所需要的前 6 阶导数:

$$f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=1, f^{(4)}(0)=0, f^{(5)}(0)=9, f^{(6)}(0)=0.$$

再利用 $f(0)=0$, 就得到所要的 Maclaurin 公式:

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+o(x^6)\,(x\to 0)\\ &= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)\,(x\to 0).\quad\square\end{aligned}$$

注 若将以上的解法发展一步, 就可以写出 $\arcsin x$ 的一般的 Maclaurin 公式而无须求出这个函数在 $x=0$ 处的任意阶导数值. 再往前一步, 我们可以提出求高阶导数的一种间接计算法. 从 $f(x)=\arcsin x$ 的导函数出发, 计算

$$\begin{aligned}f'(x) &= (1-x^2)^{-1/2}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-x^2)^k+o(x^{2k+1})\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o(x^{2k+1})\,(x\to 0),\end{aligned}$$

就可以对任意自然数 k 得到 $f^{(2k)}(0)=0$ 和

$$f^{(2k+1)}(0)=(2k)!\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}=[(2k-1)!!]^2.$$

这就是在例题 6.2.3 已经得到的结果.

请读者试用这种新方法计算 $\arctan x$ 和 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 公式和它们在 $x=0$ 处的任意阶导数值.

解 2 由于 $f(x)=\arcsin x$ 是奇函数, 又有 $f'(0)=1$, 因此它的 Maclaurin 公式的形式如下:

$$\arcsin x = x+ax^3+bx^5+o(x^6)\,(x\to 0).$$

这里只有两个系数 a 和 b 需要确定. 利用 $\arcsin x$ 是 $\sin x$ 的反函数, 又利用 $\sin x$ 的 Maclaurin 公式, 就有

$$\begin{aligned}x &= \sin(\arcsin x)\\ &= \arcsin x-\frac{1}{6}(\arcsin x)^3+\frac{1}{120}(\arcsin x)^5+o(x^6)\,(x\to 0)\\ &= (x+ax^3+bx^5)-\frac{1}{6}(x+ax^3)^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\,(x\to 0).\end{aligned}$$

比较两边同次幂项的系数, 就有方程

$$a-\frac{1}{6}=0, b-\frac{1}{6}\cdot 3a+\frac{1}{120}=0.$$

这样就可解出

$$a=\frac{1}{6}, b=\frac{3}{40}.\quad\square$$

例题 7.2.2 计算 $f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$ 的 Maclaurin 公式直到 x^5 项.

解 1 将根式内的表达式写成 $1+(1-\cos x)$, 并利用

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\,(x\to 0),$$

就可以计算如下:

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt[3]{1+(1-\cos x)}\\&=1+\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}+O((1-\cos x)^3)\,(x\to 0)\\&=1+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{72}\right)-\frac{x^4}{36}+o(x^5)\,(x\to 0)\\&=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\,(x\to 0).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 利用 f 为偶函数, 因此所要求的公式的形状已可确定为:

$$f(x)=1+ax^2+bx^4+o(x^5)\,(x\to 0).$$

为确定 a 和 b, 只要将上式代入

$$[f(x)]^3=2-\cos x=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\,(x\to 0),$$

就得到关于待定系数的方程

$$3a=\frac{1}{2},3b+3a^2=-\frac{1}{24}.$$

从中解出

$$a=\frac{1}{6},b=-\frac{1}{24}.\quad\square$$

例题 7.2.3 计算 $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 的 Maclaurin 公式直到 x^6 项. 这里 $f(x)$ 在 $x=0$ 的值用函数在该点的极限值 0 来定义.

解 从正弦函数的展开式开始, 有

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+o(x^8),$$

就有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+o(x^7).$$

记 $y=-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+o(x^7)$, 则 $y=O(x^2)\,(x\to 0)$. 然后有

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin x}{x}&=\ln(1+y)\\&=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+O(y^4)\\&=\left(-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}x^4-\frac{2}{3!5!}x^6\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{216}x^6\right)+o(x^7)\\&=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2\,835}x^6+o(x^7)\,(x\to 0).\end{aligned}$$ □

例题 7.2.4 设已知函数 (参考图 4.1):

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 无穷次可微, 计算 $f(x)$ 的 Maclaurin 公式直到 x^4 项.

解 在 $x\neq 0$ 时将函数 f 写为

$$f(x)=\exp(\ln f(x)),$$

然后写出

$$\ln f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\,(x\to 0).$$

将上式右边记为 $1+y$, 就有

$$f(x)=\mathrm{e}^{1+y}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}\right)+o(x^4)\,(x\to 0),$$

其中

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\,(x\to 0).$$

分别计算出

$$\begin{aligned}y^2&=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{13}{36}x^4+o(x^4),\\y^3&=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x^4+o(x^4),\\y^4&=\frac{1}{16}x^4+o(x^4),\end{aligned}$$

代入前面的表达式中, 最后得到

$$f(x)=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2\,447}{5\,760}x^4\right)+o(x^4)\,(x\to 0).$$ □

注 在上面两个例题中都没有验证函数在 $x_0=0$ 处存在任意阶导数. 这是在使用间接法时经常会遇到的问题. 实际上这里涉及到与幂级数 (或解析函数) 的四则运算和复合运算有关的一些理论问题, 在学幂级数之前作讨论是比较困难的. 因此在例题和练习题中我们将注意力集中在计算上, 而将有关的理论问题留待以后解决. 此外, 这里还从 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 公式出发除以 x, 得到函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (在 $x=0$ 处由极限定义) 的 Maclaurin 公式, 这里的理论根据可在下一章得到解决 (见例题 8.1.9 的第二个注解). (对此有兴趣的读者还可以参考 [69] 中对于这些问题的严格处理.)

例题 7.2.5 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且已知

$$M_0=\sup\{|f(x)| \mid x\in(0,+\infty)\}, \text{ 和 } M_2=\sup\{|f''(x)| \mid x\in(0,+\infty)\}$$

为有限数. 证明 $M_1=\sup\{|f'(x)| \mid x\in(0,+\infty)\}$ 也是有限数, 并满足不等式

$$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}.$$

证 写出

$$f(x+t)=f(t)+f'(x)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2,$$

其中 $x,t>0$, $\xi\in(x,x+t)$. 由此有估计

$$|tf'(x)|\leqslant|f(x+t)-f(x)-\frac{t^2}{2}f''(\xi)|\leqslant 2M_0+\frac{t^2}{2}M_2.$$

这样就得到

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{t}+\frac{1}{2}tM_2.$$

这对每个 $x\in(0,+\infty)$ 成立. 取上确界, 就有

$$M_1\leqslant\frac{2M_0}{t}+\frac{t}{2}M_2. \tag{7.24}$$

因此 M_1 为有限数. 由于这对每个 $t>0$ 成立, 为了得到最好的估计, 可以取 $t=2\sqrt{M_0/M_2}$, 使右边的和达到最小, 即有

$$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}. \quad \square$$

注 本题有许多推广和研究. 在后面的参考题中也收入了这方面的题. 比较详细的资料见 [30] 的 363–365 页.

例题 7.2.6 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

证 写出 $f(a),f(b)$ 在点 $\frac{a+b}{2}$ 的 Taylor 展开式:

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

然后将两式相加, 就有

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{8}(b-a)^2[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)].$$

对 f'' 用 Darboux 定理 (即例题 7.1.6), 即有 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)].\quad\square$$

注 本题的证明方法很多, 除了用 Taylor 公式为主要工具的上述证明外, 这里再简述两种证明:

1\. 令 $$\lambda=\frac{f(a)+f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\dfrac{(b-a)^2}{4}},$$

构造辅助函数

$$F(t)=f(t)+f(a)-2f\left(\frac{t+a}{2}\right)-\lambda\frac{(t-a)^2}{4},$$

以下与例题 7.1.3 相同.

2\. 作辅助函数

$$\varphi(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x),$$

然后考虑差 $\varphi(\frac{a+b}{2})-\varphi(a)$.

7.2.3 Euler 数与 Bernoulli 数

在初等函数的 Taylor 展开式中有几个例子, 如 $\sec x$ 和 $\tan x$, 一般难以求出通式. 原因在于其中出现了著名的 Euler 数和 Bernoulli 数.

例题 7.2.7 计算 $\sec x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 由于 $\sec x$ 是偶函数, 可以假定有

$$\sec x = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots + c_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0).$$

现在令

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}, \ n \in \mathbf{N}_+,$$

写出

$$\sec x = E_0 - \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0), \quad (7.25)$$

并将公式 (7.25) 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式一起代入恒等式 $\cos x \sec x \equiv 1$ 中, 就可以得到确定数列 $\{E_{2n}\}$ 的递推公式:

$$E_0 = 1, \ E_2 + E_0 = 1, \ E_4 + \frac{4!}{2!2!}E_2 + E_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$E_{2n} + \binom{2n}{2}E_{2n-2} + \binom{2n}{4}E_{2n-4} + \cdots + E_0 = 0.$$

从而可以得出

$$E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1\,385, E_{10} = -50\,521, \cdots.$$

例如, 这样就可以写出直到前 6 项系数的公式

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8\,064}x^8 + \frac{50\,521}{3\,628\,800}x^{10} + o(x^{11}) \ (x \to 0).$$

称 E_{2n} 为 Euler 数. 当 n 为偶数时, E_{2n} 为正奇数, 且除 E_0 外, 其个位数字都是 5; 当 n 为奇数时, E_{2n} 为负奇数, 其个位数字都是 1. □

注 1 又有

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = E_0 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{E_2n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ (x \to 0).$$

其中的函数 $\operatorname{sech} x$ 称为双曲正割.

注 2 令 $E_{2n} = (-1)^n\overline{E}_n$, 也有将 $\overline{E}_n$ 称为 Euler 数的.

Bernoulli 数是 James Bernoulli 研究前 n 个自然数的 p 次方幂之和

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

的计算公式时得到的 (其原文见 [35] 的 299–302 页). 对于 $p=1,2,3$ 的公式, 学生在中学里都已经知道. J. Bernoulli 的目的是要对一切自然数 p 求出一般的计算公式. 他发现

$$1^p+2^p+\cdots+n^p=\frac{1}{p+1}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{p}{2}An^{p-1}+\frac{p(p-1)(p-2)}{4!}Bn^{p-3}$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{6!}Cn^{p-5}+\cdots,$$

其中右边的项直写到 n 或 n^2 项为止. 公式中出现的常数

$$A=\frac{1}{6},B=-\frac{1}{30},C=\frac{1}{42},\cdots$$

就是 Bernoulli 数.

以下采用目前的标准方法来引入 Bernoulli 数. 考虑计算函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的 Maclaurin 展开式. 令

$$f(x)=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}x^n+o(x^n)\ (x\to 0),$$

并将它代入恒等式

$$f(x)\cdot\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=f(x)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n+1)!}+o(x^n)\right)\equiv 1$$

中, 就可以得到确定数列 $\{B_n\}$ 的递推公式:

$$B_0=1,\ \frac{1}{2!}B_0+B_1=0,\ \frac{1}{3!}B_0+\frac{1}{2!1!}B_1+\frac{1}{2!}B_2=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{0}B_0+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0.$$

从而可以得出

$$B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_4=-\frac{1}{30},B_6=\frac{1}{42},B_8=-\frac{1}{30},$$
$$B_{10}=\frac{5}{66},B_{12}=-\frac{691}{2\,730},B_{14}=\frac{7}{6},\cdots,$$

当 n 为大于 1 的奇数时 $B_n=0$.

注 令 $B_{2n}=(-1)^{n-1}\overline{B}_n\ (n\geqslant 1)$, 也有称 $\overline{B}_n$ 为 Bernoulli 数的. 注意所有 $\overline{B}_n>0$.

例题 7.2.8 计算 $x\cot x$ 的 Maclaurin 展开式, 在 $x=0$ 处的函数值补充定义为 1.

解 以下运算越出了实数的范围, 还用到了 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 其合理性将在复变函数论中得到解释.

$$\begin{aligned}x\cot x&=x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=ix\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}=ix+\frac{2ix}{e^{2ix}-1}\\&=ix+B_0+\frac{B_1}{1!}2ix+\frac{B_2}{2!}(2ix)^2+\cdots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n}+o(x^{2n})\\&=\mathrm{Re}\left\{ix+B_0+\frac{B_1}{1!}2ix+\frac{B_2}{2!}(2ix)^2+\cdots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n}+o(x^{2n})\right\}\\&=1-\frac{\overline{B}_1 2^2}{2!}x^2-\frac{\overline{B}_2 2^4}{4!}x^4+\cdots-\frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})\,(x\to0).\end{aligned}$$

写出其前 5 项的系数, 即有

$$x\cot x=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\frac{1}{4\,725}x^8+o(x^9)\,(x\to0).\quad\square$$

例题 7.2.9 计算函数 $\tan x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 利用恒等式 $\tan x=\cot x-2\cot 2x$, 当 $x=0$ 时将右边取其极限 0. 这样就有

$$\begin{aligned}\tan x&=\frac{x\cot x-2x\cot 2x}{x}\\&=\frac{\overline{B}_1(2^2-1)2^2}{2!}x+\frac{\overline{B}_2(2^4-1)2^4}{4!}x^3+\cdots\\&\quad+\frac{\overline{B}_n(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})\,(x\to0).\end{aligned}$$

写出其前 5 项的系数, 即有

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2\,835}x^9+o(x^{10})\,(x\to0).\quad\square$$

这样的例子还有很多, 例如在 $x\csc x$, $\ln\cos x$, $\ln(\sin x/x)$ 的 Maclaurin 公式中都出现 Bernoulli 数. 此外, Bernoulli 数还出现在以下无穷级数的求和公式中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{\overline{B}_k}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!},\tag{7.26}$$

其中 k 为自然数. 这个公式可以从例题 7.2.8 的结果得到 (见数学译林, 10 (1991), 348 页). 从第二章 2.3.2 小节的题 6 已经知道, 无穷级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

在 $p>1$ 时收敛. 公式 (7.26) 给出了当 $p=2k$ 为偶数时的求和公式. 它是 Euler 发现的.

当 $k=1$ 时就可从公式 (7.26) 得到数学分析中的一个重要结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

求这个级数和就是所谓的 Basel 问题. 在 Euler 之前没有人想到它的答案中会出现圆周率 π. 有兴趣的读者可以从 [12] 的第九章中了解与此有关的故事.

在积分学的积分近似计算和 Stirling 公式中我们还会遇到 Bernoulli 数 (见 11.3.2 和 11.4.2 小节).

7.2.4 练习题

1. 计算 $x\csc x$, $\ln\cos x$, $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 的 Maclaurin 公式.

2. 能否用 Taylor 公式作如下计算:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^2)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))}{x^2}=\frac{1}{2},$$

为什么?

3. 试对函数 $f(x)=(x+a)^n$ $(a\neq0)$ 和 $x_0=0$ 计算它的 Taylor 多项式, 从而得到二项式展开定理的一个新证明.

4. 设 f 在 x_0 存在 $f^{(n)}(x_0)$, 且有 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$, 证明: $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n-1})\ (x\to x_0)$.

5. 用间接法求函数 $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式, 要求写出直到 x^{13} 项的系数. 然后利用这个公式计算出函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的直到 13 阶的各阶导数值.

6. 计算 $\arcsin x$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

7. 计算 $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

8. 估计下列近似公式的绝对误差:

   (1) $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$, 当 $0\leqslant x\leqslant1$;

(2) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, 当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

(3) $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$, 当 $|x| \leqslant 0.1$;

(4) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

9. 若函数 f 在某点 x_0 的任意阶 Taylor 多项式均为 0, 是否可推出 $f(x) \equiv 0$? (参考例题 6.2.4 的结论.)

10. 设 f 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数, $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbf{N}_+$, 且存在常数 $C \geqslant 0$, 使得对所有 $n \in \mathbf{N}_+$ 和 $x \in [-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\,C^n$. 证明: $f(x) \equiv 0$.

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得成立

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

12. (1) 设 f 在 (a,b) 上可微. 试问对每个点 $t \in (a,b)$, 是否一定存在两个点 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(t)?$$

(2) 设 f 在 (a,b) 上可微, 且在某点 $\xi \in (a,b)$ 处有 $f''(\xi) > 0$. 证明: 存在两个点 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得成立

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

13. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且 $f(x) \geqslant 0, f''(x) \leqslant 0$, 证明: 在 $x \geqslant a$ 时 $f'(x) \geqslant 0$.

14. 设 f 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 阶可微, $f^{(n+1)}(0) \neq 0, n \in \mathbf{N}_+$, 在 $0 < |x| < 1$ 上有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,$$

证明: $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \dfrac{1}{n+1}$.

15. 证明: 在 $|x| \leqslant 1$ 时存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\arcsin x = \dfrac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$, 且有

$$\lim_{x\to 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

16. 设 f 在 $O_\delta(x_0)$ 中 n 可微, 且 $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 证明: 当 $0 < |h| < \delta$ 时, 成立 $f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0+\theta h), 0 < \theta < 1$, 且成立

$$\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

§7.3 对于教学的建议

7.3.1 学习要点

1. Fermat 定理看似简单, 但却是求函数的极值和最值问题的理论基础.
2. 中值定理使我们将函数在两个 (可以相距很远) 点上的函数值之差, 也就是函数的增量, 与函数在某点的导数值联系起来. 从上一章我们已经知道函数的导数是一个局部性的概念, 但通过中值定理, 就可以用导数研究函数在大范围上的性质. 用与不用中值定理是完全不一样的. 读者只要对比例题 7.1.5 的两个证明, 就可以明白这一点. 其中第二个证明的复杂恰好衬托出中值定理的有力.
3. Taylor 公式是一元微分学的顶峰. 公式表面上似乎复杂, 但它所面对的问题却是重要的实际问题. 这就是如何用多项式来逼近函数. 这里只需要加、减、乘三种运算. 实际上从中学开始就清楚, 除了多项式以及开平方等运算之外, 一般初等函数的计算都不可能直接手算, 而是一定要用某些工具, 如数学用表、计算器或计算机，才能实现. 所有函数计算, 在电脑中总是归结为多项式计算, 而 Taylor 公式就是这些计算的基础.
4. 两个带有不同余项形式的 Taylor 公式 (即命题 7.2.2 和 7.2.3), 分别是上一章的有限增量公式和本章的 Lagrange 中值定理的推广. 注意它们分别代表了在微分学中两种基本的思想方法. 前者注重于当 $x \to x_0$ 时余项作为无穷小量的阶的估计, 后者则要将余项用高阶导数表示出来 (尽管其中仍有不确定的中值).
5. 仅仅从所得到的结果就不难看出, 在多次应用中值定理的基础上所得到的 Taylor 公式大大扩展了我们对可微函数的把握和使用. 这两个公式当然有极其广泛的应用. 本章的训练只是为理解公式本身而安排的.
6. 在教材 [7] 的第一册第 230 页中作者有一段关于 Taylor 定理的评价, 写得很出色. 我们原封不动地引在下面:

   > “我们不想把话说得太绝对, 但至少可以说: 凡是用一元微分学中的定理、技巧能解决的问题，其中的大部分都可以用 Taylor 定理来解决. 掌握了 Taylor 定理之后, 回过头去看前面的那些理论, 似乎一切都在你的掌握之中, 使你有一种 ‘会当凌绝顶, 一览众山小’的意境. 从这个意义上说 ‘Taylor 定理是一元微分学的顶峰’, 并不过分.”

7. **对习题课的建议** 中值定理的基础是 Fermat 定理与 Rolle 定理, 包括它们的证明思想. 这在 §7.1 节中已作了比较多的说明. 如何根据情况使用这些

有力的工具, 例如什么时候用 Lagrange 余项, 什么时候用 Peano 余项等等, 这应该作为习题课训练的一个重点.

应用中值定理的另一个难点是作适当的辅助函数, 这也能体现一个学生的数学综合能力. 第一组参考题 4 是个很有启发性的题, 讲解此题后可进一步介绍下一个题:

设 f 在 $[a,b]$上存在 $n+1$ 阶导数，且满足

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $f^{(0)}(a)=f(a)$, $f^{(0)}(b)=f(b)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$.

证 (1) 当 $n=0$ 时，令 $h(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 则

$$h'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)].$$

由于 $h(a)=h(b)=0$, 故由 Rolle 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $h'(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0$. 由于 $\mathrm{e}^{-\xi}>0$, 从而 $f(\xi)=f'(\xi)$.

(2) 当 $n>0$ 时，令 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)$, 则 $g(a)=g(b)$, 且

$$g(x)-g'(x)=f(x)-f^{(n+1)}(x).$$

由 (1), 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g(\xi)=g'(\xi)$. 即 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$. □

Taylor 展式可以解决很多数学问题, 技巧性较强. 选择什么余项, 在哪一点展开, 是展开一点的值, 还是展开多点的值进行复合都很有讲究. 但在初学阶段的习题课还是要贯彻 "少而精"的原则. 对一般的学生而言, 能用合适的余项展开 Taylor 公式就已达到基本要求. 这部分内容也是考研的复习重点. 我们在两组参考题中为此提供了必要的素材.

7.3.2 参考题

第一组参考题

1. 设有 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足
$$a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0,$$
证明: 方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中至少有一个根.

2. 设 $c\neq 0$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+c=0$ 至少有两个根不是实根,

3. 设 $a\neq 0$, 证明: 方程 $x^{2n}+a^{2n}=(x+a)^{2n}$ 只有一个实根 $x=0$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且满足条件

$$f(a)f(b)>0,\ f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0,$$

证明: 对每个实数 k, 在 (a,b) 内存在点 ξ, 使成立 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mathrm{e}^{\lambda_k x}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为互异实数, $c_1,\cdots,c_n$ 不同时为 0. 证明: f 的零点个数小于 n.

6. (1) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0$, $f(x)\neq 0\ \forall x\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立

$$2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f(0)=0$, $f(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$, 证明: 对每个 $\alpha\neq 0$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 但不是线性函数, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\eta).$$

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 且在某点 $c\in(a,b)$ 处有 $f(c)>0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

9. 利用例题 7.1.3 的方法 (或其他方法) 于以下问题:

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可微, 且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明: 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上五阶可微, 且有 $f(1/3)=f(2/3)=f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, 证明: 对每个 $x\in[0,1]$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 证明: 对每个 $c\in(a,b)$, 有 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

10. 设 $0<a<b$, f 在 $[a,b]$ 可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

11. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上 n 次可微, 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

12. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$, 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上非一致连续.
13. 设 f 在 $(0,a]$ 可微, 又存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明: f 在 $(0,a]$ 上一致连续.
14. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.
15. 对分别满足以下两个条件的 f, 设已知 $f(1)=1$, 求 $f(2)$:

    (1) $xf'(x)+f(x)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$,

    (2) $xf'(x)-f(x)=0\ \forall x>0$.

16. 设 f 在 $[0,2]$ 上二阶可微, 且 $|f(x)|\leqslant1$, $|f''(x)|\leqslant1$, 证明: $|f'(x)|\leqslant2$.
17. 证明: 若在例题 7.2.5 中的区间从 $(0,+\infty)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 则可以得到更好的估计 $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.
18. 设当 $x\in[0,a]$ 时有 $|f''(x)|\leqslant M$. 又已知 f 在 $(0,a)$ 中取到最大值. 证明: $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

第二组参考题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 在 (a,b) 上二阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

(注意: 这里没有假定 $f'\in C[a,b]$.)

2. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上无限次可微, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}$, 计算 $f^{(k)}(0)\ \forall k\in\mathbf{N}_+$.

3. 证明: 方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且有界, 证明: 存在 ξ, 使成立 $f''(\xi)=0$.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(a)=f'(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 又有 $c\in(a,b)$ 使成立 $f'(c)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 满足

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}.$$

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, $f(a)=0$, $f(x)>0$, 证明: 对每个 $\alpha>0$, 存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)}=\alpha\frac{f'(x_2)}{f(x_2)}.$$

8. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微, $|f(x)|\leqslant 1$, 且有 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: 存在 ξ, 使成立 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

9. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微, 且对所有 $x,h\in\mathbf{R}$ 成立

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\frac{h}{2}),$$

证明: $f(x)=ax^2+bx+c$.

10. (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数

$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2},$$

若 $f\in C[a,b]$, 同时 $f^{[2]}(x)$ 在 (a,b) 上处处等于 0, 证明: f 为线性函数.

11. (Gronwall-Bellman 不等式的微分形式) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且有正常数 $c>0$, 使成立

$$|f'(x)|\leqslant c\,|f(x)|\,\forall x\in[a,+\infty),$$

证明: $f(x)\equiv 0$.

12. 设 f 在 $(-1,1)$ 上有各阶导数, 且对每个 $n\geqslant 0$ 有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!\,|x|$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

13. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且存在常数 $C\geqslant 0$, 使对所有 $n\in\mathbf{N}_+$ 和 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leqslant C$, 又有 $f(1/n)=0\ \forall n\in\mathbf{N}_+$ 成立, 证明: $f(x)\equiv 0$.

14. 设 f 在点 x_0 有 n 阶导数, 证明:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x_0+kh).$$

15. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 阶可微,

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\mid x\in(-\infty,+\infty)\},k=0,1,\cdots,n,$$

证明: 若 M_0,M_n 为有限数, 则 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 都是有限数.

16. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上 n 阶可微, 且存在有限极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\ 和\ \lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x),$$

证明: 对每个 $k=1,2,\cdots,n$ 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$.

17. (1) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, $f''(x)$ 有界, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

 (2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,

 (i) 举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 不一定成立;

 (ii) 证明: 若 f' 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则一定成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

18. 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微, 且对每个自然数 n 有 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ 和 $|f(x)|\leqslant M$, 证明: 对每个 $x\in(a,b),r>0,x+r\in(a,b)$, 成立关于导数的估计式

$$f^{(n)}(x)\leqslant\frac{2Mn!}{r^n}\quad\forall n\in\mathbf{N}_+.$$

19. (Bernstein 定理) 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微, 且对每个 n 成立 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$, 证明: 对每个 $x_0\in(a,b)$ 存在 $r>0$, 使得当 $x\in[x_0-r,x_0+r]\subset(a,b)$ 时, 成立

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

第八章 微分学的应用

有了微分学中值定理和 Taylor 定理后，我们在函数研究方面就有了强有力的工具. 本章将分专题介绍这些工具是如何应用的. 虽然其中多数问题可能在过去已经遇到过，但只有在有了微分学的知识之后，我们才有条件来讨论解决这些问题的一般性方法.

§8.1 节介绍求函数极限的两个主要方法——L'Hospital 法则和带 Peano 余项的 Taylor 公式. §8.2 节是用导数判定函数的单调性. §8.3 节是用微分学方法求函数的极值和最值. 在 §8.4 节中对于凸函数的基本性质作较全面的介绍. §8.5 节的主题是用各种不同的方法证明不等式. §8.6 节为函数作图. §8.7 节是以方程求根为中心的近似计算. 最后一节为教学要点和两组参考题.

§8.1 函数极限的计算

8.1.1 L'Hospital 法则

从数学分析一开始，极限计算就是一大难题. 这种状况在有了 L'Hospital 法则后才可以说有了根本的改变. 由于这个法则将求不定式极限归之于简单的导数计算，而且 (在条件满足时) 可以连续使用，许多看似复杂的问题就可迎刃而解. 关于 L'Hospital 法则的叙述、证明以及应用时的注意事项等在数学分析的教科书中都有详细的介绍，其基本思想又与 §2.4 节完全相同，这里不再重复. 因同样的理由，也不准备举很多常规性的例题和练习题.

这里只强调指出一点，即虽然 L'Hospital 法则确实是计算极限的强有力工具，但毕竟 "一花独放不是春"，初学者要学会将 L'Hospital 法则的使用与其他工具相结合，这样才能有更好的效果. 这里所说的其他工具包括在前面各章中已经介绍的多种方法，如等价量代换法、变量代换法、不定式因子的分离、各种恒等变换、有限增量公式等，也包括在下一小节将要介绍的带 Peano 余项的 Taylor 公式等. 总之，若初学者在用 L'Hospital 法则时出现复杂的计算或甚至失败，原因往往不是 L'Hospital 法则不好，而是你对于它的认识有误. 不要认为既然 L'Hospital 法则这样有力，那么其他 (已经学过的) 方法都可以不要了.

先看下面几个简单问题，它们在第四章中很难解决，现在用 L'Hospital 法则来做就成为容易的问题了 (回顾那里的例题 4.4.5). 但从下面又可看出，这里也需要与其他工具的结合.

例题 8.1.1 计算极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

解 用 L'Hospital 法则可计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

最后一步利用了已知的等价关系 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$. □

例题 8.1.2 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$.

解 1 不用其他工具, 连用 3 次 L'Hospital 法则就可以解决问题:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{6x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan^2 x+\sec^4 x}{3}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$ □

解 2 实际上用一次 L'Hospital 法则就够了:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$ □

再举一个有多种解法的例子.

例题 8.1.3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$.

解 1 直接用 L'Hospital 法则三次, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{3x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos x^2}{(3-x^2)\sin x+5x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x^2-8x^2\sin x^2}{(8-x^2)\cos x-7x\sin x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

解 2 实际上不需要微分学知识, 用等价量代换即可解决:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2}{2}}{x^3\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2\sin x}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

解 3 若利用当 $x\to 0$ 时成立 $\cos x^2=1-\dfrac{(x^2)^2}{2}+o((x^2)^2)$ 和 $\sin x=x+o(x)$, 则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^3(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

下面是在 §2.5 节计算数 e 时留下的问题, 即证明公式 (2.15) 中的等价关系.

例题 8.1.4 设 $\delta_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\delta_n$.

解 根据第四章的 Heine 归结原理 (即命题 4.2.3), 只要计算函数极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式问题. 用 L'Hospital 法则, 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \left(-[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \cdot \frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \right) \\
&= -\mathrm{e} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\
&= -\mathrm{e} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x}}{2x} \\
&= -\mathrm{e} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 实际上本题的答案就是例题 7.2.4 中的函数 $f(x)$ 的导数 $f'(0)$ (乘以 -1).

用 L'Hospital 法则可以对带 Peano 余项的 Taylor 公式给出新证明.

例题 8.1.5 用 L'Hospital 法则证明: 若 f 在点 x_0 存在 $f^{(n)}(x_0)$, 则有

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\
+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\,(x \to x_0).
\end{aligned}$$

证 如在第七章的 (7.20) 那样引进余项

$$\begin{aligned}
r_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\
+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n],
\end{aligned}$$

它满足以下的 $n+1$ 个条件:

$$r_n(x_0) = 0,\ r_n'(x_0) = 0, \cdots, r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{8.1}$$

只需要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$, 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 用 L'Hospital 法则如下:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}.$$

在以上的 $n-1$ 次应用 L'Hospital 法则中, 利用了 (8.1) 中的前 $n-1$ 个条件. 从条件 $r_n^{(n-1)}(x_0)=0$ 可见上面的最后一式仍然是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 但这里不能再用 L'Hospital 法则. 与命题 7.2.2 中一样, 从导数定义出发, 即可利用条件 $r^{(n)}(x_0)=0$ 得到所要求证的结果. □

8.1.2 Taylor 公式与极限计算

先介绍用 Taylor 公式对错误使用等价量代换法进行分析的一个例子.

例题 8.1.6 根据实际教学情况, 在用 L'Hospital 法则计算例题 8.1.4 中的极限时, 很多学生在最后一步不再用 L'Hospital 法则, 而作以下计算:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)x}{(1+x)x^2}=-1,$$

但正确答案却是 $-\dfrac{1}{2}$. 问题当然出在不恰当地使用了等价量代换法. 因为根据 4.4.3 小节, 应当按照 (4.8) 或 (4.9) 的方式才能用等价量代换.

用 Taylor 公式进行分析就可一目了然. 分子的两项可用 Taylor 公式写出为:

$$\frac{x}{1+x}=x-x^2+o(x^2)\,(x\to 0),$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\,(x\to 0).$$

可见这两项相减后, x 的一次项恰好对消, 因此起作用的是在两个展开式中的 x^2 项的系数. 正确的计算为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x^2)-(x-\dfrac{1}{2}x^2)+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

由此可见, 前面的错误原因在于用 x 替换 $\ln(1+x)$ 时太粗糙了, 丢掉了在该问题中起关键作用的二次项.

从 Taylor 公式的应用来看, 问题是在每一个具体场合究竟应当写出多少项? 当然这需要尝试. 再以上面的分子为例. 将 $\ln(1+x)$ 写为 $x+o(x)\,(x\to 0)$, 这也

是 Taylor 公式, 并没有错误. 如果将第一项也写为 $x+o(x)$, 就会发现仅仅写出一次项的系数是不够的.

以上错误还说明, 学生在刚学了 Taylor 公式后一般还不会在求函数极限时加以使用, 在计算时仍停留在使用有限增量公式的知识水平上. 解决这个问题的方法是实践和教师的引导.

带有 Peano 余项的 Taylor 公式在求极限中有广泛的应用是不奇怪的, 因为 Peano 余项本身就是对于无穷小量的一个刻画. 下面是应用 Taylor 公式求极限的第一个例子 (为清楚起见用 $\exp[x]$ 表示 e^x),

例题 8.1.4 **的解** 2　用 Taylor 公式作下列计算:

$$\begin{aligned}
\delta_n = \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \mathrm{e}-\exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= \mathrm{e}-\exp\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\\
&= \mathrm{e}-\exp\left[1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= \mathrm{e}\left(1-\exp\left[-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)\\
&= \mathrm{e}\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&= \frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty} n\delta_n = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. □

注　例题 7.2.4 已经提供了本题的一种解法, 实质上与此相同. 此外, 本章第一组参考题 6 又提供了另一个解法.

在用 L'Hospital 法则时, 如果逐次求导运算会使表达式变得很复杂, 则往往不如用 Taylor 公式或结合其他工具为好.

例题 8.1.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

解　写出分子的 Maclaurin 公式

$$\begin{aligned}
1-(\cos x)^{\sin x} &= 1-\mathrm{e}^{\sin x\ln\cos x}\\
&= 1-[1+\sin x\ln\cos x+o(\sin x\ln\cos x)]\\
&= -\sin x\ln\cos x+o(\sin x\ln\cos x)\ (x\to 0),
\end{aligned}$$

就可以看出如下计算即可:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\ln\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

在下一个例题的几种解法中我们可以看到各种工具的结合使用.

例题 8.1.8 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 1 可以看出只要计算分子的 Maclaurin 展开式直到 x^4 项即可:

$$\cos(\sin x)-\cos x=1-\frac{1}{2!}(\sin x)^2+\frac{1}{4!}(\sin x)^4-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)+o(x^5)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4\right)+\frac{1}{2}x^2+o(x^5)$$
$$=\frac{1}{6}x^4+o(x^5)\,(x\to0)=\frac{1}{6}.\quad\square$$

解 2 在写出 $\cos(\sin x)-\cos x$ 的展开式后, 可以看出只要计算如下:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.\quad\square$$

解 3 利用分子的特殊形式, 应用 Lagrange 中值定理即可得到

$$\cos(\sin x)-\cos x=-\sin\xi\,(\sin x-x),$$

其中 ξ 在 x 与 $\sin x$ 之间. 因此就可以计算如下:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\xi(\sin x-x)}{x^4}$$
$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)\left(\frac{\xi}{x}\right)\left(\frac{\sin x-x}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.\quad\square$$

解 4 本题也可以用三角函数的和差化积公式来做, 计算如下:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x^4}\cdot2\sin\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)$$
$$=-2\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\left(\frac{\sin x-x}{2}\cdot\frac{\sin x+x}{2}\right)$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

注意这里使用了多次等价量代换, 使问题大大简化了. $\square$

例题 8.1.9 设函数 f 满足条件 $f(0)=0$, 且存在 $f''(0)$, 证明: 函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0\end{cases}$$

的导函数 g' 在 $x=0$ 连续, 且 $g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

解 这时 f 在 $x=0$ 的某邻域内可微, 因此当 $x\neq 0$ 时可按定义求出

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}. \tag{8.2}$$

余下只有一个问题, 即证明 $g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=g'(0)$.

应用 7.1.2 小节的导数极限定理, 只要证明: (1) g 在 $x=0$ 连续; (2) g' 在 $x=0$ 有极限, 并求出此极限. (若不用导数极限定理, 则需另行计算 $g'(0)$.)

(1) 从 g 的定义即可得到:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0).$$

(2) 利用带 Peano 余项的 Maclaurin 公式

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)\,(x\to 0),$$
$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x)\,(x\to 0),$$

将它们代入 (8.2), 就在 $x\neq 0$ 时有

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{(f'(0)+f''(0)x)x-\left(f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2\right)+o(x^2)}{x^2}\\&=\frac{1}{2}f''(0)+o(1)\,(x\to 0).\end{aligned}$$

因此存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$, 再应用导数极限定理即得所要的结论. □

注 1 比较 f 和 g 的 Maclaurin 展开式

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\,(x\to 0),$$
$$g(x)=f'(0)+\frac{f''(0)}{2}x+o(x)\,(x\to 0),$$

可以发现, 后一个公式可以由前一个除以 x 得到, 恰与 $x\neq 0$ 时的 $g(x)$ 的定义一致. 但在证明 $g(0)=f'(0)$ 和 $g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 之前, 当然不知道由这样的形式

运算得到的结果是否是 g 的 Maclaurin 展开式. 因此可以认为, 本例题的意义就在于对这样的形式运算作出了严格证明.

注 2 这个例题的结论可以推广. 只要多次应用导数极限定理, 就可以证明: 若 $f(0)=0$, 且存在 $f^{(n+1)}(0)$, 则上述 $g(x)$ 的 n 阶导函数 $g^{(n)}$ 在 $x=0$ 连续, 且 $g^{(n)}(0)=f^{(n+1)}(0)/(n+1)$. (这将作为本章的第二组参考题 2.)

注 3 应用上述推广, 就可以为上一章的例题 7.2.3 和 7.2.4 中的计算提供理论根据. 这里的结果可以简述为: 如果 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, 又存在 $f^{(n+1)}(0)$, 则如下定义的函数:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 存在 $g^{(n)}(0)$, 且有 Maclaurin 展开式

$$g(x)=f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^n+o(x^n)\,(x\to 0).$$

因此, 形式上这个展开式可以从 f 的 Maclaurin 展开式除以 x 得到. 在例题 7.2.3 和 7.2.4 中对于 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 就是这样做, 但当时没有能够证明其合理性.

下一个例题与例题 2.4.2 类似, 但需要用到 Taylor 公式的知识才能解决.

例题 8.1.10 设 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_n=\sin x_{n-1}, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

证 数列 $\{x_n\}$ 为严格单调减少数列, 收敛于 0 (请读者补充证明). 以下用 Stolz 定理计算:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{x_n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2}-\dfrac{1}{x_n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin^2x_n}{\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^5)}=3.\end{aligned}$$

在其中用了 $x_{n+1}=\sin x_n=x_n-\dfrac{1}{6}x_n^3+o(x_n^4)$. □

图 8.1

注 在图 8.1 上用蛛网工作法 (见 2.6.2 小节) 作出了数列的前几项. 可以看出数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0 一定很慢. 本题的结果对此作出了渐近的刻画.

8.1.3 练习题

1. 以下几个函数极限均不宜用 L'Hospital 法则, 为什么?

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. 确定 a,b, 使得当 $x\to0$ 时, 下列函数为尽可能高阶的无穷小量:

(1) $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$; (2) $f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$;

(3) $f(x)=\cot x-\dfrac{1+ax^2}{x+bx^3}$; (4) $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.

4. 应用 Taylor 公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\sqrt{n^2+2}\,\pi)$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$; (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$.

5. 设存在 $f''(a)$, 证明: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a)$.

6. 设 f 在某邻域 $O(x_0)$ 中二阶连续可微, $f'(x_0)\neq0$, $f(x)\neq f(x_0)\,\forall x\neq x_0$. 求

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶连续可微, 且 $f''(x)>0$, $f(0)=f'(0)=0$. 试求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$, 其中 u 是函数 f 的图像在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

8. 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^x\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$, 确定其定义域和值域.

9. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n), n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2$.

10. 设 $x_0=\ln a, a>0$, $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(a-x_k)$, $n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

§8.2 函数的单调性

设函数 $f\in C(I)$, 在 I 的内点处处可微, 则有以下结论.

1. f 为区间 I 上的单调函数的充分必要条件是导函数不变号.

2. f 为区间 I 上的严格单调函数的充分必要条件是除了导函数不变号外, 还在集合 $\{\, x\in I \mid f'(x)=0 \,\}$ 中不包含任何长度大于零的区间.

证明的方法是用 Lagrange 中值定理. 这在教科书中都有, 不再重复.

从数列极限和函数极限的学习开始, 单调性就一直起着重要的作用. 现在以导数为工具, 给出了判定单调性的新的有效方法, 可以说解决了函数研究中的一个基本问题. 搞清了函数的不同单调区间, 也就知道了函数图像的上升与下降, 这对解决许多问题都是有帮助的.

8.2.1 例题

虽然函数的单调性与导数有如上所说的密切关系, 但仅仅由一个点上的导数符号不能得出单调性. 请将下一个例题与命题 7.1.1 联系起来考虑这个问题.

例题 8.2.1 问: 由函数在一个点上的导数符号大于 (小于) 0 能否推出函数在该点的一个充分小的邻域内为单调?

解 答案是不能. 举例如下: 令

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则易求出 $f'(0)=1>0$. 又可以求出当 $x\neq 0$ 时的导函数表达式为:

$$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}.$$

取 $x=\dfrac{1}{n\pi}$, 则有

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)=1-2(-1)^n,$$

可见在 $x=0$ 的任意邻近导函数 $f'(x)$ 都不保号. 因此在 $x=0$ 的每个邻域内 f 都不是单调的 (该函数在 $x>0$ 部分的图像见图 8.2 (a)). □

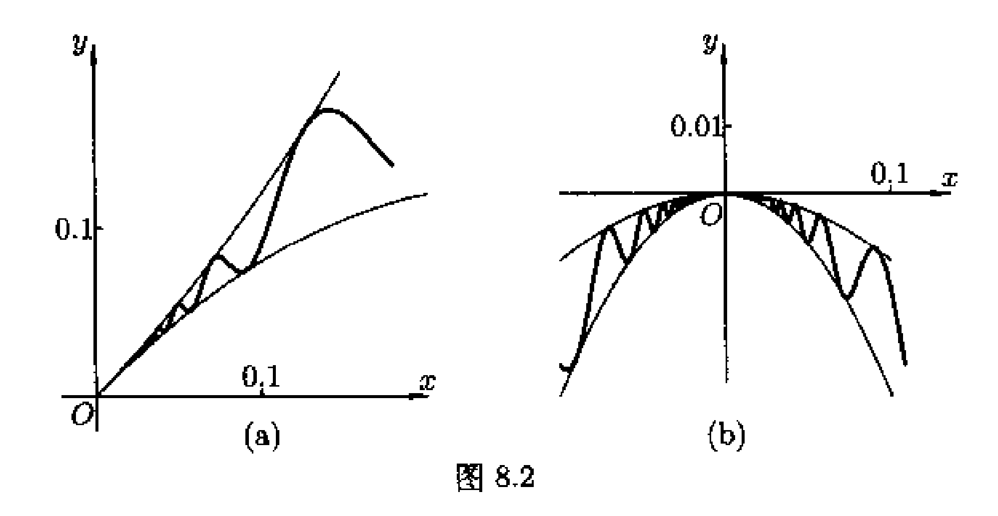


图 8.2

注 在任何一个区间上不单调的连续函数和可微函数都是存在的 (见 [56]).

例题 8.2.2 问: 函数在邻近其极值点的每一侧是否一定具有单调性?

解 答案是不一定. 举例如下: 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ -x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\end{cases}$$

则 f 在 $x=0$ 处取到极大值 0. 从不等式

$$-3x^2\leqslant f(x)\leqslant -x^2$$

即可求出 $f'(0)=0$. 但当 $x\neq 0$ 时

$$f'(x)=-4x-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},$$

因此在极值点 $x=0$ 两侧的任意邻近都不可能是单调的 (见图 8.2 (b)). □

例题 8.2.3 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$, 证明: 当 $\alpha\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时, f 于 $x>0$ 时严格单调减少; 而当 $\alpha<\dfrac{1}{2}$ 时, 则 f 于 x 充分大时严格单调增加.

证 用对数求导法, 可以写出

$$f'(x)=f(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}\right].$$

将上式右边记为 $f(x)\cdot u(x)$, 则 f' 与 u 同号. 由于有

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=0,$$

只要观察 u 是否单调即可判定其符号. 计算得到

$$u'(x)=\frac{\alpha+(2\alpha-1)x}{x^2(1+x)^2}.$$

可见当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 和 $x>0$ 时有 $u'(x)>0$, 因此 u 为严格单调增加函数, 所以当 $x>0$ 时 $u(x)<0$ 成立. 这保证了 f 在 $x>0$ 时严格单调减少. 当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时, 则至少在 x 充分大时 $u'(x)<0$, 所以有 $u(x)>0$. 这保证了 f 在 x 充分大时严格单调增加. □

将单调性分析与连续函数的零点存在定理相结合, 就可以确定方程的根的个数. 以下是在一维动力系统的研究中出现的一个代数方程.

例题 8.2.4 证明: 对每个自然数 n, 方程 $x^{n+2}-2x^n-1=0$ 只有唯一正根.

证 记方程左边的表达式为 $f(x)$. 从 $f(\sqrt{2})=-1$ 和 $f(+\infty)=+\infty$ 可见方程有大于 $\sqrt{2}$ 的正根. 为了知道 f 的单调性, 求导后得到

$$f'(x)=(n+2)x^{n+1}-2nx^{n-1}=(n+2)x^{n-1}\left(x^2-\frac{2n}{n+2}\right).$$

因此函数 f 在点

$$\xi=\sqrt{\frac{2n}{n+2}}$$

的导数为 0. 函数 f 在区间 $[0,\xi]$ 上严格单调减少, 而在区间 $[\xi,+\infty)$ 上严格单调增加. 又从 $f(0)=-1$, 就知道 $f(x)=0$ 除了上述大于 $\sqrt{2}$ 的一个正根外没有其他正根. □

例题 8.2.5 设 $a>0$, 确定方程 $f(x)=ax-\ln x=0$ 恰有两个正根的条件.

解 从 $f'(x)=a-1/x$ 可见在 $(0,a^{-1}]$ 上 f 严格单调减少, 而在 $[a^{-1},+\infty)$ 上 f 严格单调增加. 又由于

$$f(0^+)=+\infty,\ f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}x\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty,$$

可见方程 $f(x)=0$ 有两个正根的条件是

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}<0.$$

由此可以确定 a 应当满足条件 $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$. □

8.2.2 练习题

1. 问: 单调函数若可微, 则其导函数是否也单调? 反之又如何? 请举例说明.

2. 证明: 函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$ 且 f' 严格单调增加, 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上也严格单调增加.

4. 设 f,g 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 上可微, $f(0)=g(0)=0$, $f',g'>0$, 证明: 如果 f'/g' 单调增加, 则 f/g 也单调增加.

5. 设 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 并且满足条件: (1) $f(a)>0$; (2) $f'(a)<0$; (3) 在 $x>a$ 时 $f''(x)\leqslant 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且只有一个实根.

6. 设 $f\in C[a,+\infty)$, 且当 $x>a$ 时成立 $f'(x)>k>0$, 其中 k 为常数, 证明: 若 $f(a)<0$, 则于区间 $(a,a-f(a)/k)$ 内方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根.

7. 设 $a>0$, 证明: 方程 $ae^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ 只有一个实根.

8. 证明: 方程 $f(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}-1\right)\ln x-\ln 2+\ln(1+x^2)=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内只有一个实根.

§8.3 函数的极值与最值

关于极值与最值的基本事实如下:

1. 根据定义, 极值点必须是函数的定义域中的内点. 这就是说, 极值点必须有一个邻域在函数的定义域中.

2. 若函数 f 在点 x_0 两侧 (邻近) 均为单调, 且具有相反的单调性, 则 x_0 为极值点.

3. 根据 Fermat 定理, 函数的极值点或是函数的不可导点 (包括不连续点), 或是函数的导数等于零的点.

4. 若函数 f 在点 x_0 处二阶可微, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则 x_0 一定是极值点. 此时, 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是极小值点, 而若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是极大值点.

5. 若函数 f 在点 x_0 处为 n 阶可微, $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则有以下结论 (证明见例题 8.3.1):

   (1) 若 n 为奇数, 则 x_0 一定不是极值点,

(2) 若 n 为偶数, 则 x_0 一定是 f 的极值点. 若 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 x_0 是极小值点; 若 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 x_0 是极大值点.

6. 以上 2,4,5 三项所列出的条件都是充分而非必要的条件. 目前还不知道函数在某个点达到极值的充分必要条件是什么.
7. 若函数 f 在点 x_0 有任意阶的导数, 而且所有这些导数值都等于 0, 则函数仍然可能在点 x_0 处达到或不达到极值. 前者的例子见例题 6.2.4，其中的函数在点 $x=0$ 的任意阶导数为 0, 又在该点取到极小值. 后者的例子可以从例题 6.2.4 中的函数经适当改造后得到 (留作**思考题**).
8. 若函数在内点达到最值, 则同时也达到极值.
9. 在闭区间或半闭半开区间上定义的函数的最值点位置只有两种可能: (1) 端点, (2) 极值点. 这是寻找函数最值点的基本原则.

8.3.1 例题

例题 8.3.1 若函数 f 在点 x_0 处 n 阶可微, 且满足条件

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则有结论: (1) 若 n 为奇数, 则 x_0 一定不是 f 的极值点; (2) 若 n 为偶数, 则当 $f^{(n)}(x_0)>0\,(<0)$ 时, x_0 是函数 f 的极小值点 (极大值点).

证 这时 f 在 x_0 的 Taylor 公式为

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\,(x\to x_0).$$

将它改写成

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+o(1)\right](x-x_0)^n\,(x\to x_0),\tag{8.3}$$

由于 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则存在 $\delta>0$, 当 $x\in O_\delta(x_0)$ 时, 公式 (8.3) 右边的方括号中的表达式的符号完全由 $f^{(n)}(x_0)$ 确定.

若 n 为奇数, 则可以从 (8.3) 看出当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 和 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f(x)-f(x_0)$ 异号, 因此 x_0 一定不是极值点.

若 n 为偶数, 则公式 (8.3) 表明, 当 $x\in O_\delta(x_0)-\{x_0\}$ 时, $f(x)-f(x_0)$ 与 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号一致. 因此当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, x_0 是 f 的极小值点. 反之, 若 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 x_0 是 f 的极大值点. □

注 $n=1$ 时这就是 Fermat 定理 (即命题 7.1.2), 即从 $f'(x_0)\neq 0$ 可推出 x_0 不是 f 的极值点. 上述证明就是那里的证 2.

例题 8.3.2 证明: $x=0$ 是 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x$ 的极小值点.

证 计算得到 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=4$. 用上一命题的结论可见 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. □

现在可以解决在 §2.5 节中引进数 e 时所提出的一个问题:

例题 8.3.3 已知正数 a, 把它分成若干部分, 如果要求各部分的乘积达到最大, 应该怎样分法?

解 设将 a 分成 n 份, 然后相乘. 由平均值定理知道, 若给定 n, 则应将 a 分成为相等的 n 份最为有利. 这时所得到的乘积为

$$\left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

问题是如何取 n 才能使这个乘积最大.

令 $x=\dfrac{a}{n}$, 则上述乘积为 $(x^{\frac{1}{x}})^a$. 因此所提的问题和求函数

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0, \tag{8.4}$$

的最大值有密切关系.

求 $f(x)$ 的导数, 得到

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=f(x)\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

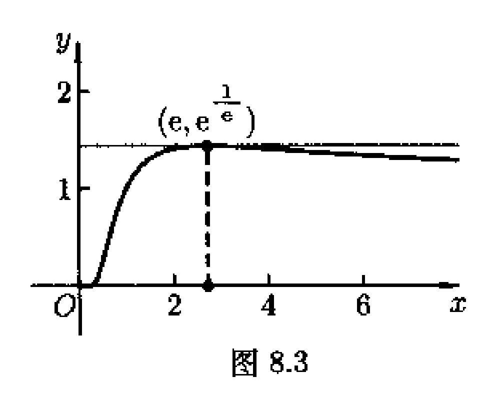


图 8.3

可见导函数 $f'(x)$ 只有一个零点 $x=\mathrm{e}$. 从导函数的表达式可见, 在 $(0,\mathrm{e})$ 上 f 严格单调增加, 而在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上 f 严格单调减少. 因此 $x=\mathrm{e}$ 是函数 f 的最大值点 (见图 8.3).

由于在一开始时令 $x=a/n$, 所以要求 a/x 为正整数. 如果 a/e 不是正整数, 则应当取 n 为多少?

若 $0<a<\mathrm{e}$, 则可以看出 $n=1$. 也就是说不分比分好. 若 $a/\mathrm{e}\notin\mathbf{N}_+$ 且 $a>\mathrm{e}$, 则总可以找到一个自然数 n, 使得

$$\frac{a}{n+1}<\mathrm{e}<\frac{a}{n}.$$

然后比较 $f\left(\dfrac{a}{n+1}\right)$ 和 $f\left(\dfrac{a}{n}\right)$ 的大小, 决定将 a 分成 n 份还是 $n+1$ 份. □

注 1 另一个与此相关的问题是, 若 $a \in \mathbf{N}_+$, 且要求所分成的每一份都是正整数, 则应当如何分才能使乘积最大?

这个问题的答案是: 首先每一份应当不是 2 就是 3, 也就是说与数 e 尽可能接近. 一旦知道这个结论后, 可以用数学归纳法来证明它, 并不需要上述微分学的知识. 然后, 由于 $2+2+2=3+3$, 但 $2^3 < 3^2$, 因此在将自然数 a 分成若干个 2 与 3 之和时, 2 最多出现两次. 这样就将分法完全确定下来, 并保证乘积最大.

最后将分法小结如下: 设 $a \in \mathbf{N}_+$. (1) 若 a 是 3 的倍数, 则每一份为 3; (2) 若 $a \equiv 1 \pmod 3$, 则取两份 2, 其余均为 3; (3) 若 $a \equiv 2 \pmod 3$, 则取一份 2, 其余均为 3.

注 2 在 (8.4) 中的函数的最大值也可以从不等式

$$\mathrm{e}^u \geqslant 1+u$$

得到, 其中仅当 $u=0$ 时成立等号. 这从带 Lagrange 余项的 Taylor 公式 (其中 $0<\theta<1$)

$$\mathrm{e}^u = 1+u+\frac{\mathrm{e}^{\theta u}}{2!}u^2 \geqslant 1+u$$

就可以得到. 然后令

$$u = \frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$$

代入, 略加整理, 即可得到不等式

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \geqslant x^{\frac{1}{x}},$$

当且仅当 $x=\mathrm{e}$ 时成立等号.

例题 8.3.4 问: 能通过图 8.4 的直角河道的最长船身是多少?

解 在图上我们看到宽度为 a 和 b 的河道成直角相接. 现在设想将船简化为一个直线段. 在图上经过河岸的突出角作出一条斜线段. 以图示的角度 θ 为这个线段位置的参数, $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$. 可以看出, 能通过直角河道的船身长度在任何情况都不会超出这个线段的长度 $l(\theta)$. 由于这对每个 θ 成立, 因此能通过这个河道的最长船身不会超过

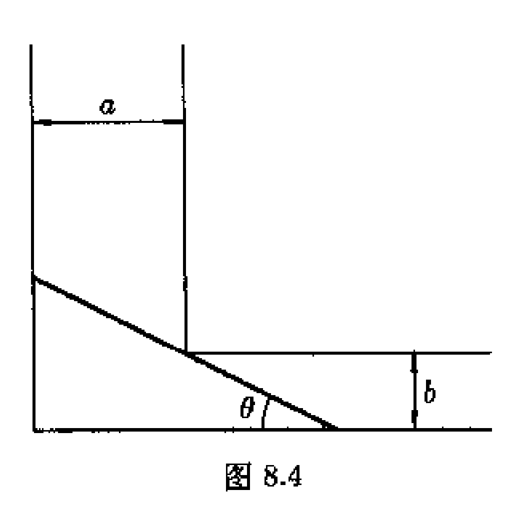


图 8.4

$$\min_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} l(\theta).$$

另一方面, 可以看出, 在用一个直线段来表示船时, 只要船身不超过这个最小值, 船就能够通过这个直角河道. 所以求最大船长的问题就转变成为求函数 $l(\theta)$ 的最小值问题, 这里自变量 θ 的定义域是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

容易写出函数 $l(\theta)$ 的表达式:

$$l(\theta)=a\sec\theta+b\csc\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

求导得到

$$l'(\theta)=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\cdot(a\sin^3\theta-b\cos^3\theta).$$

由于当 θ 从 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时最后一个因子 $a\sin^3\theta-b\cos^3\theta$ 的值从 $-b$ 到 a 严格单调增加, 因此 $l'(\theta)$ 存在唯一的零点

$$\theta_0=\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

从 $l'(\theta)$ 的符号变化可见 θ_0 是函数 $l(\theta)$ 的最小值点.

最后计算出 $l(\theta)$ 的最小值

$$l(\theta_0)=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

这就是能通过所示直角河道的最大船身长度. 由于我们无法考虑各种船的具体形状, 而是将船简化为一个直线段, 因此所求出的数值只有参考价值. 但是这个值肯定是能通过的船身长度的一个上界. □

8.3.2 练习题

1. 设 $f\in C(I)$, I 为区间, 证明: 若 $x_0\in I$ 是 f 的唯一极值点, 则 x_0 一定是最值点; 又若 x_0 是极小值点 (极大值点), 则它也是 f 的唯一最小值点 (唯一最大值点).
2. 求出方程 $x^3+px+q=0$ 有三个不同实根的充分必要条件.
3. 求出方程 $\frac{1}{x^2}+px+q=0$ 有三个不同实根的充分必要条件.
4. 证明: $f(x)=a^2e^{\lambda x}+b^2e^{-\lambda x}$ $(a,b>0)$ 存在与 λ 无关的极小值.
5. 证明: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 若不是常值函数, 则不会有极值.
6. 比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 和 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小.
7. 考虑下列几何极值问题 (能用初等方法做就不一定用微分学工具):
   (1) 在面积为定值的三角形中, 什么三角形的周长最小?
   (2) 在周长为定值的三角形中, 什么三角形的面积最大?
   (3) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的边长平行坐标轴的内接矩形中, 面积最大的矩形的长和宽为多少?

(4) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内, 边平行于坐标轴的内接矩形中, 周长最大的矩形的长和宽为多少?

8. 考虑给定边界值的二阶线性非齐次微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),\ a<x<b,\ y(a)=A,\ y(b)=B,$$

其中 p,q,r 是给定的函数, A 和 B 是给定的数, 又设 $q(x)<0\ \forall x\in(a,b)$, 证明: 如果这个微分方程在闭区间 $[a,b]$ 上存在解, 则必唯一.

注 前面与极值问题有关的材料还有 5.3.3 小节的题 9, 5.5.2 小节的题 5 和第五章第二组参考题 16-18.

§8.4 函数的凸性

凸函数是有广泛应用的一类重要函数. 它与凸集的研究一起已形成为一个专门的方向——凸分析. 有关凸函数的试题经常在考研试卷中出现, 有时在高考试卷中也会出现. 本节将介绍凸函数的基本事实. 关于用凸函数为工具来证明不等式则将在下一节的 8.5.2 小节内介绍. 与积分有关的凸函数性质见第十一章中的 11.2.1 小节 "凸函数不等式" 和部分参考题.

8.4.1 基本命题

定义 设函数 f 在区间 I 上定义. 若对每一对点 $x_1,x_2\in I$, $x_1\neq x_2$, 和每个 $\lambda\in(0,1)$, 成立不等式

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \tag{8.5}$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**. 又若在 (8.5) 中成立严格不等号, 则称 f 为区间 I 上的**严格下凸函数**. 若函数 $-f$ 为下凸函数 (严格下凸函数), 则称 f 为**上凸函数** (**严格上凸函数**). 下凸函数和上凸函数统称为**凸函数**.

注 请读者注意: 下凸函数和上凸函数的名称在我国的数学分析教学中使用已久, 它们与向下凸和向上凸的直观说法一致, 方便易记; 但也有很多教科书和其他文献使用凸函数和凹函数的名称, 因为下凸函数和上凸函数在英语中分别为 convex function 和 concave function.

凸函数的定义有明显的几何意义. 在图 8.5 中我们看到下凸条件 (8.5) 表明, 连接函数图像 $y=f(x)$ 上任意两点的直线段应当在相应的曲线段的上方. 在下

一个命题中我们将对条件 (8.5) 作进一步的发掘, 从而得到更多的等价条件, 这在研究凸函数时非常有用.

命题 8.4.1 函数 f 在区间 I 上为下凸的充分必要条件是对于区间 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 成立不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{8.6}$$

又如在不等式中的不等号“$\leqslant$”都改为严格的不等号“$<$”, 则就是严格下凸的充分必要条件.

分析　在证明之前先分析条件 (8.6) 的意义.

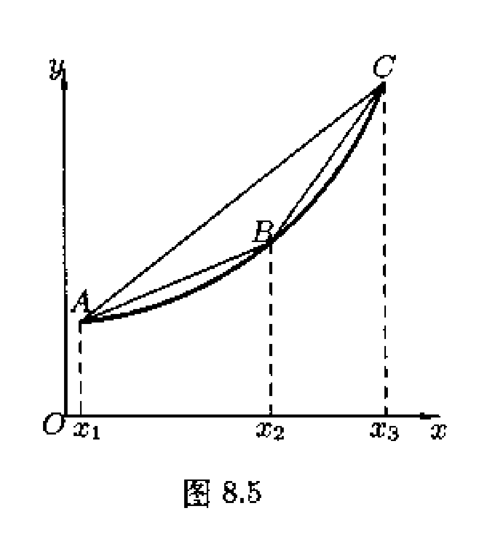


图 8.5

如图 8.5 所示, 将坐标平面上的三个点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ 记为点 A, B, C, 又用 $k(\overline{AB}), k(\overline{BC}), k(\overline{AC})$ 表示直线段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 的斜率, 则可以将条件 (8.6) 改写为

$$k(\overline{AB}) \leqslant k(\overline{AC}) \leqslant k(\overline{BC}). \tag{8.7}$$

但这个条件实际上含有三个不等式:

$$\begin{aligned} &k(\overline{AB}) \leqslant k(\overline{AC}),\ k(\overline{AB}) \leqslant k(\overline{BC}),\\ &k(\overline{AC}) \leqslant k(\overline{BC}). \end{aligned} \tag{8.8}$$

利用行列式计算容易得到下列等式:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ f(x_2)-f(x_1) & f(x_3)-f(x_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_2 \\ f(x_2)-f(x_1) & f(x_3)-f(x_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_3-x_2 \\ f(x_3)-f(x_1) & f(x_3)-f(x_2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由于三个二阶行列式非负的条件恰好分别对应了 (8.8) 中的三个不等式,因此这三个不等式相互等价[①]. 这样在下面命题 8.4.1 的证明中只需要证明下凸函数的定义和这三个不等式中的某一个等价即可.

① 用向量代数中的外积和混合积可对以上四个行列式非负的条件给出几何解释. 这里从略.

命题 8.4.1 的证明 (只写出下凸函数的证明, 关于严格下凸函数的证明从略.) 由给定的 $x_1 < x_2 < x_3$ 可以计算出

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1},$$

它满足条件 $0 < \lambda < 1$ 和等式

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3.$$

先证必要性. 由于 f 下凸, 有

$$f(x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

将 λ 的表达式代入, 再加整理, 就得到

$$(x_3 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] \leqslant (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_1)],$$

这就是 $k(\overline{AB}) \leqslant k(\overline{AC})$.

再证充分性. 任取一个不等式, 例如 $k(\overline{AB}) \leqslant k(\overline{AC})$, 就可以改写为

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

由于 $x_1 < x_2 < x_3$, 同时它们又是区间 I 中的任意三点, 因此就证明了 f 在 I 上为下凸函数. □

命题 8.4.2 开区间上的凸函数必是连续函数.

分析 先作几何观察. 不妨只讨论下凸函数. 设 f 为开区间 I 上的下凸函数, 点 $x_0 \in I$. 如图 8.6 所示, 在开区间 I 中于 x_0 两侧取 $x_1 < x_0 < x_2$, 记坐标平面上的点 $(x_1, f(x_1)), (x_0, f(x_0)), (x_2, f(x_2))$ 为 A, B, C. 先从几何上分析如何可以证明 f 于点 x_0 右连续.

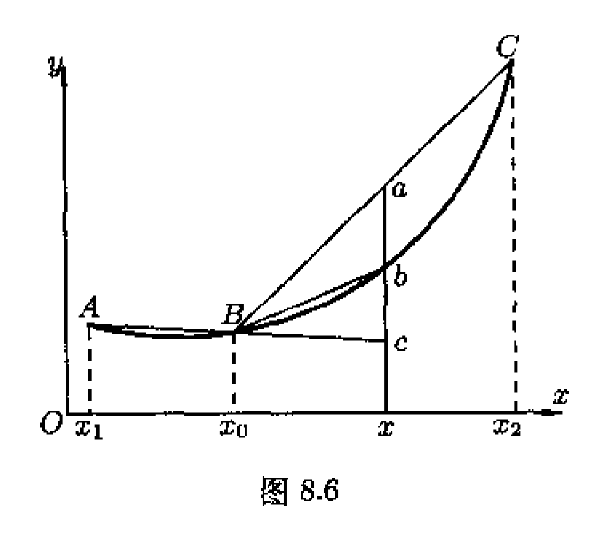


图 8.6

取 $x_0 < x < x_2$, 并在图 8.6 上标出三个点 a, b, c, 它们分别是在坐标平面上过点 $(x, 0)$ 而平行于 y 轴的直线与直线段 $\overline{BC}$, 曲线 $y = f(x)$ 和直线段 $\overline{AB}$ 的延长线的交点. 容易看出, 在 $x \to x_0^+$ 时, 点 a 和 c 沿直线趋于点 B, 若能证明点 b 确实在 a, c 之间, 则证明就完成了. 以下即是将这些几何上的观察翻译成分析语言.

证 对 $x_0 < x < x_2$ 和 x_1, x_0, x 分别应用命题 8.4.1, 就得到

$$k(\overline{Bc}) \leqslant k(\overline{Bb}) \leqslant k(\overline{Ba}). \tag{8.9}$$

由于 $x_0 < x$, 不等式 (8.9) 等价于在 a, b, c 三点的纵坐标之间的下列序关系:

$$\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot[f(x_0)-f(x_1)]+f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}f(x_2).$$

令 $x\to x_0^+$, 用夹逼定理, 就得到

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

关于 f 在点 x_0 为左连续的证明完全类似, 从略. □

注 若凸函数的定义域不是开区间, 则在端点处可以不连续. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1,\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上是下凸函数, 但在端点处不连续.

命题 8.4.3 若 f 为开区间 I 上的下凸函数, 则

(1) f 处处存在有限的两个单侧导数, 而且成立不等式 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x), x\in I$;

(2) 对任何 $x,y\in I$, $x<y$, 成立不等式 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)\leqslant f'_-(y)\leqslant f'_+(y)$, 由此知道 f'_- 和 f'_+ 均为单调增加函数.

证 只要利用不等式 (8.6) 和图 8.5, 8.6 就够了.

(1) 利用 (8.8) 中的第一个不等式, 在图 8.6 上有 $k(\overline{Bb})\leqslant k(\overline{BC})$, 而且可以看出当 $x\to x_0^+$ 时, $k(\overline{Bb})$ 单调减少, 同时又以 $k(\overline{Bc})$ 为下界, 因此一定有极限. 这就证明了 $f'_+(x_0)$ 存在. 类似地可以证明 $f'_-(x_0)$ 的存在性.

(2) 观察图 8.5, 利用 (8.6), 再分别令 $x_2\to x_1^+$ 和 $x_2\to x_3^-$, 由于在 (1) 已经证明了两个单侧导数的存在性, 因此就得到 $f'_+(x_1)\leqslant k(\overline{AC})\leqslant f'_-(x_3)$. 将 x_1, x_3 改记为 x, y 即可. □

注 由于命题 8.4.3 的证明不需要用命题 8.4.2 的结论, 因此很多文献中将后者作为前者的推论得到, 即从两个单侧导数存在推出连续. 从命题 8.4.2 的证明可见, 直接证明连续性也是容易的.

命题 8.4.4 设 f 在区间 I 上可微, 则

(1) f 在 I 上为下凸函数的充分必要条件是 f' 在 I 上为单调增加函数,

(2) f 在 I 上为严格下凸函数的充分必要条件是 f' 在 I 上严格单调增加.

证 先给出 (1) 的充分性部分的证明. 利用命题 8.4.1 和它的注解, 可见只需要证明 $k(\overline{AB})\leqslant k(\overline{BC})$.

设 f' 在区间 I 上单调增加. 取 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \lambda \in (0,1)$. 引入

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

写出我们所关心的差值

$$f(x_\lambda) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) = \lambda[f(x_\lambda) - f(x_1)] + (1-\lambda)[f(x_\lambda) - f(x_2)],$$

并对两个方括号中的表达式分别用 Lagrange 中值定理, 就有

$$\xi_1 \in (x_1, x_\lambda),\ \xi_2 \in (x_\lambda, x_2),$$

使得

$$f(x_\lambda) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_\lambda - x_1) = f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2 - x_1),$$
$$f(x_\lambda) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_\lambda - x_2) = f'(\xi_2)\lambda(x_1 - x_2).$$

由于 $\xi_1 < \xi_2$, 利用条件 f' 为单调增加, 因此有

$$f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2).$$

这样就得到

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) &= \lambda f'(\xi_1)(x_\lambda - x_1) + (1-\lambda)(x_\lambda - x_2) \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] \leqslant 0. \quad (8.10) \end{aligned}$$

(1) 的必要性部分可由命题 8.4.3 之 (2) 得出.

关于 (2) 的证明只概述如下: 充分性部分可从上面看出, 由于 f' 严格单调增加, 因此从 $\xi_1 < \xi_2$ 得到 $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 这保证了不等式 (8.10) 成立严格不等号. 又若 f' 单调增加但不是严格单调, 则在区间 I 上存在点 $x_1 < x_2$, 使得 $f'(x)$ 在子区间 $[x_1, x_2]$ 上为常值函数, 从而 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上是线性函数, 而不可能是严格下凸函数. 这样就完成了必要性的证明. □

命题 8.4.5 若 f 是区间 I 上的可微下凸函数, 则经过点 $(x_0, f(x_0))$ $(x_0 \in I)$ 的切线一定在曲线 $y = f(x)$ 的下方, 即成立不等式

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in I.$$

又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是 $x = x_0$.

证 将上述不等式的右边移项到左边, 然后用 Lagrange 中值定理, 就有

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$

其中 $\xi \in (x_0, x)$. 用命题 8.4.4 可见上式非负, 而在 f 为严格下凸时, f' 为严格单调, 因此仅当 $x = x_0$ 时为 0. □

命题 8.4.6 设函数 f 于区间 I 上二阶可微, 则

(1) f 在 I 上为下凸函数的充分必要条件是在 I 上处处有 $f''(x) \geqslant 0$,

(2) f 在 I 上为严格下凸函数的充分必要条件是在 I 上处处有 $f''(x) \geqslant 0$, 而且在任一正长度的子区间上 $f''(x)$ 不恒等于零.

这个命题可以从上一个命题 8.4.4 的结论直接得出, 但也可以证明如下.

证 (只证明 (1).)

先证必要性. 对区间的内点 x, 取 $h > 0$ 充分小, 就可以由下凸性推出不等式

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}[f(x-h) + f(x+h)].$$

这保证了下列极限非负,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

对端点可由 Darboux 定理推出.

再证充分性. 重复命题 8.4.4 证明的充分性部分, 对 $x_1 < x_2$ 和 $0 < \lambda < 1$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)],$$

其中 $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$. 再对 f' 用 Lagrange 中值定理, 存在 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)(\xi_1 - \xi_2)f''(\eta) \leqslant 0,$$

这里利用了 $\xi_1 < \xi_2$ 和 $f''(\eta) \geqslant 0$. □

命题 8.4.7 (下凸函数的 Jensen 不等式) 如 f 为区间 I 上的二阶可微下凸函数, 则对任何 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 与满足条件 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ 的 n 个正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 成立不等式

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n). \tag{8.11}$$

又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n. \tag{8.12}$$

证 记 $\overline{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ (即数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的加权平均值), 并写出 $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在点 $\overline{x}$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x_i) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x_i - \overline{x}) + \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i - \overline{x})^2, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

将这 n 个公式分别乘以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 后相加, 利用条件 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ 和二阶导数非负, 就得到 Jensen 不等式:

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n) \geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(\overline{x}-\overline{x})=f(\overline{x}).$$

以下讨论当 f 严格下凸时, 在 Jensen 不等式中成立等号的条件.

若在上述不等式中成立等号, 则由于每个 $\lambda_i > 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 从以上证明过程可以看出只能是对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 成立

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_i-\overline{x}).$$

用命题 8.4.5, 可见只能有 $x_i=\overline{x}$.

反之是明显的. 若条件 (8.12) 成立, 则对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $x_i=\overline{x}$, 因此在上面的不等式中成立等号. □

注 命题中的二阶可微条件并非必要 (作为下面的练习题 1). 但从应用来看, 用二阶导数来检验凸性较为方便. 这在 8.5.2 小节中有很多例题可供参考.

以下是一个与凸性密切相关的概念, 它在许多方面有应用.

定义 称曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_0, f(x_0))$ 为**拐点** (**或变曲点**), 如果在该点两侧邻近的曲线具有不同的凸性.

关于拐点的基本命题见下面练习题的最后几个题.

8.4.2 练习题

1. 在不假定函数 f 可微的条件下, 证明 Jensen 不等式 (8.11) 仍然成立.
2. 设 f 是区间 (a,b) 上的上凸函数, 且 $f(x)>0$, 证明: 函数 $1/f$ 是区间 (a,b) 上的下凸函数. 又问: 若在上题中将 f 的上凸条件改为下凸, 则有何结论?

   (本题的变型是对 f 加上一阶可微或二阶可微条件.)
3. 设 f, g 是 (a,b) 上的下凸函数, 证明: $\max\{f(x), g(x)\}$ 也是 (a,b) 上的下凸函数.
4. 设 f 和 g 均为区间 I 上的单调增加非负下凸函数, 证明 $f\cdot g$ 为区间 I 上的下凸函数.
5. 设 f 在区间 I 上为下凸函数, 证明: $F(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 也是下凸函数.
6. 设 f 和 g 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 问: 复合函数 $f\circ g$ 是否一定是 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数?
7. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 证明: 或者 f 为单调函数, 或者存在点 c, 使得 f 在 $(-\infty,c]$ 上单调减少, 而在 $[c,+\infty)$ 上单调增加.
8. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且 $f''(x)\geqslant 0$, 证明: f 只能是常值函数.
9. 设 f 在 (a,b) 上 n 阶可微 $(n>2)$, $f^{(n)}(x)>0$, 又有 $x_0\in(a,b)$, 使对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 成立 $f^{(k)}(x_0)=0$, 证明:

   (1) n 为奇数时, f 在 (a,b) 上严格单调增加;

(2) n 为偶数时, f 在 (a,b) 上严格下凸.

10. 设 f 在开区间 (c,d) 上为下凸函数, 则 f 一定满足内闭的 Lipschitz 条件. (这就是说对每个有界闭区间 $[a,b]\subset(c,d)$, 存在 $M>0$, 对所有 $x_1,x_2\in[a,b]$, 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$.)
11. 证明: f 在开区间 I 上为下凸函数的充分必要条件是对每个 $c\in I$, 存在 a, 使得在区间 I 上成立不等式 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$.
12. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上为下凸函数, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 一定有意义.
13. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为下凸函数, 又有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 证明: f 是常值函数.
14. 设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 如果有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)=f(c)=f(b)$, 证明: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的常值函数.
15. 设 $a<b<c<d$, 证明: 若 f 在 $[a,c]$ 和 $[b,d]$ 上是下凸函数, 则 f 也是 $[a,d]$ 上的下凸函数.
16. 证明: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数.
17. 设 f 在区间 (a,b) 上二阶可微, f'' 保号, 证明: 对该区间内的任何两点 $a<x_1<x_2<b$ 用 Lagrange 中值定理得到 $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$ 时, 其中的中值 $\xi\in(x_1,x_2)$ 总是唯一的.
18. 若曲线 $y=f(x)$ 以 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点, 且存在 $f''(x_0)$, 证明: $f''(x_0)=0$.
19. 问: 若已知有 $f''(x_0)=0$, 则点 $(x_0,f(x_0))$ 是否一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点?
20. 设 f 在点 x_0 处 n $(n>2)$ 阶可微, 且满足条件 $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 但 $f^{(n)}x_0\neq0$, 请参考命题 8.3.1 写出点 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点的充分必要条件并作出证明.

§8.5 不等式

不等式在数学中十分重要, 内容极为丰富. 在本节中我们用导数为工具来证明一些不等式. 其中用凸函数为工具的例题则在 8.5.2 小节中作专门介绍. 与积分有关的不等式见 §11.2 节. 这方面的部分参考书为 [2, 22, 30, 47, 59, 60].

8.5.1 例题

第一个例题是用 Lagranger 中值定理证明不等式的典型例子. 在图 8.7 中显示了不等式的几何意义.

例题 8.5.1 证明: 在 $x>-1, x\neq 0$ 时, 成立不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

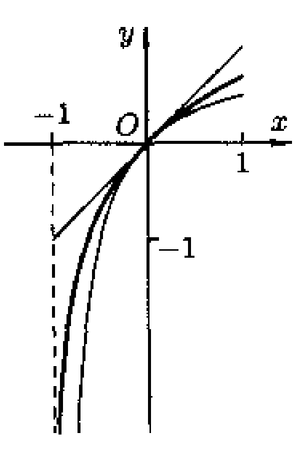


图 8.7

证 记 $f(x)=\ln(1+x)$, 从中值定理得到

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=\frac{x}{1+\theta x}, 0<\theta<1.$$

对 $x>0$ 和 $-1<x<0$ 分别讨论就可以得到

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\theta x}<x. \quad \square$$

注 回顾第二章中的不等式 (2.16), 即

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n},$$

可以看到它只是本例题在 $x=1/n$ 时的特例. 当时的不等式 (2.16) 来自于对数 e 的研究, 在那里只用了一个工具——平均值不等式.

Cauchy 中值定理在证明不等式中也有应用.

例题 8.5.2 证明: 对 $0<a<b\leqslant\frac{\pi}{2}$, 成立不等式

$$\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}.$$

证 这等价于证明函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调减少. (该函数的图像见图 4.2(a) 和 8.8 (b).) 这里用 Cauchy 中值定理来作出证明. 令 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin(b/a)x$. 从 Cauchy 中值定理知道存在 $\xi\in(0,a)$, 使成立

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{f(a)-f(0)}{g(a)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由于 $f'(\xi)=\cos\xi$, $g'(\xi)=\frac{b}{a}\cos\frac{b}{a}\xi$, 而 $\cos u$ 在 $0<u<\frac{\pi}{2}$ 上严格单调下降, 因此就得到所要的结果

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\xi}{\cos\frac{b}{a}\xi}>\frac{a}{b}. \quad \square$$

注 这个例题的证明方法很多, 这里再举出两个.

(1) 在区间 $(0,\pi/2]$ 上定义辅助函数 $F(x)=\sin x/x$, 求导即可.

(2) 利用 8.2.2 小节的题 4, 在 $[0,\pi/2)$ 上取 $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$, 由于 $f'(x)/g'(x)=\sec x$ 单调增加, 因此 $x/\sin x$ 也单调增加.

利用单调性证明不等式的例子很多. 一个典型例题就是

例题 8.5.3 证明: 在 $x>0$ 时, 成立 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$.

证 令 $F(x)=\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, 则有 $F(0)=0$. 因此只要证明当 $x>0$ 时成立 $F'(x)>0$, 就可以从 F 单调增加知道在 $x>0$ 时成立 $F(x)>0$. 由于 $F'(0)=0$, 又发现问题归结为证明 $F''(x)>0$ $(x>0)$. 由于 $F''(x)=-\sin x + x$ 可见这已满足. 由此反推即可. □

证明不等式的另一个方法是将它转化为极值问题. 下面就是一个典型例子 (见 [30]), 它在本书第十二章中有用.

例题 8.5.4 设 $a\geqslant 1$, 证明: 在 $x\in[0,a]$ 时成立不等式

$$0\leqslant \mathrm{e}^{-x}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^a\leqslant \frac{x^2}{a}\mathrm{e}^{-x}.$$

证 先证明左边的不等式 (这时只要 $a\geqslant 0$). 将中间的表达式记为 $f(x)$, 则只要证明 f 在区间 $[0,a]$ 上的最小值非负即可. 由于 $f(0)=0$, $f(a)=\mathrm{e}^{-a}>0$, 因此只要证明若 f 有极值, 则该极值非负.

若 f' 没有零点, 则无极值; 若 f' 有零点, 记为 ξ, 就有

$$f'(\xi)=-\mathrm{e}^{-\xi}+\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^{a-1}=0.$$

由此即可计算出

$$f(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}-\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^a=\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\xi}{a}\geqslant 0.$$

因此左边的不等式成立. 对右边的不等式的证法完全一样, 留作练习. □

注 在证明右边的不等式时, 如果先乘以 e^x, 则计算方便一些 (见 [43]). 但这不是实质性的技巧.

下面是用一元微分学对平均值不等式的一个证明. 它是由 Liouville 提出的 (又为后人多次 "发现").

例题 8.5.5 用 Liouville 方法证平均值不等式, 即对非负数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

其中等号成立的充分必要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证 若在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 0 出现, 则不等式已成立. 同时也可看出成立等号的条件是其中每个数为 0. 因此在下面设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为正数.

用数学归纳法. 在 $n=2$ 时已知成立. 现设平均值不等式对 n 已成立, 讨论 $n+1$ 的情况.

构造辅助函数

$$y=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}{n+1}\right)^{n+1}-\prod_{i=1}^{n+1}x_i,$$

并将 x_{n+1} 看成是自变量, y 是因变量. 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{n+1}}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}{n+1}\right)^{n}-\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

可以看出这个导函数是 (x_{n+1} 的) 严格单调增加函数. 求出它的零点

$$x_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}x_i+(n+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}, \tag{8.13}$$

可见 y 在该点取到最小值. 记这个最小值为 m, 则可以计算出

$$\begin{aligned}
m&=\prod_{i=1}^{n}x_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}{n+1}-x_{n+1}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}x_i\left[\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}+\sum_{i=1}^{n}x_i-(n+1)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\
&=\prod_{i=1}^{n}x_i\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]
\end{aligned}$$

对最后一式的第二个因子用归纳假设, 可见最小值 $m\geqslant 0$. 因此得到 $y\geqslant m\geqslant 0$, 即已经得到了所要求证的不等式.

若在 $n+1$ 的平均值不等式中成立等号, 则有 $y=0$, 从而有 $y=m=0$. 从 m 的表达式和归纳假设可得 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 又由 $y=m$ 可见 x_{n+1} 满足等式 (8.13), 从而有 $x_{n+1}=x_1=\cdots=x_n$. □

下面的 Jordan 不等式是关于正弦函数的一个基本不等式. 图 8.8(a) 是该不等式的几何意义, 在图 8.8(b) 中作出了证 1 中的辅助函数 $\sin x/x$ 的图像.

例题 8.5.6 (Jordan 不等式) 设 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$.

证 1 在 $x=0$ 时不等式已成立. 对 $0<x\leqslant\pi/2$ 可以引入辅助函数

$$F(x)=\frac{\sin x}{x},$$

从例题 8.5.2 知 $F(x)$ 在 $(0,\pi/2]$ 上严格单调减少, 从而在 $0<x\leqslant\pi/2$ 时成立

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\leqslant F(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

这等价于所要求证的不等式. □

证 2 构造辅助函数

$$\phi(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,$$

则只要证明在区间 $[0,\pi/2]$ 上函数 $\phi(x)$ 非负.

在区间的两个端点上有

$$\phi(0)=\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

计算

$$\phi'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},$$

可见 $\phi'(x)$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 上严格单调减少. 由于 $\phi'(0)>0,\phi'(\pi/2)<0$, 因此存在唯一的点 $\xi\in(0,\pi/2)$, 使得 $\phi'(\xi)=0$.

这样就知道在 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 时函数 $\phi(x)$ 严格单调增加, 因此有 $\phi(x)\geqslant\phi(0)=0$; 而在 $\xi\leqslant x\leqslant\pi/2$ 时 $\phi(x)$ 严格单调减少, 因此有 $\phi(x)\geqslant\phi(\pi/2)=0$. 这样就证明了在区间 $[0,\pi/2]$ 上处处成立 $\phi(x)\geqslant 0$. □

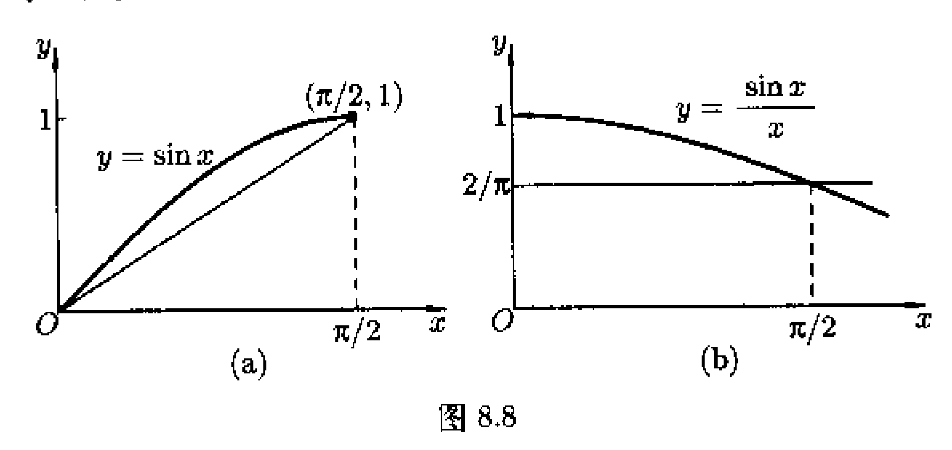


图 8.8

注 从图 8.8(a) 可以想到, 若 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 上为上凸函数, 则就可以得到 Jordan 不等式. 从 $y''=-\sin x$ 可见这是对的. 因此就得到了 Jordan 不等式的第三个证明.

用 Taylor 公式也是证明不等式的一种方法. 例如下一个例题中就同时提供了关于函数 $\ln(1+x)$ 的许多不等式.

例题 8.5.7 当 $x>0$ 时, 证明: 对每个自然数 n 成立不等式

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

证 写出函数 $\ln(1+x)$ 的带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

其中 $0<\theta<1$. 由于 $x>0$, 右边的余项的符号由 $(-1)^n$ 决定. 当 n 为偶数时该项大于 0, 而当 n 为奇数时该项小于 0. 这样就得到所要求证的不等式. □

8.5.2 用凸性证不等式

这里的基本工具是 Jensen 不等式 (8.11) (见命题 8.4.7). 在那里已经提到, 该不等式对所有下凸函数成立, 而并不要求二阶可微的条件. 但用二阶导数的符号来验证一个给定函数是否下凸还是一个很实际的方法.

在下面的前三个不等式统称为经典不等式. 由于它们在数学中的重要性, 均作为命题给出. 第一个不等式即平均值不等式 (即命题 1.3.3) 的推广.

命题 8.5.1 (广义的算术平均值–几何平均值不等式) 设有非负数 $x_1,\cdots,x_n$ 和正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 且 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$, 则成立不等式

$$\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \tag{8.14}$$

其中当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立等号.

证 令 $f(u)=-\ln u,\ u>0$. 由于 $f''(u)=1/u^2>0$, 因此 $f(u)$ 是严格下凸函数 (用命题 8.4.6). 用 Jensen 不等式 (8.11) 得到

$$-\ln\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\Big)\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ln x_k.$$

移项并利用对数函数的单调性, 即可得到所要求证的不等式. 关于其中成立等号的条件已在命题 8.4.7 中得到证明. □

注 若取 $\lambda_i=1/n,\ i=1,2,\cdots,n$, 就得到普通的平均值不等式. 此外, 与平均值不等式类似, 有许多不同的方法可以证明以上的广义平均值不等式.

第二个要介绍的 Hölder 不等式是在第一章中的 Cauchy 不等式 (见命题 1.3.5) 的推广, 它在数学的许多领域中起重要作用, 也可以用于证明广义的平均值不等式.

命题 8.5.2 (Hölder 不等式) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 均为非负数, 又有 $p>1,\ q>1$, 且满足 (共轭) 条件

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

则成立不等式

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{8.15}$$

其中成立等号的充分必要条件是数组 $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p$ 和 $y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q$ 成比例.

证 先对于至少有一个数组中的每个数都大于 0 的情况作出证明. 为确定起见, 不妨设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中的每个数都大于 0, 则可证明如下.

取函数 $f(u) = u^p$, $u \geqslant 0$. 由于 $f''(u) = p(p-1)u^{p-2} \geqslant 0$, 因此 $f(u)$ 是严格下凸函数. 令

$$\lambda_k = \frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}, u_k = x_k y_k^{1-q}, k = 1, 2, \cdots, n,$$

并代入 Jensen 不等式 (8.11), 就有

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q} \cdot (x_k y_k^{1-q})^p\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q}. \tag{8.16}$$

其中利用了 p, q 满足条件 $p + q - pq = 0$. 两边开 p 次根, 并略加整理即得

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

关于在 Hölder 不等式中成立等号的条件也可从 Jensen 不等式得到, 即 $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. 从 u_k 的表达式, 可以将这个条件写成为: 存在常数 C, 使成立 $x_k^p = C y_k^q, k = 1, 2, \cdots, n$. 由不等式 (8.15) 的对称性, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中每个数大于 0 的情况的证明完全相同. 而在不等式中成立等号的条件可统一写成为: 存在两个不全为 0 的数 λ 和 μ, 使成立

$$\lambda x_k^p = \mu y_k^q, k = 1, 2, \cdots, n. \tag{8.17}$$

现在讨论其余情况, 即在两个数组中都有某些数为 0 的情况.

若有一个数组中的数全为 0, 则不等式 (8.15) 成立等号, 且只要在 λ 和 μ 中取一个为 0, 就可以使得 (8.17) 成立.

对于两个数组都有部分数为 0, 但不是全为 0 的情况, 可以取定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 将其中为 0 的数 (以及在数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中相同下标的数) 剔除, 就可以归结为前面的情况来证明. 又从不等式 (8.15) 可直接看出, 如有某个 $y_k = 0$, 且在不等式中成立等号, 则相应地也一定有 $x_k = 0$. 因此条件 (8.17) 仍然成立. □

第三个不等式就是下面的 Minkowski 不等式. 当其中的参数 $p=2$ 时就是 n 维 Euclid 空间的三点不等式 (或三角形不等式).

命题 8.5.3 (Minkowski 不等式) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 均为非负数, 又有 $p \geqslant 1$, 则成立不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8.18}$$

当且仅当数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 成比例时成立等号.

证 只需对 $p>1$ 作出证明. 令 $f(u)=(1-u^{\frac{1}{p}})^p, 0<u<1$, 并计算导数

$$f'(u) = -(1-u^{\frac{1}{p}})^{p-1}u^{\frac{1}{p}-1},$$
$$f''(u) = (1-\frac{1}{p})(1-u^{\frac{1}{p}})^{p-2}u^{\frac{1}{p}-2}.$$

可见 $f(u)$ 是严格下凸函数. 令

$$\lambda_k = \frac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p},\ u_k = \left(\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p,$$

这里假定每个 $x_k+y_k \neq 0\ (k=1,2,\cdots,n)$ 成立. 这使得每个 u_k 有意义, 同时保证 $\lambda_k>0$ 成立.

将上述 $\lambda_k, u_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 代入 Jensen 不等式 (8.11), 就有

$$\left[1-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\cdot\left(1-\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k^p}{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p}.$$

在上式两边开 p 次根并加以整理, 就可得到所要的 Minkowski 不等式.

若在该不等式中成立等号, 则从 Jensen 不等式知道有 $u_1=u_2=\cdots=u_n$. 由此可得到两个数组成比例的结论.

最后, 若对某些 (但不是所有) k 有 $x_k+y_k=0$, 则由于 $x_k \geqslant 0$ 和 $y_k \geqslant 0$, 就有 $x_k=y_k=0$. 因此在将它们剔除后就可以归结为前面的情况, 而且并不影响在等号成立时两个数组成比例的结论. 对于两个数组全由 0 组成的极端情况, 命题明显成立. □

注 1 在 $p=2$ 时两个数组中的数的非负性要求可以取消. 但这时成立等号的条件应当改写为: 存在两个不全为 0 的非负数 λ 和 μ, 使得成立

$$\lambda x_k = \mu y_k, k = 1, 2, \cdots, n.$$

读者可以思考这个条件在 n 维 Euclid 空间中的几何意义.

注 2 证明 Minkowski 不等式的方法很多, 例如用数学归纳法或 Hölder 不等式都可以证明它.

下面的不等式是第一章中的 Bernoulli 不等式 (命题 1.3.1) 的推广. 它也可以用凸性来证明. 读者如果对比两者的结论和所用的工具, 就可以对于自己已经向前走了多远有一个了解.

命题 8.5.4 (Bernoulli 不等式) 在 $x > -1$ 时, 对于 $0 < \alpha < 1$ 成立不等式

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x,$$

而对于 $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 1$ 则成立相反的不等式

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x,$$

而且在这些不等式中仅当 $x = 0$ 时成立等号.

证 对于函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 计算导数:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

就可以知道, 当 $0 < \alpha < 1$ 时 $f(x)$ 是严格上凸函数, 而当 $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 1$ 为严格下凸函数. 另一方面 $y = 1 + \alpha x$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线. 应用命题 8.4.5, 就有所要的不等式, 包括成立等号的条件. □

8.5.3 练习题

1. 证明: 当 $x > 1$ 时成立 $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.
2. 证明: 当 $0 < a < b$ 时成立不等式
$$a \ln a + b \ln b > (a+b)(\ln(a+b) - \ln 2).$$
3. 证明: 对任意 $0 < x_1 < x_2$, 成立不等式
$$\frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}.$$
4. 证明以下不等式:

(1) $a^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}(a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_n})$, 其中 $a > 0$;

(2) $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^p \leqslant \dfrac{1}{n}(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)$, 其中 $p > 1$;

(3) 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant (x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n})^{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}.$$

5. 证明: 对于 $0<\alpha<1$ 和 $x>1$ 成立 $x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0$, 而当 $\alpha>1$ 时不等式反向成立.

6. 从命题 2.5.1 已知对每个 $n\in\mathbf{N}_+$ 成立不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

作为进一步的发展, 求出最大的 α 和最小的 β, 使得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta} \quad \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

(本题与例题 8.2.3 有联系.)

7. 证明: 对 $0<a<b$ 成立以下不等式:

$$a<\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b.$$

8. 对于 $2n$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 定义加权的 t 阶平均值 (或 t 阶和) 为

$$M_t(x,\lambda)=\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

它在 $t=-1$ 时为调和平均值, $t=1$ 时为算术平均值, $t=2$ 时为平方平均值 (即均方根值). 又若在 $t=0, +\infty, -\infty$ 时用极限作补充定义, 则在 $t=0$ 时为几何平均值, $t=+\infty$ 时为 $\max\{x\}$, $t=-\infty$ 时为 $\min\{x\}$. 这样就使 $M_t(x,\lambda)$ 在 $-\infty\leqslant t\leqslant+\infty$ 上处处有定义. 证明: $M_t(x,\lambda)$ 是 t 的单调增加函数, 在 $n>1$ 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等时为 t 的严格单调增加函数.

9. 证明: 若在 Minkowski 不等式 (8.18) 中的参数 $p\geqslant 1$ 的条件改为 $0<p<1$, 则不等式反向成立.

10. 证明 Young 不等式: 若 $x, y\geqslant 0$, $p, q>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则成立不等式

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}.$$

11. 试用 Young 不等式证明: (1)广义的算术平均值–几何平均值不等式; (2) Hölder 不等式.

12. 设 f 和 ϕ 在 $x \geqslant a$ 时可微, $f(a)=\phi(a)$, 且当 $x \geqslant a$ 时, 成立 $|f'(x)| \leqslant \phi'(x)$, 证明: 当 $x \geqslant a$ 时, 成立 $|f(x)-f(a)| \leqslant \phi(x)-\phi(a)$.

13. 设 f 满足 $f(1)=1$, 且当 $x \geqslant 1$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$, 证明: 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 且小于 $1+\pi/4$.

14. 设 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是每行每列的和均等于 1 的非负元素矩阵, 又有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中两个向量的所有元素也都是非负数, 证明: $y_1\cdots y_n \geqslant x_1\cdots x_n$.

15. 若记

$$T_n(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

为 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $2n+1$ 次 Taylor 多项式, 证明:.

$$\sin x > \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \text{其中 } x>0,\ n \text{ 为奇数},$$
$$\sin x < \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \text{其中 } x>0,\ n \text{ 为偶数}.$$

(例题 8.5.3 是本题的一个特例. 类似地可以建立关于 $\cos x$ 的结果.)

16. 证明例题 8.5.4 中右边的不等式.

§8.6 函数作图

在用微分学知识作函数 $y=f(x)$ 的图像时, 应注意以下基本内容:

1. 基本初等函数的图像 (中学数学中的基本内容).
2. 多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的图像, 特别是其中 $n=2,3$ 时的所有可能情况, 以及 n 为奇数和偶数时的各种可能情况.

3. 利用某个函数的已知图像经过简单变换得到新的图像的方法. 这里的内容有, 设已知 $y=f(x)$ 的图像, 求以下函数的图像:

(1) $y=f(-x)$;　　(2) $y=-f(x)$;

(3) $y=-f(-x)$;　　(4) $x=f(y)$;

(5) $y=f(x+a)$;　　(6) $y=f(kx)$;

(7) $y=kf(x)$;　　(8) $y=f(x)+a$;

(9) $y=|f(x)|$.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像, 作出函数 $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$ 的图像.

注 熟练掌握以上技巧对于作出函数的大致图像 (即所谓作草图) 有很大帮助. 作草图时不需要微分学的知识, 但是若能将作草图的方法与微分学相结合, 就可以既迅速又准确地作出函数的图像.

对于函数 $y=f(x)$ 的一般作图步骤在教科书中均有介绍, 这里不必重复. 对于用参数方程表示的函数 $x=x(t), y=y(t)$ 的作图问题, 一般是先分别作出 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 的图像, 然后再拼成为一张图 (见下面的例题). 对于用方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数, 往往引入参数 t 而转化为上一问题.

8.6.1 例题

例题 8.6.1 作出用参数方程 $x=2t-4t^3$, $y=t^2-3t^4$ 给出的曲线图像.

证 $x(t)$ 和 $y(t)$ 只是 t 的三次和四次多项式, 容易分别作出它们的图像如图 8.9(a)、8.9(b) 所示:

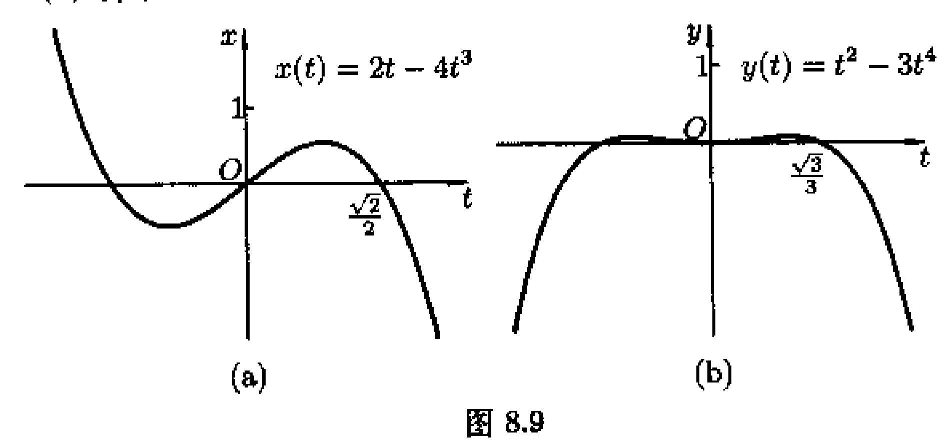


图 8.9

关于三次多项式 $x(t)=2t-4t^3$ 的主要分析如下. $x(t)$ 是奇函数. 导函数 $x'_t=2-12t^2$ 在 $t=\pm1/\sqrt{6}\approx\pm0.408\,2$ 处为 0, 是极小值点和极大值点. 极小值

和极大值为 $\pm 2\sqrt{6}/9 \approx \pm 0.544\,3$. 函数 $x(t)$ 有三个零点: 0 和 $\pm\sqrt{2}/2 \approx \pm 0.707\,1$. 此外 $x(-1) = 2$, $x(1) = -2$.

关于四次多项式 $y = t^2 - 3t^4$ 的主要分析如下. $y(t)$ 是偶函数. 导函数 $y'_t = 2t - 12t^3$ 有三个零点: 0 和 $\pm 1/\sqrt{6} \approx \pm 0.408\,2$. 其中 $t = 0$ 为极小值点, 极小值为 0. 其他两个零点是 $y(t)$ 的极大值点, 极大值为 $1/12 \approx 0.083\,3$. $y(t)$ 除了二重零点 0 之外还有两个零点: $\pm\sqrt{3}/3 \approx \pm 0.577\,4$.

现在已经可以将以上分析合并以得到所要求的参数方程的图像, 这就是图 8.10, 其中参数 t 的变化范围为从 -0.95 到 0.95.

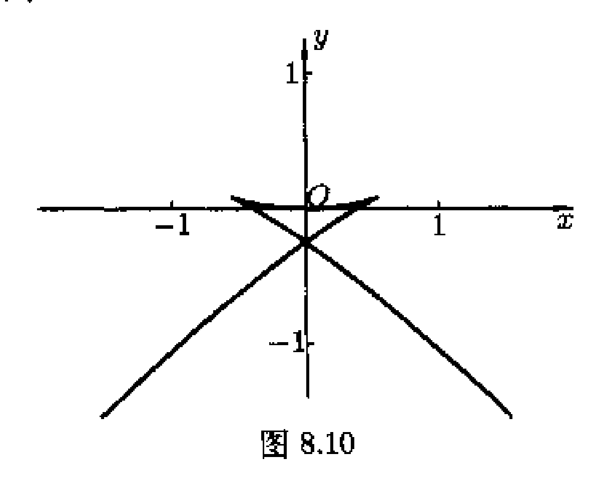


图 8.10

图 8.10 的作法如下. 首先, 当 x 换为 $-x$ 时, 对应的参数值 t 也反号, 但 y 是 t 的偶函数, 从而可见在 xOy 坐标系中曲线关于 y 轴对称. 因此以下只需讨论参数 $t > 0$ 的情况. 根据 6.2.3 小节的参数方程求导法则, 就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = t \cdot \frac{1 - 6t^2}{1 - 6t^2},$$

因此当 $t \neq 1/\sqrt{6} \approx \pm 0.408\,2$ 时, 就得到 $y'_x = t$.

从前面对 x'_t 和 y'_t 的分析已经知道当 $t = 1/\sqrt{6}$ 时这两个导数均为 0, 我们将这样的点称为奇点. 这是本例子中的主要困难. 由于关于 y 轴对称, 因此有两个奇点: $(\pm 2\sqrt{6}/9, 1/12)$, 两个坐标的近似值为 $\pm 0.544\,3$ 和 $0.083\,3$.

当 t 从 0 变化到 $1/\sqrt{6}$ 时, 由于 $y'_x = t$, 而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为 t 的严格单调增加函数, 因此可以知道 y 是 x 的严格单调增加函数. 又由于导函数 y'_x 也是 x 的严格单调增加函数, 因此 $y = y(x)$ 是下凸函数.

从同样的分析可以知道, 当 t 从 $1/\sqrt{6}$ 起增加时, y 是 x 的严格单调减少函数, 而且是上凸函数.

从前面已经得到的导数公式可以知道有

$$\lim_{t \to 1/\sqrt{6}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408\,2,$$

因此在奇点处存在切线. 确切的说, 在奇点 $(2\sqrt{6}/9, 1/12)$ 的左侧邻近, 存在 $y = y(x)$ 的两个分支, 它们在 $x = 1/\sqrt{6}$ 处存在相同的左侧导数. (这里对每一支可以应用命题 7.1.7, 即单侧导数极限定理.) 我们将这样的奇点称为**尖点**.

根据对称性就可以得到 $t < 0$ 时的曲线图像. 此外, 从表达式可以知道不存在任何渐近线.

值得注意的是，参数方程 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 都是简单的多项式，但在 xOy 平面上的曲线却会出现复杂的性态. 这个例子就是在**突变理论** (Catastrophe Theory) 的 **燕尾突变** (Swallowtail catastrophe) 的分歧集合的图像 (见 [51]). 图 8.10 就是燕尾突变这个名称的由来. 此外，本题又见于数学译林 1992 年第 4 期“数学的基本要求”一文中的题 6.

注 1 以上关于凸性的结论是从导函数 y'_x 的单调性得到的，即利用了命题 8.4.4. 也可以直接计算出

$$y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{2(1-6t^2)},$$

然后用命题 8.4.6 作出结论.

注 2 当 $t \to 0$ 时 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为无穷小量. 由于

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x^2(t)} = \frac{1}{4},$$

可见 $y(t) \sim \dfrac{1}{4}x(t)^2\ (t \to 0)$. 这是对图 8.11 上的曲线在原点附近的渐近描述.

8.6.2 练习题

1. 随手画出一条曲线代表 $y = f(x)$，然后试画出其一阶导函数和二阶导函数的图形. (本题应作为数学分析课程的基本技能来要求.)

2. 证明：曲线 $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点，并作图.

3. 作出以下函数的图像：

   (1) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\ (x>0)$;　　(2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$;

   (3) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$;　　(4) $y = (1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$;

   (5) $y = \dfrac{\ln x}{x}\ (x>0)$;　　(6) $y = x^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-x}$;

   (7) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;　　(8) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}\ (a>0)$;

   (9) $y = x^x\ (x>0)$;　　(10) $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$.

4. 证明：方程 $x^y = y^x$ 在第一象限内的图像由一条直线和一条曲线组成，并作出此图像.

5. 作出以下用参数方程给出的曲线:

(1) $x=t^2-2,\ y=t(t^2-2)$;

(2) $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3$;

(3) $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$;

(4) $x=t-t^3,\ y=1-t^4$;

(5) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ (摆线);

(6) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ (圆的渐开线).

§8.7 方程求根与近似计算

方程求根是一个很有实际意义的问题, 在本书中到目前为止也已多次出现. 实际上, 研究迭代生成数列的动机之一就是求方程的近似解. 这方面的一个基本定理就是连续函数的零点存在定理. 在例题 5.2.1 的注解 2 中已经指出, 用闭区间套定理给出的二分法证明同时就提供了一种近似求根方法. 在这一节中我们将介绍 Newton 求根法. 它不仅对方程求根问题是一种有效的计算方法, 同时在整个计算数学领域中都是重要的基本方法. 在数学分析教材中关于方程求根的材料还可以参看 [14] 第一卷的第四章第 4 节, [26] 的第一卷第八章.

8.7.1 迭代算法的收敛速度

在第二章的 2.5.2 小节中已经看到, 在求自然对数的底 e 的近似值时, 不同的计算方法的效果完全不一样. 这是因为在那里的两个数列收敛于 e 的速度有明显的不同. 因此在作迭代计算时必须考虑方法的效率. 在本小节我们将引进迭代算法的阶的概念, 为下一节介绍 Newton 求根法作好准备. 同时还介绍计算圆周率的两种不同的迭代算法.

现在引入迭代算法的阶的定义. 设某个迭代算法的第 n 次计算的误差为 ε_n. 若存在一个常数 α, 使得接连两次的误差之间满足递推估计式

$$k\varepsilon_n^\alpha \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant K\varepsilon_n^\alpha, \tag{8.19}$$

其中 k, K 为两个正常数, 则称此算法为 α 阶算法. 其特例之一是存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^\alpha}=A\neq 0, \tag{8.20}$$

则算法的阶为 α. 这时当 n 足够大时成立 $\varepsilon_{n+1}\approx A\varepsilon_n^\alpha$. 又若对某个算法只知道公式 (8.19) 右边的不等式成立, 则可以说该算法的阶不低于 α.

对于一般的收敛数列来说, 若有 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 而误差 $\varepsilon_n = |x_n - a|\,(n\in\mathbf{N}_+)$ 满足 (8.19) 或 (8.20), 则称这个数列的收敛速度为 α 阶.

在 $\alpha = 1$ 时的算法称为一阶 (线性) 算法. 不难看出一阶算法的收敛速度是比较慢的. 为简单起见, 不妨设有 $\varepsilon_{n+1} \approx C\varepsilon_n$, C 为某个正常数, 则就可以得到

$$\varepsilon_n \approx C^n \varepsilon_0. \tag{8.21}$$

可见常数 C 必须小于 1, 而且越小越好. 又可以看出, 为了使精度达到 10^{-n} 所需的迭代次数总是 $O(n)$ 的量级.

具有一阶收敛速度的数列在第二章中很多. 从 (8.20) 可见, 只要 $\{x_n\}$ 为无穷小量, 且满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = A \neq 0$$

(参见 2.7.3 小节的第一组参考题中的第 4 题), 则 $\{x_n\}$ 就是一阶收敛于 0 的数列. (当然在第二章中还有许多收敛速度远低于一阶的数列.)

现在举出一个一阶算法的重要例子. 这就是计算圆周率的 Archimedes–刘徽算法 (见第二章 2.7.3 小节的第一组参考题中的第 20 题).

例题 8.7.1 设 $a_1 > b_1 > 0$, 并用递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n},\ n\in\mathbf{N}_+, \tag{8.22}$$

作迭代, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 以一阶速度收敛于同一极限.

证 在这里只对收敛速度进行分析. 应用与例题 2.3.5 中类似的方法即可证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限. 记此极限为 $A > 0$, 即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A,$$

又记

$$\varepsilon_n = a_n - b_n, n\in\mathbf{N}_+,$$

则可以对收敛速度分析如下. 首先进行恒等式运算

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= a_{n+1}^2 - a_{n+1}b_n = a_{n+1}(a_{n+1} - b_n) \\ &= a_{n+1}\cdot\frac{2a_nb_n - b_n(a_n+b_n)}{a_n+b_n} = \frac{a_{n+1}b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}, \end{aligned}$$

因此得到

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{a_{n+1}b_n}{(a_{n+1}+b_{n+1})(a_n+b_n)}\cdot\varepsilon_n.$$

利用 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限 $A>0$, 就有近似估计

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{4}\varepsilon_n,$$

因此收敛速度为一阶. □

注 1 若取 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$, 即单位圆的外切和内接正 6 边形的半周长, 可以证明极限 $A = \pi$. 这就是计算圆周率的 Archimedes–刘徽算法. 从以上分析有

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{2^{10}} \approx 0.001,$$

可见这种算法每迭代 5 次大致可以增加 3 位新的有效数字. 这个估计与用这个算法求 π 的大量实际计算完全符合.

注 2 Archimedes-刘徽算法有个变形: 令 $A_n = 1/a_n$, $B_n = 1/b_n$, 有递推式:

$$A_{n+1} = \frac{A_n + B_n}{2},\ B_{n+1} = \sqrt{A_{n+1}B_n}. \tag{8.23}$$

与算法 (8.22) 比较, 每次迭代的计算量少得多. 但是这个改进并没有提高收敛速度. 若仍令 $\varepsilon_n = B_n - A_n$, 则还是得到 $\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{4}\varepsilon_n$.

当 $\alpha = 2$ 时算法为二阶收敛 (也称为平方收敛). 这时情况大不相同. 为简便起见, 只考虑误差递推估计的单侧不等式

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant K\varepsilon^2. \tag{8.24}$$

上式两边乘以常数 K, 就有 $K\varepsilon_{n+1} \leqslant (K\varepsilon_n)^2$. 因此可以继续做下去, 得到

$$K\varepsilon_{n+1} \leqslant (K\varepsilon_n)^2 \leqslant (K\varepsilon_{n-1})^4 \leqslant \cdots \leqslant (K\varepsilon_0)^{2^{n+1}}.$$

这样就得到

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{K}(K\varepsilon_0)^{2^n}. \tag{8.25}$$

这里的常数 K 不一定要小于 1, 只要取初始值足够好, 使得 $K\varepsilon_0 < 1$ 即可. 这时在公式 (8.25) 右边的表达式收敛于 0 的速度是非常快的.

下一个例题是对在第二章中的例题 2.3.5 (其中的极限是 Gauss 的算术几何平均值) 进行收敛速度的分析.

例题 8.7.2 从 $0<b<a$ 出发, 设 $a_0 = a, b_0 = b$, 并用递推公式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\ n \in \mathbf{N}_+. \tag{8.26}$$

作迭代, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 以二阶速度收敛于同一极限.

证 记极限为 $AG(a,b)$, $\varepsilon_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbf{N}_+$. 利用恒等式

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2,$$

就可以得到

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{4(a_{n+1}+b_{n+1})}\varepsilon_n^2 \approx \frac{1}{8AG(a,b)}\varepsilon_n^2,$$

因此是二阶算法. □

注 迭代公式 (8.26) 与 (8.23) 很相似, 但实际上收敛速度完全不同.

在 1976 年出现了 Salamin–Brent 算法. 它就是以 (8.26) 和上述分析为基础的. 由于收敛速度快, 因此成为一类重要的算法, 具有广泛的应用. 自此以后计算圆周率 π 的新记录大都是用这类新算法得到的. 目前已经有计算 π 的任意高阶的算法. 下面列出计算 π 的二阶算法中的一个算法, 以及它的计算效果. 关于它以及其他有关材料可以从 [4, 1] 中找到.

Salamin–Brent 算法: 令 $a_0 = 1, b_0 = s_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 并用递推公式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \\ b_n &= \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \\ s_n &= s_{n-1} - 2^n(a_n^2 - b_n^2), \\ p_n &= \frac{2a_n^2}{s_n}, \end{aligned}$$

作迭代, 则 $\{p_n\}$ 二阶收敛于 π.

它的计算结果为

迭代次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	25
有效位数	1	4	9	20	42	85	173	347	697	$\cdots$	$\geqslant 4.5 \times 10^6$

从上面的计算结果可以看到, 每迭代一次, 有效位数几乎增加一倍. 实际上, 这是二阶算法的共同特征. 从公式 (8.24) 可以知道, 若常数 $K < 1$, 则一定如此. 这在下面的简单例题中可以看得很清楚.

例题 8.7.3 从初始值 $x_0 = 1$ 开始, 用迭代算法

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$$

求无理数 $\sqrt{2}$ 的近似值, 观察有效位数的增长情况.

解 前几个值很容易计算:

$$x_2 = 1.5,\ x_3 \approx 1.416,\ x_4 \approx 1.414\,215.$$

与 $\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,3\ldots$ 比较, 可见有效位数分别为 1,3,6. 为了继续计算下去, 我们需要使用如 Mathematica 那样的软件. 具体地说, 即每次将 x_n 与 $\sqrt{2}$ 都计算到足够多的位数, 然后进行比较, 从而确定第 n 次近似值 x_n 的有效位数. 这里只列出实际计算结果:

迭代次数	1	2	3	4	5	6	7	8
有效位数	1	3	6	12	25	49	98	196

实际上, 不难直接验证在这个例题中的迭代算法确实为二阶算法. 用 §2.5 节的方法知数列 $\{x_n\}$ 从 x_2 起严格单调减少收敛于 $\sqrt{2}$. 然后估计迭代误差

$$0 < \varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon_n^2,$$

可见恰好为二阶算法.

我们即将看到, 这个开平方根的算法就是 Newton 求根法的一个例子.

8.7.2 Newton 求根法

可以从不同的角度来导出 Newton 求根法 (也称为 Newton-Raphson 求根法). 第一种推导方法完全来自于 Newton 求根法的几何意义. 从图 8.11 上可以看出已有 $f(a) < 0$ 和 $f(b) > 0$, 因此从连续函数的零点存在定理知道在区间 (a, b) 内方程 $f(x) = 0$ 一定有根. 在图上记这个根为 ξ. 问题是如何计算出根 ξ 的近似值.

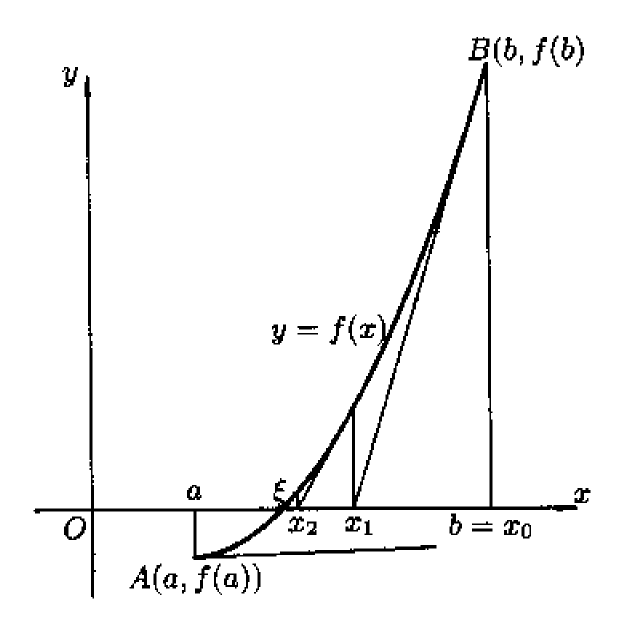


图 8.11

以 $b = x_0$ 为初值, 在点 $B(b, f(b))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 与 x 轴的交点记为 x_1. 然后再在点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 与 x 轴交于点 x_2. 如此进行下去, 不难得到一般的递推公式是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{8.27}$$

从图 8.11 可以看出，所得到的数列 $\{x_n\}$ 有可能会很快收敛到方程 $f(x)=0$ 的根 ξ. 这就是 Newton 求根法，也称为 Newton 切线法.

但这里实际上有许多问题需要研究. 首先，若设方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 中只有唯一的一个根 ξ 时，是否一定成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

其次，这这个算法的收敛速度如何? 此外还有一个如何取初始值的问题. 在图 8.11 上从点 $A(a,f(a))$ 也作出了曲线 $y=f(x)$ 的切线，但它与 x 轴的交点 (在图上未画出) 很可能会越出函数 $f(x)$ 的定义域.

注 可以从完全不同的角度导出 Newton 求根法. 例如，假定已得到根 ξ 的第 n 个近似值 x_n，又设 f 二阶可微，则可以写出带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式:

$$0=f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{f''(\theta_n)}{2}(\xi-x_n)^2, \tag{8.28}$$

其中的中值 θ_n 在 x_n 和 ξ 之间. 在公式 (8.28) 中弃去右边的最后一项，并将由此得到的根 ξ 的近似值记为 x_{n+1}，就得到了前面已有的公式 (8.27). 在将 Newton 求根法推广到高维空间时用这种局部线性化的方法没有本质上的困难.

现在给出保证 Newton 求根法能够成功的一组充分条件，并证明它的收敛速度恰好是二阶. 为直观起见，下面所述的条件均与图 8.11 一致. 读者可自行写出与这组充分条件平行的其他充分条件.

命题 8.7.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可微，且满足以下条件

1. $f(a)<0, f(b)>0$;
2. $f'(x)>0\ \forall x\in[a,b]$;
3. $f''(x)>0\ \forall x\in[a,b]$;
4. 取 $x_0=b$ 为初始值;

那么就有

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 存在唯一的根 ξ;

(2) 由递推公式 (8.27) 得到的数列 $\{x_n\}$ 是在区间 $[a,b]$ 中的严格单调减少数列，且以 ξ 为极限;

(3) 数列 $\{x_n\}$ 的收敛速度为二阶.

证 从连续函数的零点存在定理知道方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 中有根. 从 $f'(x)$ 在区间上处处大于 0 可知函数 $f(x)$ 严格单调增加，因此方程的根唯一.

从公式 (8.28) 和 $f''(x)>0\ \forall x\in[a,b]$，可见成立

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)<0\ \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

由此即可得到

$$\xi<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}\ \forall n\in\mathbf{N}_+.$$

从递推公式 (8.27) 又可看出只要 $f(x_n)>0$, 就有

$$x_{n+1}<x_n$$

成立. 由于初始值 $x_0=b$ 处有 $f(b)>0$, 而当 $x_n>\xi$ 时就有 $f(x_n)>0$, 因此就保证了数列 $\{x_n\}$ 是严格单调减少数列, 且以 ξ 为下界. 记该数列的极限为 η, 在公式 (8.27) 两边令 $n\to\infty$, 得到

$$\eta=\eta-\frac{f(\eta)}{f'(\eta)},$$

可见 $f(\eta)=0$. 由于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中的根唯一, 因此 $\eta=\xi$. 这样就证明了 Newton 求根法所得到的迭代数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程在区间 $[a,b]$ 中的唯一根.

现在用 Taylor 公式 (8.28) 估计迭代误差

$$\begin{aligned}0<x_{n+1}-\xi&=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\xi=\frac{(x_n-\xi)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}\\&=\frac{f''(\theta_n)(x_n-\xi)^2}{2f'(x_n)},\end{aligned}$$

其中 $\theta_n\in(\xi,x_n)$. 利用 f'' 连续且处处大于 0, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}=\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\neq0,$$

因此 $\{x_n\}$ 二阶收敛于 ξ. □

注 1 容易看到在命题中的某些条件可以放宽, 而仍保证迭代数列为二阶收敛或不低于二阶收敛. 但另一方面也可以举出各种例子, 说明在 4 个条件中的某些条件不成立时, Newton 求根法可能失败. 一般而言, Newton 求根法在有拐点、重根和多根时会有困难.

注 2 不难得到 Newton 求根法的先验估计和事后估计 (可以与命题 3.4.4, 即压缩映射原理中的结果作比较). 由于 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微, 因此在命题的条件下 f'' 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M>0$, 而 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 有最小值 $m=f'(a)>0$. 从证明中关于迭代误差的估计有

$$|x_{n+1}-\xi|\leqslant\frac{M}{2m}|x_n-\xi|^2,$$

代入公式 (8.25) 就得到

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}|x_0-\xi|\right)^{2^n}.$$

在计算前，用它可以估计为达到指定精度所需的迭代次数，即先验估计.

注意: 为了满足 $\frac{M}{2m}|x_0-\xi|<1$ 的要求，区间 $[a,b]$ 的长度应当满足不等式

$$b-a<\frac{2m}{M}.$$

但从命题的证明知道，即使这个条件不成立，迭代数列仍然二阶收敛.

再利用 Lagrange 中值定理得到

$$|f(x_n)-f(\xi)|=|f(x_n)|\geqslant m|x_n-\xi|,$$

又用 Taylor 公式有

$$\begin{aligned}f(x_n)&=f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\frac{f''(\eta)}{2}(x_n-x_{n-1})^2\\&=\frac{f''(\eta)}{2}(x_n-x_{n-1})^2,\end{aligned}$$

其中 η 在 x_n 与 x_{n-1} 之间，就可以得到

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{1}{m}|f(x_n)|\leqslant\frac{M}{2m}|x_n-x_{n-1}|^2.$$

这可用于从相继两次计算的结果去估计当时的误差大小，即事后估计..

例题 8.7.4 用 Newton 求根法导出开平方根的迭代算法.

解 设要求正数 A 的平方根. 取函数 $f(x)=x^2-A$，求 $\sqrt{A}$ 的问题就成为方程求根问题了. 将 f 代入迭代公式 (8.27) 中，就得到

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-A}{2x_n}=\frac{x_n}{2}+\frac{A}{2x_n}.\quad\square$$

注 1 在 $A=2$ 时就得到例题 8.7.3 中的算法. 实际上本题的算法已在 2.6.3 小节的练习题 8 中出现. 其中练习题 9 还给出了求平方根的一个 3 阶算法.

注 2 这个算法的历史可以上溯到古代巴比伦文明 (见 [35]). 其思路可能是: 如果 x 是 $\sqrt{A}$ 的一个近似值，那么 A/x 也是一个近似值，这两个近似值的乘积等于 A，而且分别在 $\sqrt{A}$ 的两侧，因此取算术平均值可能会得到更好的结果.

8.7.3 练习题

本节的计算题应当根据在学习中所能使用的计算工具来安排. 下面的题中只有第 1 题是计算题, 且只需用计算器.

1. 用 Newton 求根法计算 (要求精确到 0.000 1):

   (1) $x^3-2x^2-4x-7=0$ 在 $[3,4]$ 之间的根的近似值;

   (2) $\sin x=1-x$ 的根的近似值.

2. 在命题 8.7.1 中给出了保证 Newton 求根法的充分条件, 其中共有 4 项要求. 试举出例子, 说明不满足其中的某些要求时, 用 Newton 求根法有可能失败.
3. 证明: 在例题 5.2.1 中提供的二分法是方程求根的一阶算法.
4. 证明: 2.6.3 小节的题 9 中的算法是求平方根的三阶算法.
5. 设 $A>0$, 从 $x_0>0$ 出发用递推公式

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^3+2A)}{2x_n^3+A}$$

   作迭代, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 求出其极限, 并确定其收敛的阶.

6. 用 Newton 求根法设计一个求 $\sqrt[k]{A}$ $(A>0,k>0)$ 的迭代算法, 并对其收敛速度作出分析.
7. 用 Newton 求根法设计一个求 $\dfrac{1}{A}$ 的迭代算法, 其中只用加法和乘法运算, 并对其收敛速度作出分析.

§8.8 对于教学的建议

微分学的应用极其广泛, 本章只介绍了其中的一部分内容, 主要是对于函数的研究, 还包括极限计算与方程求根的近似计算方法. 其他如曲率、渐屈线与渐伸线等在几何学上的应用均未收入. 有需要的读者可以从 [14, 7, 68] 等文献中找到微分学应用方面的更多材料.

8.8.1 学习要点

1. L'Hospital 法则无疑是求函数极限的首选工具. 但是若使用不当则会带来复杂的计算. 如何能综合使用包括 Taylor 公式在内的各种方法, 初学者需要通过大量的训练才能掌握. 今后学了积分学和无穷级数等知识后, 还会提供计算极限的许多新工具. 因此计算极限这一主题并非到此为止. 复习考研的学生尤其要注意这一点.

2. 微分学在函数作图方面的应用是明显的. 但是应当看到, 除了用微分学的作图方法之外, 还存在另一种作草图的简便方法. 这就是利用曲线的 “四则运算” 和移位、按比例放大缩小等技巧, 将曲线的大致趋势迅速确定出来. 实际上很多人都无师自通地会用这种方法. 值得注意的是在部分教科书中还专门介绍了这个方法. 在 [42] 的上册 63 页还为此起了个名字 “图形合成法”. 在 [68] 的一卷一分册 303 页则强调指出这种方法 “不涉及微分学”. 这两种教材都将作草图的方法放在用微分学作图之前来学习. 希望上习题课的教师注意不要漏掉这方面的训练.

3. 凸函数在数学中是一类很重要的函数, 在理论和应用上均有其独特的地位. 有关凸函数的考题在考研中也是常见的. 本章对凸函数和有关的不等式作了基本的介绍. 请读者注意其中每个结论均有明显的几何意义, 由此出发不难掌握有关的结论和证明. 此外, 在凸函数中的许多有关问题可以从不利用导数、利用一阶导数和利用二阶导数三个层次来进行研究. 一个典型例子就是在本书中出现多次的 Jensen 不等式 (即命题 8.4.7).

4. 不等式在几乎每个数学领域中都是一个重要主题. 可以看出, 与本书第一章的 §1.3 节的初等不等式相比, 在本章中我们对不等式的认识上升到了一个全新的水平. 事实上在今后, 随着数学分析 (以及其他课程) 的学习, 不等式会一再出现, 在内容和方法上都会有层出不穷的新东西. 例如在 8.5.2 小节中的三个经典不等式在积分学和无穷级数中就都会遇到. 这方面的内容极其丰富, §8.5 节是用微分学来研究不等式, 在后面的 §11.2 节则是用积分学来研究不等式. 应当指出, [30] 是我国学者所写的不等式方面的专著, 材料极其丰富, 很有参考价值.

5. 近似计算问题应当在数学分析的教学中占有一定的份量. 尽早培养学生在这方面的意识是数学分析在今后的改革方向之一. 从第二章开始, 本书注意了介绍这方面的内容. 当然这里还有许多不足之处. 若有可能, 希望在数学分析的教学中加入简单编程计算和使用 Mathematica 等软件的内容. 实际上本书的部分例题就是用 Mathematica 来计算的. 例如, 前面的例题 8.7.3 中需要有 $\sqrt{2}$ 的有效位数任意长的近似值, 用手算根本不行.

6. **对习题课的建议** 本章习题课的材料很丰富, 都比较具体. 需要注意的是不要在习题课上草草过场, 对有关材料要充分展开. 让学生在应用微分学解决实际问题中加强应用的意识, 提高应用的能力. 凸函数, 不等式都是很重要的题材, 需要在习题课上专门花时间训练.

8.8.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $|f(x)+f'(x)| \leqslant 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 证明: $|f(x)| \leqslant 1$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$. 求出 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 例题 8.1.10 可以推广如下: 设正数数列 $\{x_n\}$ 为满足递推公式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的无穷小量, 函数 f 有 Maclaurin 展开式 $f(x)=x+Ax^k+o(x^k)$ $(x\to 0)$, 其中 k 为大于 1 的某自然数, 系数 $A\neq 0$, 证明: 有 $\alpha>0$, 使得存在非零极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^{\alpha}$, 并求出此极限.

4. 设 $f\in C[a,b]$, 证明: f 在 (a,b) 内没有极值点的充分必要条件是 f 在区间 $[a,b]$ 上为严格单调函数.

5. 证明关于三点不等式 (见命题 1.3.4) 的一个推广: 在 $0<p<1$ 时成立不等式 $|a+b|^p \leqslant |a|^p+|b|^p$.

6. 证明: 对每个自然数 n, 成立不等式

$$\frac{\mathrm{e}}{2n+2}<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{\mathrm{e}}{2n+1}.$$

7. 证明: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时成立不等式 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$.

8. 证明: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时成立不等式 $2\sin x+\tan x \geqslant 3x$.

9. 证明: 当 $0<x<1$ 时成立不等式

$$\pi<\frac{\sin \pi x}{x(1-x)}\leqslant 4.$$

10. 证明: 当 $x\in[0,\pi/2]$ 时成立比 Jordan 不等式 (例题 8.5.6) 更好的结果:

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x+\frac{1}{12\pi}x(\pi^2-4x^2).$$

11. 证明: 对 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立不等式

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n}\leqslant\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)^n},$$

并讨论成立等号的条件.

12. 证明: 当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时, 成立 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$, 而在 $x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 时不等式反向.

13. 设 $p>1$, $a,b>0$, 证明:

(1) 当 $t>0$ 时成立

$$\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+(1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}}b\geqslant a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}};$$

(2) 当 $0<t<1$ 时成立

$$t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p\geqslant(a+b)^p.$$

14. 设 $p(x)$ 为三次多项式, $p(a)=p(b)=0$, 证明: $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号的充分必要条件是 $p'(a)p'(b)\leqslant 0$.

15. 证明: 在 $\mathbf{R}$ 上满足函数方程 $g(g(x))=-x^3+x+1$ 的可微函数是不存在的.

16. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可微, $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立 $f''(\xi)\geqslant 8$

17. 设 f 在 $[-1,1]$ 上三阶可微, $f(0)=f'(0)=0, f(1)=1, f(-1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使成立 $f'''(\xi)\geqslant 3$.

18. 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=f(b)=0$, Wronski 行列式

$$W(f,g)=\begin{vmatrix}f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}\neq 0\,\forall x\in[a,b],$$

证明: $g(x)$ 在 (a,b) 中有零点.

第二组参考题

1. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少, 可微, 且满足不等式 $0<f(x)<|f'(x)|$, 证明: 当 $0<x<1$ 时, 成立不等式

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. 若 $f(0)=0$, 且存在 $f^{(n+1)}(0)$, 定义

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$$

证明: $g(x)$ 的 n 阶导函数 $g^{(n)}$ 在 $x=0$ 连续, 且 $g^{(n)}(0)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$. (例题 8.1.9 的推广.)

3. 设 f 在点 a 存在 $f^{(n)}(a)$, 且 $f(a)=0$, 令 $F(x)=[f(x)]^n$, 证明: 对于 $k=0,1,\cdots,n-1$, $F^{(k)}(a)=0$. 又举例说明: 导数 $f^{(n)}(a)$ 存在的条件不能去掉.

4. 记 $P_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 证明:

   (1) n 为偶数时 $P_n(x)>0\ \forall x\in\mathbf{R}$;

   (2) n 为奇数时 $P_n(x)$ 有唯一的实零点;

   (3) 若将 $P_{2n+1}(x)$ 的零点记为 x_n, $n\in\mathbf{N}_+$, 则 $\{x_n\}$ 是严格单调减少的负无穷大量;

   (4) 当 $x<0$ 时成立不等式 $P_{2n}(x)>\mathrm{e}^x>P_{2n+1}(x)$;

   (5) 当 $x>0$ 时成立不等式 $\mathrm{e}^x>P_n(x)\geqslant\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;

   (6) 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=\mathrm{e}^x$.

   (本题中不需要用 Taylor 展开式的知识.)

5. 定义 $x_0=a$, $x_1=b$, $x_{n+1}=\dfrac{(2n-1)x_n+x_{n-1}}{2n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设 $0<x_0<y_0\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 并用递推公式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 和 $y_{n+1}=\sin y_n$ 生成两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

7. 证明: 若函数 $y=\dfrac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$ $(\alpha\neq 0)$ 有三个拐点, 则它们必在一条直线上.

8. 下凸函数的 **Jensen 定义**是: 称函数 f 在区间 I 上为下凸, 如果对所有 $x_1,x_2\in I$, 成立

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

证明: 对连续函数来说, 下凸的 Jensen 定义和 §8.4 节中的下凸定义等价.

(确实存在按 Jensen 定义为下凸但不满足 §8.4 节中的下凸定义的函数, 例题 5.1.3 的不连续解就是如此 (参见 [53, 55, 57]).)

9. 设 f 在区间 (a,b) 上按 Jensen 定义为下凸函数, 且至多只有第一类间断点, 证明: f 在 (a,b) 上连续.
10. 设 f 在区间 (a,b) 上按 Jensen 定义为下凸函数, 且在 (a,b) 内的每个闭子区间上有界, 证明: f 在 (a,b) 上连续.
11. 函数 f 在区间 $(-1,1)$ 上二阶可微, $f(0)=f'(0)=0$, 且在该区间上满足不等式 $|f''(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)|$, 证明: $f(x)\equiv 0$.
12. 设 $f(x)$ 为区间 I 上的可微函数, 满足微分方程 $f'(x)=g(f(x))$, 其中 g 是在 f 的值域上有定义的函数, 证明: f 一定是单调函数.
13. 证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微的函数 f 不可能对于一切 x 同时满足不等式 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$.
14. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上三阶可微, 证明: 存在一个点 a 使得

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geqslant 0.$$

15. 设 $p(x)$ 是多项式, 证明: 若对每个 x 成立不等式

$$p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x) \geqslant 0,$$

则 $p(x)\geqslant 0$ 对每个 x 成立.

16. 设 P 为多项式, $P(x)=0$ 有 n 个大于 1 的互异实根, 令

$$Q(x)=(x^2+1)P(x)P'(x)+x[(P(x))^2+(P'(x))^2],$$

证明: $Q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个互异实根.

(下面两个题用于证明在第二章第二组参考题 19 中所用到的结论.)

17. 设 $f(x)=a^x$, 证明: (1) 如 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 无不动点; (2) 如 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 恰有一个不动点; (3) 如 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 有两个不动点.
18. 设 $g(x)=a^{a^x}$, 证明: (1) 如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leqslant a<1$, 则 g 只有一个不动点; (2) 如 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$, 则 g 有三个不动点.
19. 讨论三角方程 $a\sin\theta+b\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0$ 在 $[0,2\pi)$ 中的实根个数.
20. 从平面上的一个定点向一个给定的椭圆可以引出多少条法线? 讨论在什么区域上法线的条数最多.

(本题以及类似的问题最早是由 Appollonius (约公元前 262–前 190 年) 提出和解决的. 又见于数学译林, 1992 年第 4 期, 即 V. I. Arnold 给出的 “构成对物理专业学生的最低限度的数学的一百个问题” 中的的第 7 题.)

第九章 不定积分

本章主要讨论不定积分的计算, 要点是掌握不定积分的基本计算方法与常见的可积函数类. 本章共分三节: 在 §9.1 节中以分部积分法与换元积分法为中心, 通过例题介绍不定积分的计算方法; 在 §9.2 节中讨论几类主要的可积函数; 最后一节为学习要点和参考题.

§9.1 不定积分的计算方法

9.1.1 内容提要

1. 求原函数的运算是求导数运算的逆运算, 即从函数 $F(x)$ 的导函数 $F'(x)$ 出发去求 $F(x)$.
2. **关于原函数的三个基本问题**: (1) 存在性, (2) 唯一性, (3) 如何求. 其中问题 (1) 要到下一章才能解决 (见命题 10.3.3), 问题 (2) 已在前面解决 (见例题 7.1.6). 本章主要是解决问题 (3), 即计算不定积分.
3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数, 则在此区间上 $f(x)$ 是某个函数的导函数, 因此它必须满足导函数的特有性质. 例如, 它一定具有介值性, 且不会有第一类间断点. 反之, 在区间 I 上有第一类间断点的函数在此区间上一定没有原函数. (参见 Darboux 定理, 即命题 7.1.6, 和例题 7.1.1.)
4. 函数 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函数全体, 它是一族函数, 而不只是一个函数. 由于不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 中任意两个函数相差一个常值函数, 因此, 求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 时只要求出 $f(x)$ 的一个原函数, 再加上一个任意常值函数.
5. 初等函数 $f(x)$ 的原函数 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 不一定是初等函数. 如果 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 也是初等函数, 则称 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 可积或积得出来; 反之, 则称其不可积或积不出来. 不定积分的计算就是求出原函数为初等函数的不定积分.

9.1.2 思考题

1. “不定积分” 与 “原函数” 这两个概念有什么区别? 有什么联系?
2. 在 $x=0$ 点不连续的函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有原函数?

3. 在不定积分公式 $\int \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x = |x| + C$ 和 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ 中为什么会出现绝对值号?

4. 下列等式是否正确? 说明理由:

(1) $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$; (2) $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$; (4) $\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(x)$;

其中 $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是指对于 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 中每一个函数求微分所得到的集合.

5. 以下推导中有什么错误? 用分部积分公式可得到以下等式:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

因此推出 $0 = 1$.

9.1.3 基本计算方法

不定积分的基本计算方法有:

1. **第一换元法——凑微分法**, 也称为**直接代换法**: 设 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$, $u = u(x)$ 可微, 则

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

我们称这个方法为凑微分法, 是因为在实际计算时, $u(x)$ 的形式是 "凑出来" 的, 目的是使得被积表达式可以看成为 $f(u)\,\mathrm{d}u$, 同时能积出来.

2. **第二换元法——代入换元法**, 也称为**逆代换法**: 设不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, $x = x(t)$ 可微且存在反函数 $t = t(x)$, 又若 $\int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(t(x)) + C.$$

在使用第二换元法时, 往往会遇到一个问题: 是否一定要求存在反函数, 以及反函数是否要求处处可导? 对此在各种教科书上有不同的条件, 缺乏比较和讨论. 根据美国数学月刊, 101 卷 (1994), 520–526 页 (译文见数学译林, (1994) 348–352 页) 一文的调查, 这确实是在绝大多数教科书中都没有说清楚的一个问题. 我们在下面将介绍其中的证明. 从证明中可以看出, 对于 $t(x)$ 只有一个要求, 即满足恒等式 $x(t(x)) \equiv x$, 其他均无须考虑. 此外, 在 [42] 的 235–236 页中也注意到了这个问题.

3. **分部积分法**: 设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可微, 且在 $u(x)v'(x)$ 和 $v(x)u'(x)$ 中至少有一个存在原函数, 则

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 1 计算不定积分的一般步骤是: 通过代数运算、三角函数公式或换元、分部积分先将被积函数化为若干简单函数的和, 然后应用不定积分的线性运算法则与基本积分公式求出最后的结果. 为此, 在学习时除了必须牢记基本积分公式外, 还需要熟练掌握中学数学中的一些常用公式.

注 2 分部积分法是与求导运算中的乘积求导法则相对应的积分法则. 如果被积函数中出现幂函数, 指数函数, 三角函数这三类函数中两类或两类以上函数的乘积, 或者出现对数函数, 反三角函数, 都可以考虑用分部积分法. 应用分部积分法, 最重要的是如何正确选择 $u(x)$ 与 $v(x)$. 一般说来, 要注意下面两个原则:

(1) $v(x)$ 比较容易求出, (2) $\int v\,\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\,\mathrm{d}v$ 容易计算.

对于上面提到的五类初等函数, 有人总结出 "反对幂三指" 五个字, 这里 "反"、"对"、"幂"、"三"、"指" 依次是反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数和指数函数, 积分时, 一般应将排列次序在后面的函数优先与 $\mathrm{d}x$ 结合成为 $\mathrm{d}v$. (有兴趣的读者可看 [42] 的 237 页和美国数学月刊, 90 卷 (1983), 211 页.)

命题 9.1.1 (第二换元法的证明) 设 $f(x)$ 有原函数, $x = x(t)$ 可微且有 $t = t(x)$ 满足 $x(t(x)) \equiv x$, 又若 $\int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(t(x)) + C.$$

证 已知 $f(x)$ 有原函数, 记为 $U(x)$, 则有 $U'(x) = f(x)$. 又已知 $F(t)$ 满足

$$F'(t) = f(x(t))x'(t).$$

从复合函数求导法则得到

$$\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}t} = U'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t) = F'(t).$$

因此 $U(x(t))$ 和 $F(t)$ 只相差一个常值函数

$$U(x(t)) = F(t) + C.$$

用 $t = t(x)$ 代入, 且利用恒等式 $x(t(x)) \equiv x$, 于是就有

$$U(x(t(x))) = U(x) = F(t(x)) + C,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}F(t(x))}{\mathrm{d}x} = U'(x) = f(x). \quad \square$$

9.1.4 例题

首先, 我们通过一题多解来说明计算不定积分时的多种可能性.

例题 9.1.1 计算 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 1 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$ $\square$

注 1 这是第一换元法, 在其中将 $1/x$ 看成为 u, 将被积表达式看成 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 然后用基本积分公式. 但实际上也可以说是用第二换元法. 令 $x = 1/t$, 这时

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t, \ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}},$$

于是就有

$$I = -\int \left(\frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},$$

以下与解 1 相同. 这个解法中的变换称为 "倒代换", 是一种常用的变量代换. 更一般的还有代换 $x = t^\alpha$, 其中 α 待定.

解 2 $I = \int \frac{x\ \mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1})^2+1} = \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$ $\square$

解 3 令 $x = \sec t$, 则 $\mathrm{d}x = \sec t\ \tan t\,\mathrm{d}t$,

$$I = \int \frac{\sec t\ \tan t}{\sec t\ \tan t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C. \quad \square$$

解 4 令 $\sqrt{x^2-1} = x - t$, 则可解出 $x = (t^2+1)/2t$, 并计算得到

$$\mathrm{d}x = \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t, \ \sqrt{x^2-1} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

因此

$$I = \int \frac{2t\cdot 2t(t^2-1)}{(t^2+1)(1-t^2)2t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= -2\arctan t + C = -2\arctan(x - \sqrt{x^2-1}) + C. \quad \square$$

解 5 令 $\sqrt{x^2-1}=t(x-1)$, 则可解出 $x=(t^2+1)/(t^2-1)$, 并计算得到

$$\mathrm{d}x=-\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2},\ \sqrt{x^2-1}=\frac{2t}{t^2-1}.$$

因此

$$I=\int\frac{(t^2-1)^2(-4t)}{(t^2+1)2t(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$=-2\arctan t+C=-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}+C.\quad\square$$

注 2 最后两种解法中所用的变换称为 Euler变换, 可以证明, 对于型如

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x\quad(a\neq 0)$$

的不定积分 (其中 R 为有理分式), 利用 Euler 变换一定能解决, 见 [14] 中第二卷 269 小节. 然而, 过于一般的方法对于具体问题往往不是最简单的方法. 正如本题的解 3 所示, 对型如 $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ 的不定积分, 用变换 $x=a\sec t$ 有时要比利用 Euler 变换简单得多. 一般来说, 对型如 $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$ 与 $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ 的不定积分, 较为简单的常用变换分别是 $x=a\sin t$ 与 $x=a\tan t$.

注 3 本题的 5 种解法的答案表面上均不相同, 这在不定积分计算中是常见的现象. 由于不定积分是以一个原函数加上任意常值函数的形式来表示的, 而其中原函数的选择是任意的, 彼此之间只相差一个常值函数, 因此表面上就可能不一样, 但它们的导函数必须相同, 否则就出错了. 请初学者注意: **要养成用求导运算来检验不定积分计算结果是否正确的习惯**.

例题 9.1.2 计算不定积分 $I=\int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

解 1 将根号外的一个因子 x 移入到根号下, 并将积分表达式看成为 $f(u)\,\mathrm{d}u$, 其中 $u=x^2$, 就可计算如下:

$$I=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}\right)+C_1$$
$$=\frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})^2+C\quad\left(C=C_1+\frac{\ln 2}{16}\right)$$
$$=\frac{1}{8}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.\quad\square$$

解 2 因为 $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C_1$, 所以由分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{I}{3}-\frac{1}{6}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right).\end{aligned}$$

将 $\frac{1}{3}I$ 移项到左边, 且对两边同除以 $\frac{4}{3}$, 得到

$$I=\frac{1}{4}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)+C.\quad\square$$

本题还有下列解法, 这种解法虽然不容易想到, 但十分简洁.

解 3 因为

$$\left(x^3\sqrt{x^2+1}\right)'=3x^2\sqrt{x^2+1}+\frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}=4x^2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

所以

$$x^2\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{4}\left(\left(x^3\sqrt{x^2+1}\right)'+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

于是

$$I=\frac{1}{4}\left(x^3\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)+C.\quad\square$$

注 1 可由此总结不定积分 $\int x^k\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int\frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ 的一般解法.

注 2 如解 1 所示, 往往可通过加减一个常数的方法来化简不定积分的结果.

注 3 本题解 2 通过分部积分法产生一个关于所求积分的方程, 然后解这个方程得到所求积分, 这样运用分部积分的方法可称为 "**循环法**", 是一种常用的技巧. 特别当被积函数中含有指数函数与三角函数的乘积时, 往往可以用循环法来进行积分. 下面我们再看一道用循环法进行积分的例题.

例题 9.1.3 计算 $I=\int\csc^4x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}I=&\int\csc^2x\,\mathrm{d}(-\cot x)=-\cot x\csc^2x+\int\cot x\,\mathrm{d}(\csc^2x)\\=&-\cot x\csc^2x-2\int(\csc^4x-\csc^2x)\,\mathrm{d}x\\=&-\cot x\csc^2x-2I-2\cot x,\end{aligned}$$

因此得到 $I=-\frac{1}{3}\cot x\csc^2 x-\frac{2}{3}\cot x+C.$ □

例题 9.1.4 计算 $I=\int x\tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$

解 $I=\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sec^2 x\right)=\frac{1}{2}x\sec^2 x-\frac{1}{2}\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}(x\sec^2 x-\tan x)+C.$ □

注 有人用下面的方法做这道题:

错误解法 令 $x=\pi-t$, 则

$$I=\int\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t=\pi\int\frac{\sin t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t-\int\frac{t\sin t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int\mathrm{d}\left(\frac{1}{2\cos^2 t}\right)-I=\frac{\pi}{2}\sec^2 t-I,$$

所以得到

$$I=\frac{\pi}{4}\sec^2 x+C.\quad □$$

用求导还原的方法就可以发现上述结果是错的. 原因是: 虽然 $\int\frac{t\sin t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t$ 与 $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ 的被积函数有相同的形式, 但它们分别是关于不同的变量 t 与 x 的函数, 不能合并. 同样, $\sec^2 t$ 与 $\sec^2 x$ 也是不同的函数, 不能任意替换.

当被积函数含有指数函数、对数函数和反三角函数时, 其不定积分既可以用换元积分法求, 也可以用分部积分法求或用两种方法结合求. 但是, 同一道题, 用不同的方法去解, 其解法的难易程度可能很不相同.

例题 9.1.5 求不定积分 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}-\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\ln x\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)+C$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.\quad □$$

例题 9.1.6 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 将分部积分法和换元法结合起来就很容易解决这个积分问题. 首先用分部积分法计算如下:

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\arctan x}{1+x^2}.$$

然后对最后一个积分用代换 $\arctan x = t$, 就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\arctan x}{1+x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t}\\ &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int (\cos 2t+1)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t + C\\ &= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{4}\arctan x + C.\end{aligned}$$

合并以上结果就得到

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{4}\arctan x + C\\ &= \frac{1}{4}\arctan x\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)} + C.\end{aligned}$$

注 从以上例题的解法可以看出, 对于不定积分而言, 并不存在能对一切情况都适用的固定方法. 初学者必须通过相当数量的解题训练, 积累经验, 才能掌握计算不定积分的技能.

9.1.5 特殊计算方法

(一) 配对积分法 先看下面这道例题:

例题 9.1.7 计算不定积分 $I = \displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$.

分析 注意到 $\displaystyle\int \frac{(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, 又有

$$\int \frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|2\sin x+3\cos x| + C.$$

不难看出, 如果设 $J=\int\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x$, 则 $2I+3J$ 与 $2J-3I$ 是直接可以求出的. 因此为了求 I, 只要解代数方程组就行了. 具体计算从略.

从上面这道题我们看到, 有时为了计算不定积分 $I(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 可以找另一个不定积分 $J(x)=\int g(x)\,\mathrm{d}x$ 及实数 a,b,c,d $(ad-bc\neq 0)$, 使 $af+bg$ 和 $cf+dg$ 的积分都比 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 容易计算. 计算出 $aI(x)+bJ(x)$ 和 $cI(x)+dJ(x)$ 之后, 就容易用代数方法求出 $I(x)$.

例题 9.1.8 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 令 $M(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$, $N(x)=\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$, 则有

$$M(x)-N(x)=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C,$$

$$M(x)+N(x)=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C,$$

因此得到

$$M(x)=\frac{1}{2}[(M(x)+N(x))+(M(x)-N(x))]$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.\quad\square$$

注 本题也可用后面 9.2.1 小节中的标准方法做, 但计算量却要大得多.

(二) 递推法 设 $f_n(x)$ 是变量 x 的函数, 其表达式中含有参数 $n\in\mathbf{N}_+$. 为了计算积分 $I_n=\int f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 可以用各种方法将它化成求参数值较小的积分 $I_{n-k}=\int f_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$ $(0<k\leqslant n)$, 并且继续如此做下去, 直到最后把问题化为求参数值最小的一个或几个积分. 这种计算不定积分的方法, 称为**递推法**.

例题 9.1.9 导出求不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ (n 是自然数) 的递推公式.

解 由分部积分法, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \end{aligned}$$

因此得到递推公式

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n, \quad n \in \mathbf{N}_+. \quad \square$$

例题 9.1.10 设对自然数 m, n, 定义 $I(m,n) = \int \cos^m x\,\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 证明:

$$I(m,n) = \frac{\cos^{m-1}x\,\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}I(m-2,n).$$

证 用分部积分法得到:

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \int \cos^m x\,\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int \cos^{m-1}x\,\sin^n x\,\mathrm{d}(\sin x) \\ &= \cos^{m-1}x\,\sin^{n+1}x - \int \sin x\,\mathrm{d}(\cos^{m-1}x\,\sin^n x), \end{aligned}$$

而最后一个积分可以计算如下

$$\begin{aligned} &\int \sin x\,\mathrm{d}(\cos^{m-1}x\sin^n x) \\ &= \int \sin x[-(m-1)\cos^{m-2}x\sin^{n+1}x + n\cos^m x\sin^{n-1}x]\,\mathrm{d}x \\ &= -(m-1)\int \cos^{m-2}x(1-\cos^2 x)\sin^n x\,\mathrm{d}x + n\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x \\ &= -(m-1)I(m-2,n) + (m+n-1)I(m,n), \end{aligned}$$

加以整理并除以 $m+n$ 即得所要的递推公式. $\square$

虽然建立不定积分的递推公式主要是用分部积分法, 但有时还需要考虑其他方法. 下面我们看一道例题.

例题 9.1.11 设对自然数 $n > 2$, 定义 $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 证明:

$$I_n = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x + I_{n-2}.$$

证 考虑降 n,

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\sin(n-1)x\,\cos x + \sin x\,\cos(n-1)x}{\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{\sin(n-1)x\,\cos x}{\sin x}\,dx + \int \cos(n-1)x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x}\,dx + \int \cos(n-1)x\,dx \\
&= \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x,
\end{aligned}
$$

所以 $I_n = \dfrac{2}{n-1}\sin(n-1)x + I_{n-2}$. □

9.1.6 练习题

1. 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$;

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

(3) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$;

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-1}$;

(6) $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\,dx$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx$;

(8) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}\,dx$;

(9) $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;

(10) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2. 用配对积分法计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2+x^4}$;

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{b\sin x + a\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,dx \quad (a \neq b)$;

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$.

3. 通过计算下列不定积分

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx \quad 与 \quad \int (\cos^4 x + \sin^4 x)\,dx,$$

进而求出不定积分

$$\int \cos^4 x\,dx \quad 和 \quad \int \sin^4 x\,dx.$$

4. 导出计算下列不定积分的递推公式：

(1) $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \sec^n x\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

5. 试求: (1) $\int xf''(x)\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

6. 设对任意自然数 m,n, 定义 $I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 证明：

$$(1)\ I(m,n)=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2);$$

$$(2)\ I(n,n)=-\frac{\cos 2x\sin^{n-1}x}{n2^{n+1}}+\frac{n-1}{4n}I(n-2,n-2).$$

§9.2　几类可积函数

9.2.1　有理函数的积分

有理函数是最基本的可积函数类, 其他可积函数类都是化为有理函数进行积分的. 有理函数可以分解为多项式与真分式的和, 而真分式又可以分解为部分分式的和并求出积分, 因此有理函数的原函数一定是初等函数.

在将真分式分解为部分分式的和时, 理论上是将问题归结为求解线性代数方程组. 这方面的标准理论见 [14] 的第八章第 2 节.

但实际上许多问题可以有很灵活的解法. 这里有一些常用的技巧. 下面我们举例说明：

例题 9.2.1 将 $\frac{1}{1+x^3}$ 化为部分分式的和.

解　对待定的表达式

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2} \tag{9.1}$$

两边同乘以 $1+x$ 后, 令 $x\to -1$, 得 $A=\frac{1}{3}$.

又将 (9.1) 两边同乘以 x 后, 令 $x\to+\infty$, 得 $A+B=0$, 因此 $B=-A=-\frac{1}{3}$. 再在 (9.1) 两边用 $x=0$ 代入, 得 $1=A+C$, 因此 $C=1-A=\frac{2}{3}$.　□

注　从一般理论知道在求部分分式的计算中用四则代数运算就够了. 以上引入的极限计算也是如此. 容易看出, 求 A 的过程就是在 (9.1) 的左边将分母的因子 $(1+x)$ 去掉之后再用 $x=-1$ 代入的结果.

下面举一个比较复杂一点的例子 (见 [68]), 其中的解 1 中不仅有极限计算, 还有求导计算和在复数域中的计算.

例题 9.2.2 求不定积分

$$\int \frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 1 记被积函数为 $R(x)$. 首先要分离出真分式, 得到

$$R(x)=x+\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

根据部分分式理论, 一定有唯一的分解如下:

$$\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{9.2}$$

两边同乘以 $(x-1)^2$ 后令 $x\to 1$, 就得到 $A=-1$. 又两边同乘以 $(x-1)^2$ 后求在点 $x=1$ 处的导数值, 则就可用求导法则计算如下:

$$B=\frac{(5-4+3-6-2)\cdot 4-8\cdot(1-1+1-3-2)}{16}=1.$$

又在 (9.2) 两边同乘以 $(x^2+1)^2$, 再令 $x\to \mathrm{i}$ (复数域中的极限), 就得到①

$$C\mathrm{i}+D=\frac{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+3-2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=1+\mathrm{i},$$

因此 $C=D=1$. 再在 (9.2) 两边令 $x=0$ 代入, 得到 $A-B+D+F=0$, 因此 $F=1$.

最后在 (9.2) 两边同乘以 x, 并令 $x\to+\infty$, 就得到 $1=B+E$, 因此 $E=0$.

以下的积分没有困难, 我们只列出结果为

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2(x^2+1)^2}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\arctan x+C. \quad \square$$

代替用各种手段去确定 (9.2) 中的未知数的思路, 另外还有一种方法值得介绍, 它看似笨拙, 实际上往往很有效 (见 [68]).

解 2 写出 (9.2) 并求出 $A=-1$ 之后, 将右边这一项移到左边, 计算出

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}-\frac{-1}{(x-1)^2}&=\frac{x^5+x^3-x^2-2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\\&=\frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-1}+\cdots,\end{aligned}$$

① 这方面的理论基础要到复变函数论中才能建立. 这里只能作为一种计算法则来使用.

然后就容易求出 $B=1$. 再将这第一项移到左边, 计算得到

$$\frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{x^3+x-2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1},$$

以下从略. □

在将真分式分解为部分分式的和时, 除了用观察法与待定系数法外, 对于一些特殊的情况, 另外有一些方法.

(1) **形如** $\displaystyle\int\frac{Q_m(x)}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$ **的积分**, 其中 $Q_m(x)$ 为 m 次多项式. 对此类积分, 可用换元 $u=x-a$ 或者将 $Q_m(x)$ 展开为 $x=a$ 处的 Taylor多项式.

例题 9.2.3 计算 $\displaystyle\int\frac{1-x^3}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $u=1+x$, 则 $x=u-1$, 因此

$$\int\frac{1-x^3}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-(u-1)^3}{u^4}\mathrm{d}u=\int\left(-\frac{1}{u}+\frac{3}{u^2}-\frac{3}{u^3}+\frac{2}{u^4}\right)\mathrm{d}u$$
$$=-\ln|u|-\frac{3}{u}+\frac{3}{2u^2}-\frac{2}{3u^3}+C$$
$$=-\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{2(x+1)^2}-\frac{2}{3(x+1)^3}+C.\quad\square$$

(2) **形如** $\displaystyle\int\frac{Q_m(x)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$ **的积分**, 其中分母无实根, $Q_m(x)$ 为 m 次多项式. 这时可用带余除法将 $Q_m(x)$ 化成 $Q_{m-2}(x)(x^2+px+q)$ 与一个余项的和, 如果 $m-2\geqslant 2$, 继续对 $Q_{m-2}(x)$ 作带余除法, 直到其次数小于 2 (例题从略).

9.2.2 三角函数有理式的积分

三角函数有理式的积分 $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ 都可以用 "万能变换" $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 化为有理函数进行积分. 但这时产生的有理函数的分母的次数较高, 计算工作量较大. 因此我们往往避免用万能变换, 而是根据具体情况寻找较为简单的解法. 例如,下面的几种变换的计算量往往比用万能变换要小.

1. 如果 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则令 $t=\cos x$;
2. 如果 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则令 $t=\sin x$;
3. 如果 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则令 $t=\tan x$.

例题 9.2.4 计算 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos 2x}$.

解 这属于上面的情况 1, 所以可试用 $t=\cos x$ 计算如下:

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{(\cos^2 x-1)(2\cos^2 x-1)}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)(2t^2-1)}=\int\left(\frac{1}{(t^2-1)}-\frac{2}{2t^2-1}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C. \quad \square
\end{aligned}
$$

例题 9.2.5 计算 $I=\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 1 这属于上面的情况 3, 因此可令 $t=\tan x$ 计算如下:

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cos^4 x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^4 x}\mathrm{d}\tan x=\int\frac{1-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sec^2 x+\sqrt{2}\tan x}{\sec^2 x-\sqrt{2}\tan x}+C,
\end{aligned}
$$

上面最后一个积分利用了例题 9.1.8 中的结果. $\square$

然而, 本题如果用下面的解法, 将更为简单.

解 2

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{\cos 2x}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\cos 2x}{2-\sin^2 2x}\mathrm{d}(2x)=\int\frac{\mathrm{d}\sin 2x}{2-\sin^2 2x}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin 2x+\sqrt{2}}{\sin 2x-\sqrt{2}}\right|+C. \quad \square
\end{aligned}
$$

注 上面的例题表明, 求三角函数有理式的不定积分时, 不必拘泥于所提到的各种变换, 而应根据具体问题去寻求最适当的解法. 下面我们再举一例.

例题 9.2.6 计算 $I=\displaystyle\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

分析 本题属于上面的情况 3, 但如果用变换 $t=\tan x$ 做, 计算量较大. 下面介绍两种解法.

解 1 用分部积分法可进行如下:

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \sin^3 x \,\mathrm{d}\cos x = -\sin^3 x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}\sin^3 x \\
&= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^3 x\cos x + \frac{3}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x - 3I \\
&= -\sin^3 x\cos x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - 3I,
\end{aligned}
$$

所以得到 $I = -\dfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \dfrac{3}{8}x - \dfrac{3}{16}\sin 2x + C$. □

如果用三角函数的倍角公式, 则不难得到下列更简单的解法:

解 2 $I = \displaystyle\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}
$$

□

9.2.3 无理函数积分的例子

一般来说, 无理函数的不定积分并不总是积得出来的. 例如, 即使看似简单的二项式微分式的积分

$$
\int x^m (a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x,
$$

其中 a,b 为常数, m,n,p 为有理数, 也仅仅在 p, $(m+1)/n$ 或 $(m+1)/n+p$ 为整数这三种特殊情况下才能积得出来. 其余情况下的二项式微分式都积不出来, 见 [14] 的第二卷 267 小节. 在前面我们已经提到, 对于型如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ $(a\neq 0)$, 其中 R 为有理分式的不定积分, 可以利用 Euler 变换或三角变换化为有理函数进行积分 (见例题 9.1.1 的注 2). 下面我们再举一些例题, 说明如何对一些特殊的无理函数进行积分.

例题 9.2.7 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$, 则 $x=\dfrac{2(t^2+1)}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. 因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C\\&=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}{1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 对于形如 $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ $(n>1,\ ad-bc\neq0)$ 的不定积分, 一般只要令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, 就可以将其化为有理函数积分.

例题 9.2.8 计算不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt[6]{x+1}$, 则 $x=t^6-1$, $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 因此

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{6(1-t^3)t^5}{t^6(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=6\int\frac{1-t^3}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=6\int\frac{(1+t^2)-t(t-1)-t(1+t^2)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t-1}{t^2+1}-1\right)\mathrm{d}t\\&=6\left(\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\arctan t-t\right)+C\\&=6\left(\ln\sqrt[6]{x+1}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+\arctan\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}\right)+C\\&=3\ln\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}+6\arctan\sqrt[6]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 对于形如 $\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x$ 的不定积分, 其中 m,n 是自然数, 可以用 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 是 m,n 的最小公倍数, 将其有理化.

最后, 我们举出一些被积函数既含有无理式, 又含有超越函数 (指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数) 的不定积分例题. 对这类题, 并没有固定的一般解法, 只有根据经验, 对具体问题进行分析和尝试, 寻找合适的解法.

例题 9.2.9 计算不定积分 $I=\int\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

分析 关键是去掉根号或化掉根号下的三角函数. 我们介绍下列两种方法. 第一种方法是用适当的三角恒等式, 第二种方法是用代换法.

解 1
$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x\\&=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 令 $t=\sqrt{1+\sin x}$, 则 $x=\arcsin(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-t^4}}$, 因此

$$I=\int\frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-t^4}}=\int\frac{\mathrm{d}t^2}{\sqrt{2-t^2}}=-2\sqrt{2-t^2}+C=-2\sqrt{1-\sin x}+C.\quad\square$$

例题 9.2.10 计算不定积分 $I=\int\arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 1 用分部积分法:

$$\begin{aligned}I&=x\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-\int x\cdot\frac{1}{1+\dfrac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}\cdot\frac{-2a}{(a+x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=x\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}+\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&=x\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 令 $x=a\cos t$, 则有

$$\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\arctan\sqrt{\frac{2\sin^2\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}}=\arctan(\tan\frac{t}{2})=\frac{t}{2}.$$

因此
$$\begin{aligned}I&=a\int\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\cos t=a\cdot\frac{t}{2}\cos t-\frac{a}{2}\int\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{at}{2}\cos t-\frac{a}{2}\sin t+C\\&=\frac{x}{2}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.\quad\square\end{aligned}$$

9.2.4 练习题

1. 用观察法将被积函数拆开后计算不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)}$; (4) $\displaystyle\int \frac{4x^2+3}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.

2. 计算下列有理函数的不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+a)}\quad(a\neq 0)$;

(3) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+3)}$; (4) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{(x-2)^{10}}\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$; (8) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

3. 计算下列三角函数有理式的不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$; (4) $\displaystyle\int \tan^5 x\sec^3 x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\sec x}{(1+\sec x)^2}\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

4. 计算 Poisson 积分 $\displaystyle\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x\quad(-1<r<1)$.

5. 计算下列无理函数的不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cos 7x}}$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2+3}}$;

(3) $\displaystyle\int \sqrt{\tan^2 x+2}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$; (6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

§9.3 对于教学的建议

9.3.1 学习要点

1. 计算不定积分是微积分课程的基本技能之一. 在计算机科学突飞猛进的今天, 许多不定积分都可以在计算机上用 Mathematica, Maple 等软件直接求出. 因此, 许多教师在教"不定积分"这一章时, 可能会产生这样一个问题: 关于求不定积分的方法与技巧, 究竟应该教些什么? 本章的内容反映了我们对这个问题的观点. 有兴趣的读者可以参看 美国数学月刊, 92 卷 (1985年), 214–215 页中的意见.

2. 不定积分的计算含有大量的技巧. 这些技巧对于爱好数学的大学一年级学生往往有很大的吸引力. 当然, 学生需要进行必要的训练来掌握这一项技能, 这对于今后的学习与数学素养的提高都是必不可少的. 但是如果在这方面花费太多的精力与时间, 特别是追求一些针对特殊类型不定积分的特殊技巧, 则是枉费心机和得不偿失的. 教师需要向学生强调, 例如

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x,\quad \int \cos x^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+k^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\quad (0<k<1)$$

等在各种领域有重要应用的许多不定积分都不是初等函数. 这些不定积分的可积性, 就像中学时代遇到过的"用尺规三等分任意角"问题一样, 不是未解决的难题, 而是在十九世纪早已解决的问题. (关于二项式微分式除三种情况外不可积的证明见 [11] 中的第六章.)

3. 许多初等函数的原函数不是初等函数并不是坏事, 而是好事. 例如上面列出的许多非初等不定积分都是有重要应用的新函数, 提供了新的数学工具.

4. 利用求导运算是求不定积分的逆运算, 而求导运算要容易得多, 初学者在求得不定积分后应当用求导运算加以验证. 这样就可以纠正绝大部分错误.

5. **对习题课的建议** 不定积分计算灵活多变, 在学习中可以用一些不是很困难的题引导学生寻找多种解法. 这对于掌握基本技能很有好处. 例如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2},\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x},\quad \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$$

都是值得使用的积分题. 此外, 根据教材和时间的情况还可以介绍双曲代换和复数计算方法等内容.

9.3.2 参考题

1. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 4x + \tan^2 x$, $0 < x < 1$, 求函数 $f(x)$.
2. 计算下列不定积分:

   (1) $\displaystyle\int x \arctan x \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$;

   (3) $\displaystyle\int [x]\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x \quad (x \geqslant 0)$; (4) $\displaystyle\int \sin x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

   (5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$; (6) $\displaystyle\int \frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbf{N}_+)$.

3. 对每个自然数 n, 定义 $I_n = \displaystyle\int \frac{(ax+b)^n}{\sqrt{cx+b}}\,\mathrm{d}x$, 求出计算 I_n 的递推公式.
4. 对于实数 $a \neq 0$ 与自然数 $n > 2$, 定义 $I_n = \displaystyle\int \left(\frac{\sin(x-a)/2}{\sin(x+a)/2}\right)^n \mathrm{d}x$.

   证明: 对于 I_n 有递推公式
   $$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}\, t^{n-1} - I_{n-2} + 2I_{n-1}\cos a,$$
   其中 $t = \dfrac{\sin(x-a)/2}{\sin(x+a)/2}$.
5. 设 Q 为 n 次多项式, 且具有 n 个相异实根 x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. 又设 P 是与 Q 不可约的 m 次多项式, 且 $m < n$, 证明:
   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \ln|x - x_i| + C.$$
6. 求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 为 x 到离其最近的整数的距离.
7. Liouville 在十九世纪三十年代对于初等函数的不定积分在什么条件下是初等函数进行过深入的研究 (参见 [54]), 他得到的一个结果是:

   定理 设 f, g 为有理函数, g 不是常值函数, 如果 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则存在有理函数 h, 使得
   $$\int f(x)\,\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x = h(x)\,\mathrm{e}^{g(x)} + C.$$

   试用这个定理证明: $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 都是非初等不定积分 (由后者又可推出 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 也是非初等不定积分).

第十章 定 积 分

这一章是一元函数积分学的基本理论.

在 §10.1 节中利用可积性的三个充分必要条件对于可积函数类进行了深入讨论. §10.2 节为定积分的性质, 主要是积分中值定理与在积分号下求极限. 在 §10.3 节中讨论变限积分与微积分基本定理. §10.4 节为定积分的计算. 最后一节为学习要点和两组参考题.

定积分的应用极其广泛, 将在下一章中分专题介绍.

§10.1 定积分概念与可积条件

10.1.1 定积分的定义

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义.

1. 称点集 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的**一个分划**, 如果满足条件:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,\cdots,n$, 并称 $\|P\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ 为分划 P 的**细度**. 如果 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n},\ i=1,\cdots,n$, 则称 P 为**等距分划**.

2. 设 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分划. 对每个子区间 $[x_i,x_{i-1}]$, 任取 $\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$, 则称 $\xi=\{\xi_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为从属于 P 的一个**介点集**; 并称和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 或 $\sum\limits_{P}f(\xi_i)\Delta x_i$ 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个 **Riemann 和**.

3. 设 I 为实数, 且有 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$, 即 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0$, 对 $\|P\|<\delta$ 的每个分划 P, 以及对从属于 P 的每个介点集 ξ, 成立 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$, 则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积** 或简称**可积**, 记为

$$f\in R[a,b],$$

并称 I 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**或**定积分**, 简称积分, 记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I \quad 或 \quad \int_a^b f=I.$$

注 1 在上述定义中, 虽然仍然是用记号 lim, 但是这里的极限与以前的函数极限或数列极限是不一样的. 主要区别在于, 在函数极限或数列极限的定义中, 自变量简单地就是 x 或 n. 但这里对于每个确定的细度 $\|P\|$, $[a,b]$ 的分划 P 可以有无限多个, 而相对于每个 P, 介点集 ξ 的取法又有无限多个, 因此就有无限多个不同的 Riemann 和. 尽管如此, 函数极限和数列极限的许多性质, 例如, 极限的唯一性、极限运算与线性运算可以交换次序等, 对于这种新的极限仍然成立.

注 2 定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个数, 它的值仅仅与函数 f 以及区间 $[a,b]$ 有关, 而与积分变量 x 无关: 在 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 x 可以换成任意其他变量, 例如 $t,u,\cdots$, 即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \cdots.$$

10.1.2 可积条件

利用积分定义中介点集的任意性就可以得到可积的一个必要条件.

命题 10.1.1 设 $f\in R[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证 若记 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$, 则从可积定义知道, 对于 $\varepsilon=1$, 存在一个分划 P, 使得对于从属于这个 P 的任何介点集 ξ, 均成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1. \tag{10.1}$$

以下只要证明 f 在每个 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上有界即可. 对于确定的子区间 I_i, 固定所有 ξ_k $(k\neq i)$, 就可以从不等式 (10.1) 出发对于 $f(\xi_i)$ 作出估计如下:

$$\frac{1}{\Delta x_i}(I-1-\sum_{k\neq i} f(\xi_k)\Delta x_k) < f(\xi_i) < \frac{1}{\Delta x_i}(I+1-\sum_{k\neq i} f(\xi_k)\Delta x_k).$$

由于 $\xi_i\in I_i=[x_{i-1},x_i]$ 的任意性, 可见 f 在 I_i 上有界. □

为叙述可积的充分必要条件, 需要引入以下概念. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界, $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分划, 对 $i=1,\cdots,n$, 记

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-i},x_i]\} \text{ 与 } m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-i},x_i]\},$$

称 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的**振幅**, $\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i$ 为 f 的**振幅面积**.

在一般的分析教科书中对下面两个最常用的可积充分必要条件都有证明.

命题 10.1.2 (可积的第一充分必要条件) 有界函数 $f \in R[a,b]$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

命题 10.1.3 (可积的第二充分必要条件) 有界函数 $f \in R[a,b]$ 的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分划 P, 使成立

$$\sum_{P} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

注 1　条件 "$\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$" 是指 "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $[a,b]$ 的**任意**分划 P, 只要 $\|P\| < \delta$, 就都成立 $\sum\limits_{P} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$". 而在可积的第二充要条件中对于每一个给定的 ε **只要存在一个分划** P 就够了. 因此, 要证明给定函数的可积性, 用可积的第二充要条件方便得多.

注 2　在数列极限或函数极限的收敛定义中似乎没有与上述第二充分必要条件对应的结果, 但是对于单调数列却有类似的结果. 例如, 单调增加数列 $\{x_n\}$ 收敛于数 a 的充分必要条件是: 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在数列的某一项 x_N, 使成立 $a - \varepsilon < x_N \leqslant a$. 这个结果已用于例题 3.1.1 中. 这个类比并非偶然. 可积的第二充分必要条件就是来源于 Riemann 和对于分划的某种 "单调性". 对此有兴趣的读者可以参考 [14] 第二卷附录 2 中的 Moore-Smith 收敛.

利用上面的充要条件, 就可以证明关于 Riemann 可积函数类的三个结论:

1. 设 $f \in C[a,b]$, 则 $f \in R[a,b]$.
2. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点, 则 $f \in R[a,b]$.
3. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $f \in R[a,b]$.

另一方面, 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数 (见 4.1.5 小节题 11), 则对任意区间 $[a,b]$ 以及 $[a,b]$ 的任意分划 P, 当 ξ_i 均取有理数时, 有 $\sum\limits_{P} f(\xi_i)\Delta x_i = b - a$, 而当 ξ_i 均取无理数时, 则有 $\sum\limits_{P} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$. 因此振幅面积总是等于 $b-a$. 由此可见, Dirichlet 函数在任何有限区间 $[a,b]$ 上都不可积.

下面是另一个可积充要条件, 它在讨论较为复杂的函数的可积性时, 往往比第二可积充要条件更为方便.

命题 10.1.4 (可积的第三充分必要条件) 有界函数 $f \in R[a,b]$ 的充要条件是 $\forall \varepsilon, \eta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分划 P, 使振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε.

证 设在 $[a,b]$ 上有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

先证充分性. 对于 $\varepsilon > 0$, 取

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

根据条件, 存在 $[a,b]$ 的分划 P, 使振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε' (参见图 10.1). 对 P, 用 $\sum'$ 和 $\sum''$ 分别表示在积分和式中对振幅不小于 η 的子区间和对振幅小于 η 的子区间求和. 我们有

$$\sum{}' \omega_i \Delta x_i \leqslant (M-m)\sum{}' \Delta x_i \leqslant (M-m)\varepsilon',$$
$$\sum{}'' \omega_i \Delta x_i < \eta \sum{}'' \Delta x_i \leqslant \eta(b-a).$$

合并得到

$$\sum \omega_i \Delta x_i \leqslant (M-m)\varepsilon' + \eta(b-a) < \varepsilon.$$

由第二可积充要条件可见 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

再证必要性. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则由第二可积充要条件, 对给定的 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分划 P, 使 $\sum\limits_P \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\eta$. 用 $\sum'$ 表示对振幅不小于 η 的子区间求和, 则

$$\eta \sum{}' \Delta x_i \leqslant \sum{}' \omega_i \Delta x_i \leqslant \sum_P \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\eta.$$

因此 $\sum' \Delta x_i < \varepsilon$, 即振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε. □

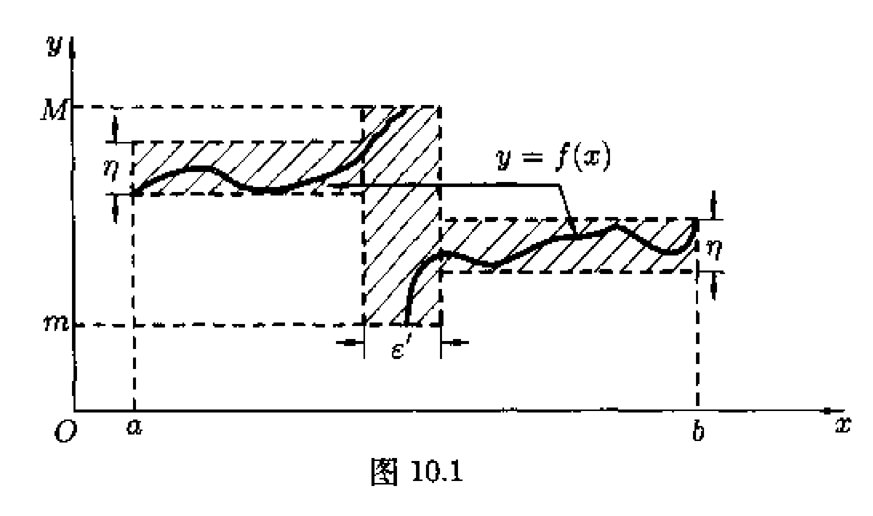


图 10.1

对于有无限多个间断点的函数, 用第三充要条件来讨论其可积性比较容易.

例题 10.1.1 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - [\dfrac{1}{x}], & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 [0,1] 上可积.

分析 虽然 f 在 [0,1] 上有无限个间断点, 然而由于这些间断点可以看成为收敛于 0 的数列, 因此可用总长度任意小的有限个区间把所有间断点覆盖住, 这就是下列证明的要点.

证 对给定的 $\varepsilon, \eta > 0$ 取 n 充分大, 使得

$$\delta = \frac{1}{n + \dfrac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

将区间 [0,1] 分成 $[0,\delta)$ 和 $[\delta,1]$. f 在 $[\delta,1]$ 内的所有间断点是 $\{1/i \mid i = 2, \cdots, n\}$. 用包含于 $(\delta,1]$ 中的 $n-1$ 个互不相交的开区间覆盖这些间断点, 并要求这些开区间的总长度小于 $\varepsilon/2$ (见图 10.2). 从 [0,1] 中挖掉这些子区间与 $[0,\delta)$, 剩余的部分是 n 个闭子区间. 因为 f 在这些闭子区间上一致连续, 因此我们能够将这些子区间细分为更小的子区间, 使 f 在每个子区间上的振幅都小于 η. 上面所有子区间的端点构成 [0,1] 的一个分划. 其中振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε, 由可积的第三充要条件可知 $f \in R[a,b]$. □

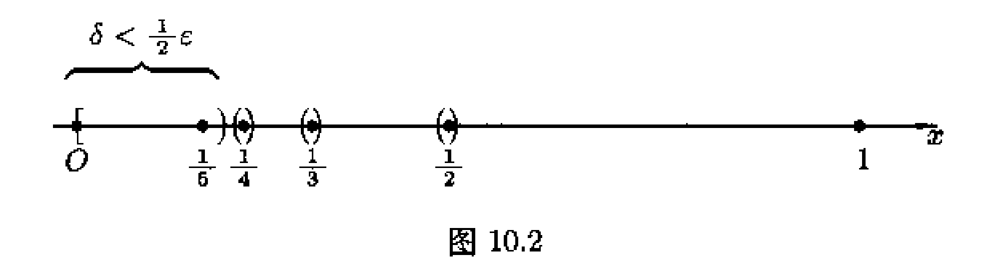


图 10.2

这样我们就看到 Riemann 可积函数可以有无限多个不连续点. 不仅如此, 这些不连续点的分布还可能比例题 10.1.1 中的情况复杂得多. 例如, 例题 5.1.4 中的 Riemann 函数以所有的有理数点为间断点, 但它仍然是可积函数 (留作下面的练习题).

这里要注意, 虽然有理数在数轴上处处稠密, 但仍然可以用总长度任意小的开区间族来覆盖. 不过这时开区间的个数不是有限个, 而是可列个. 关键是用有理数的可列性, 先将它们记为一个数列 $\{r_n\}$. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 用长度 $\dfrac{1}{2}\varepsilon$ 的开区间覆盖点 r_1, 用长度 $\dfrac{1}{4}\varepsilon$ 的开区间覆盖 $r_2, \cdots$, 用长度 $\dfrac{1}{2^n}\varepsilon$ 的开区间覆盖 r_n, 如此进行下去, 就可以覆盖所有有理数, 而所用的开区间的总长度不超过 ε.

从可积的第三充分必要条件不难得到下面对于可积函数的很一般的刻画.

命题 10.1.5 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界, 如果 f 的所有不连续点可以用总长度任意小的至多可列个开区间覆盖, 则 $f \in R[a,b]$.

证 对于给定的 $\varepsilon,\eta>0$, 先用总长度小于 ε 的有限个或可列个开区间覆盖 f 的所有不连续点. 然后对于每个连续点, 设为 x_0, 用一个邻域 $O(x_0)$ 覆盖, 且要求 f 在这个邻域上的振幅小于 η. 由于 f 在点 x_0 的连续性, 这是能够满足的.

对于每个连续点都取这样的邻域, 于是所有这些邻域和覆盖不连续点的开区间一起就构成为区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 记为 $\{O_\alpha\}$.

利用加强形式的覆盖定理 (即命题 3.5.2), 存在 Lebesgue 数 δ, 使得在区间 $[a,b]$ 中的相距不超过 δ 的任何两点可以用开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中的某一个开区间同时覆盖.

对于区间 $[a,b]$ 取细度不超过 δ 的等距分划 P. 这时每个子区间被开覆盖中的一个开区间所覆盖. 如果子区间是由原来覆盖不连续点的开区间所覆盖, 则这类子区间的总长度必小于 ε. 而覆盖所有其他子区间的开区间都是原先用于覆盖连续点的邻域, 因此 f 在每一个这类子区间上的振幅小于 η.

根据可积的第三充分必要条件可知 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

注 在实变函数论中, 如果一个点集可以用总长度任意小的至多可列个开区间覆盖, 就称这个点集为**零测度集**. 如果某种性质在一个零测度集之外成立, 就说这个性质**几乎处处**成立. 应用这些术语, 我们就可以叙述实变函数论中的 Lebesgue 定理, 它给出了 Riemann 可积函数的完整刻画, 非常有用.

命题 10.1.6 (Lebesgue 定理) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

这个定理的充分性部分就是上面的命题 10.1.5. 其必要性证明简述如下 (对细节有兴趣的读者可以参考 [7]).

必要性的证明 设 $f\in R[a,b]$, 则从积分的第三充要条件可知, 对于 $\varepsilon,\eta>0$ 存在分划 P, 使得其中振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε. 利用函数在一点的振幅概念 (见 5.1.1 小节的第 5 点), 可见 f 的振幅超过 η 的不连续点或者落在振幅超过 η 的子区间内 (而所有这类子区间的总长度小于 ε), 或者是分划 P 的某些分点. 再增加几个长度充分小的开区间来覆盖这些分点, 就可以用总长度小于 ε 的有限个开区间将所有振幅超过 η 的不连续点全部覆盖住.

现在取 $\eta_n=1/2^n$, $\varepsilon_n=\varepsilon/2^n$, 并对每个 n 重复以上过程, 就可用总长度不超过 ε 的至多可列个开区间覆盖 f 的所有不连续点. 由于这对每个 $\varepsilon>0$ 都能做到, 因此 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续. □

10.1.3 练习题

对下面的前 10 个题来说, 每题至少可以有两个解法. 其中的一个解法是从定积分定义出发, 而另一个解法是以 Lebesgue 定理 (命题 10.1.6) 为根据的, 这

两种解法的思路很不一样. 初学者通过这样的训练既可以熟悉定积分的基本出发点, 又可以学会如何应用 Lebesgue 定理和有关的概念去处理一般的 Riemann 可积函数. 对于今后遇到的有关可积函数的问题都可以如此考虑.

1. 设

$$f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x \text{ 是有理数},\\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

问 f 在 $[0,1]$ 上是否可积?

2. 设 $f,g \in R[a,b]$, 且 f 的值域为 $[a,b]$, 问 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上是否可积? 又若 f,g 在 $[a,b]$ 上都不可积, 问 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上是否一定不可积?

3. 讨论区间 $[a,b]$ 上 f, $|f|$, f^2 可积性之间的关系.

4. 设 $f\in R[a,b]$, g 与 f 在 $[a,b]$ 上仅在有限个点上取不同值, 证明: $g\in R[a,b]$, 并且 $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b g$ ①. 又问: 如果 f 和 g 在 $[a,b]$ 上几乎处处相等, 例如只在所有有理数点上的函数值不同, 则是否有相同结论?

5. 设 $f\in R[a,b]$, 且对每个 $(\alpha,\beta)\subseteq[a,b]$, $\exists\, x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, 使 $f(x_1)f(x_2)\leqslant 0$, 问定积分 $\displaystyle\int_a^b f$ 的值是多少? 为什么?

6. 设 $g\in R[a,b]$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, 如果 $m<M, f\in C[m,M]$, 证明: $f\circ g\in R[a,b]$.

7. 设 $f\in R[a,b]$, 且 $1/f$ 在 $[a,b]$ 上有界, 证明: $1/f\in R[a,b]$.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且其所有间断点构成一个收敛数列, 证明: $f\in R[a,b]$.

9. 设 f 在区间 $[a,b]$ 的每一点的极限都存在且为零, 证明: $f\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f=0$.

10. 证明: Riemann 函数 (见例题 5.1.4) 在每个有限区间 $[a,b]$ 上可积.

11. 对连续函数, 能否如下定义定积分: 如果 $f\in C[a,b]$ 且存在实数 I, 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=I,$$

则 $f\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

① 因此对于在 $[a,b]$ 上的有界函数, 如果它在有限个点上没有定义, 我们可以采取补充定义的方法进行讨论. 这时的可积性和可积时的积分值与补充定义的具体做法无关.

12. 设 $f, g \in R[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的分划, 证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使对于满足 $\|P\| < \delta$ 的任意分划 P, 成立

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin(g(x_k)\Delta x_k) - \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

§10.2 定积分的性质

本节只列出最重要的两个积分中值定理, 介绍一般书中不放在正文中的两个基本性质, 并讨论第一中值定理的中值 ξ 的取值范围. 此外还介绍积分号下取极限的几个重要例题. 关于积分中值定理的应用将在 10.4.5 小节作专题介绍.

10.2.1 积分中值定理

命题 10.2.1 (积分第一中值定理) 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in f([a,b]) = [m, M]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.2}$$

特别是, 如果 $f \in C[a,b]$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

注 与微分中值定理 (见 §7.1 节) 作比较, 自然会提出一个问题: 在 (10.2) 中的 $\xi \in [a,b]$ 能否改进为 $\xi \in (a,b)$? 答案是肯定的. 证明见下面的例题 10.2.2.

命题 10.2.2 (积分第二中值定理) 设 $f \in R[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别是, 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调增加且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

如果 g 在 $[a,b]$ 上单调减少且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 积分第二中值定理的条件有几种形式. 上述形式的证明可在很多教科书中找到, 例如 [25] 上册 297–299 页. 证明中一般需要用 Abel 变换 (见 [59] 第一章). 但在实际应用中往往不需要这么强的形式. 本书中只对形式为 "$f \in C[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上可微且 $g'(x) \leqslant 0$ (或 $\geqslant 0$), $x \in (a,b)$" 的条件作出证明. 这时只需要用积分第一中值定理即可 (见例题 10.4.11), 且中值的取值范围也可改进为 $\xi \in (a,b)$.

思考题

1. 举例说明: 在积分第一中值定理中 g 的保号性条件不满足时, 定理的结论可以不成立.
2. 举例说明: 在积分第二中值定理中 g 不是单调函数时, 定理的结论可以不成立.

10.2.2 例题

下面一个例题的结果是定积分的一个基本性质. 它对于连续的被积函数是平凡的. 对于一般的可积函数则可以用积分定义中介点集的任意性得到.

例题 10.2.1 设 $f \in R[a,b]$, 且 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 则有子区间 $[c,d] \subset [a,b]$ 和 $\mu > 0$, 使在区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x) \geqslant \mu$.

证 1 从积分定义可知, 存在 $[a,b]$ 的一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得对从属于 P 的任何介点集 ξ, 成立

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \frac{I}{2} > 0.$$

记 $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并对于上面的和式取下确界, 就得到

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \geqslant \frac{I}{2} > 0.$$

显然在和式中至少有一项大于 0. 设这一项是第 k 项, 则就可取 $\mu = m_k$, $[c,d] = [x_{k-1}, x_k]$. □

证 2 用反证法. 若结论不成立, 则 (由对偶法则) 对于每个 $\mu > 0$ 和每个子区间 $[c,d]$, 存在 $\xi \in [c,d]$, 满足 $f(\xi) < \mu$. 在 f 的 Riemann 和式中对于任何分划都取满足这个要求的介点集, 这样就得到 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mu(b-a)$. 由于 $\mu > 0$ 是任意的, 因此只能得到 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$, 与条件矛盾. □

注 若在教科书中有上、下和的 Darboux 理论, 则上题的证明可更为简单.

在上一个例题的基础上就可以解决关于积分第一中值定理 (命题 10.2.1) 中的中值取值范围问题.

例题 10.2.2 (对积分第一中值定理的改进) 如果 $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则有 $\eta \in [m, M] = f([a,b])$ 使得成立等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10.3}$$

而且一定存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\eta = f(\xi)$.

证 在此没有必要重复积分第一中值定理的经典证明过程, 下面只讨论一个问题: 能否在开区间 (a,b) 内取到中值 ξ.

下列三种情况是平凡的, 不需要多讨论.

(1) 如果积分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则从积分第一中值定理可见 (10.3) 左边也等于 0, 于是 ξ 可任取, 结论已成立.

(2) 如果 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值相等, 即有 $m = M$, 则 f 为常值函数, 因此 ξ 也可任取.

(3) 如果 $m < M$, 且在等式 (10.3) 中的 $\eta \in (m, M)$, 则从连续函数的介值性可知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = \eta$.

要讨论的只是以上三种情况之外的问题. 不妨设 g 在区间 $[a,b]$ 上非负, 且有 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. 又设 $m < M$, 且不妨只讨论情况 $\eta = m$.

从例题 10.2.1 知道存在子区间 $[c,d]$ 和 $\mu > 0$, 使得在 $[c,d]$ 上有

$$g(x) \geqslant \mu > 0. \tag{10.4}$$

又由于 $f(x) - m$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均非负, 因此从等式 (10.3) 得到

$$0 = \int_a^b (f(x)-m)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d (f(x)-m)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \mu \int_c^d (f(x)-m)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

可见上式最右边的积分等于 0. 由于 $f \in C[c,d]$, 这只能导致在 $[c,d]$ 上成立

$$f(x) \equiv m.$$

因此在 $(c,d) \subset (a,b)$ 中任取一点作为中值 ξ 即可. □

注 关于这个问题的讨论有许多文献, 可以参考 [52, 56]. 在 [52] 中指出, 若 f 的连续性条件改为只是可积, 则结论不成立. 而在 [56] 中则证明: 如果 f 既可积又有原函数, 则仍有 $\xi \in (a,b)$ (这将作为本章的一个参考题).

下一例题的结论与例题 10.2.1 具有某种互补性, 也是可积函数的一个基本性质. 从方法上看则需要用实数系的基本定理 (参见第三章).

例题 10.2.3 设非负函数 $f \in R[a,b]$, 且存在子区间 $[c,d] \subset [a,b]$, 使得在 $[c,d]$ 上 $f(x) > 0$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

证 只要对于 $[c,d] = [a,b]$ 证明即可, 因此假设在 $[a,b]$ 上 $f(x) > 0$.

用反证法. 这时已知 f 在 $[a,b]$ 上的定积分非负. 如果有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则可如下导致矛盾. 首先, 从例题 10.2.1 已知有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Longrightarrow \exists\,[c,d] \subset (a,b),\ \text{使得}\ f(x) > 0\ \forall x \in [c,d] \tag{10.5}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 在 (10.5) 中用 $\varepsilon - f$ 代替 f, 就可以得到

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon(b-a) \Longrightarrow \exists\,[c,d] \subset (a,b),\ \text{使得}\ 0 < f(x) < \varepsilon\ \forall x \in [c,d]. \tag{10.6}$$

当然这时 f 在 $[c,d]$ 上的积分也是 0. 现在用实数系的闭区间套定理 (见 §3.2 节). 令 $\varepsilon_n = 1/n$, $n \in \mathbf{N}_+$, 改记 $[c,d] = [a_1, b_1]$, 并对它归纳地用 (10.6) 得到 $\{[a_n, b_n]\}$, 使得对每个 n, 在区间 $[a_n, b_n]$ 上成立不等式

$$0 < f(x) < \frac{1}{n}.$$

根据闭区间套定理, 存在属于每个闭区间的点 $\xi \in (a,b)$, 也就是说对每个 n 成立

$$0 < f(\xi) < \frac{1}{n}.$$

但这样的 $f(\xi)$ 是不存在的, 引出矛盾. □

注 如 10.1.3 小节开始所说, 上面的例题 10.2.1 和 10.2.3 当然也都可以作为 Lebesgue 定理 (命题 10.1.6) 的推论得到. 读者可以一试. 但 "杀鸡可不用牛刀", 因此我们只从积分定义出发给出它们的证明.

10.2.3 积分号下求极限

如果一列函数 $f_n(x) \in R[a,b], n \in \mathbf{N}_+$, 又在 $[a,b]$ 上处处有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 而且极限函数 $f \in R[a,b]$, 这时经常会问下列等式是否成立:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.7}$$

这就是所谓积分号下取极限的问题, 也就是 $n \to \infty$ 的极限过程和积分 (它也是一种极限) 是否可交换顺序的问题. 这类问题在数学分析和其他许多领域中都很重要.

"不幸" 的是, 对于问题 (10.7) 的答案是 "不一定". 例如, 设

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x\leqslant \dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1 \text{ 或 } x=0,\end{cases}$$

则对一切 $x\in[0,1]$ 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0.$$

但容易验证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这说明在考虑积分号下求极限问题时, 我们不能随意将求极限运算与求积分运算交换顺序. 对于这种交换极限顺序问题的一般性讨论, 需要函数项级数和多元微积分的知识, 将在本书下册进行. 下面将通过一些例题, 说明利用定积分的性质和一些技巧在目前已经可以解决其中的较简单问题.

例题 10.2.4 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

由于本题的积分是定积分的重要结果 (见例题 10.4.9), 因此可将本题变为普通的数列极限问题, 而且还可以引用 2.3.2 小节的练习题 8. 但这种方法过分地依赖于定积分计算, 积不出怎么办? 所以我们下面要介绍新的方法.

首先是从几何上作观察. 在图 10.3 中作出了 $n=4,20,100,500$ 时的函数 $\sin^n x$ 的几何图像.

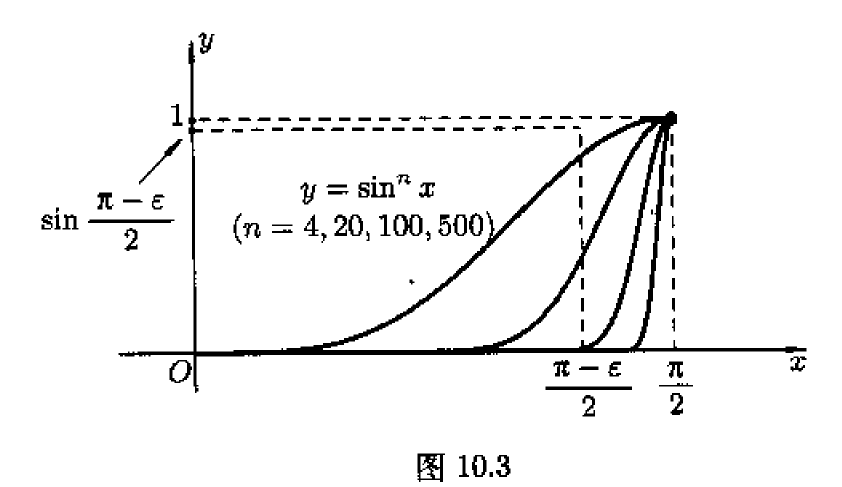


图 10.3

从图中可以看出, 由于 $\sin^n\dfrac{\pi}{2}=1$, 因此对每个 n, 函数 $\sin^n x$ 在该点充分邻近的值一定接近 1. 另一方面, 对于固定的 x 值, 只要 x 小于 $\dfrac{\pi}{2}$, 则当 n 增加时函数值 $\sin^n x$ 就很快趋于 0. 这就是下面的 "分而治之" 方法的几何背景.

证 按照数列极限的 ε–N 定义写出证明.

对于给定的 $\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<\pi$, 可以将积分分拆如下 (参看图 10.3):

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{(\pi-\varepsilon)/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{10.8}$$

由 $0<\sin\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}<1$, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}=0$. 从而对上述 ε, $\exists N$, 使 $n>N$ 时, 成立

$$0<\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 $n>N$时, 就有 $0\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x<\varepsilon$. □

注 1 利用上、下极限工具 (见 §3.6 节) 还可将证明写得简洁一些. 在 (10.8) 的不等式中直接令 $n\to\infty$, 就得到

$$0\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

利用 $\varepsilon>0$ 的任意性, 可见上、下极限相等且为 0.

注 2 在分拆积分时可以采取动态方法, 例如在 [41] 中按照区间

$$[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}]\text{ 和 }[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\frac{\pi}{2}],$$

拆成两个积分, 然后分别证明它们 (作为数列) 当 $n\to\infty$ 时的极限都是 0. 读者可以一试.

注 3 本题的常见错误如下:

证 由积分第一中值定理, $\exists\xi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, 使得

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sin^n\xi.$$

不难看出一定有 $0<\sin\xi<1$ 成立, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=0.$$

错误分析 错误在于 ξ 不是常数, 而是随着 n 的变化而变化的, 应该记为 ξ_n. 当 $n\to\infty$ 时, 不难证明有 $\xi_n\to\pi/2$, 因此 $\sin^n\xi_n$ 是 1^∞ 型的不定式. 回忆数列极限的内容, 我们知道, 从一个数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足 $0<a_n<1$ 是得不出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=0$ 的 (试举例).

下一题是例题 2.2.4 在积分学中的推广.

例题 10.2.5 设非负函数 $f \in C[a,b]$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}. \tag{10.9}$$

分析 设 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 由于 $M = 0$ 时等式显然成立, 因此只要考虑 $M > 0$. 利用熟知的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$, 可见若存在区间 $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, 使在这个区间上有

$$f(x) \geqslant M, \tag{10.10}$$

那么由

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \to M\ (n\to\infty),$$

问题便解决了. 但 M 是函数 f 的最大值, 因此一般来说 (10.10) 不可能成立. 现在我们退而求其次, 对 $0 < \varepsilon < M$, 将 (10.10) 中的 M 改为 $M - \varepsilon$ 则不难实现. 下面就是将这个证法写出来而已.

证 如果 $f(x) \equiv 0$, 则所证等式显然成立. 否则, 设 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, 则 $M > 0$.

对 $0 < \varepsilon < M$, $\exists\, [\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, 使得

$$M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [\alpha,\beta].$$

于是有

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

对于不等式

$$M(b-a)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$$

利用上、下极限工具就得到

$$M \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M - \varepsilon.$$

从 ε 的任意性可见上、下极限相等且等于 M. □

属于积分号下取极限的例题很多. 下面的 Riemann 引理是研究 Fourier 级数的基本工具, 其证明在一般教科书中都可找到.

例题 10.2.6 (Riemann 引理) 设 $f \in R[a,b]$, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = 0.$$

这个结论可以推广为

例题 10.2.7 (Riemann 定理) 设 $f, g \in R[a,b]$, 其中 g 是以 T 为周期的周期函数, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\,g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其证明留作参考题.

需要指出, 以上两个结果对于 (第十二章中的) 广义可积函数 f 也是成立的. 但这时要求 f 还是绝对可积的.

10.2.4 练习题

1. 设 $f \in C[a,b]$, 且对满足条件 $g(a) = g(b) = 0$ 的每个函数 $g \in C[a,b]$, 都有 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: $f \equiv 0$.
2. 设 $f \in R[a,b]$, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$. 若有一个多项式 P 使 $\displaystyle\int_a^b P^2(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: $P \equiv 0$.
3. 设 $f \in C[-1,1]$, 且对 $[-1,1]$ 上的每个可积偶函数 g 都有 $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: f 是 $[-1,1]$ 上的奇函数.
4. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.
5. 分析例题 10.2.4 的条件和证明过程, 试写出它的可能推广, 并作出证明.
   (这是一道开放题, 要求设计出一定的条件, 使 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 成立.)
6. 已知 $x_n \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $n = 1, 2, \cdots$ 且满足 $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \sin^n x_n$, 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.
7. 设 $f \in C[-1,1]$, 证明: $\displaystyle\lim_{h\to0+}\int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0)$.
8. 设 $f \in C[0,1]$, 计算:

   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$, (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

9. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n} x^n\,\mathrm{d}x = 2$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10. 设 $n \in \mathbf{N}_+$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{\ln n}$.

§10.3 变限积分与微积分基本定理

本节的例题和练习题以变限积分方法为中心, 而将以 Newton-Leibniz 公式为主的内容放在下一节中.

10.3.1 主要命题

关于变限积分的主要结果是下面两个命题:

命题 10.3.1 设 $f \in R[a,b]$, 则变上限积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 与变下限积分 $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

命题 10.3.2 设 $f \in R[a,b]$, $x \in [a,b]$ 是 f 的连续点, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

由此就给出了原函数存在的一个充分条件:

命题 10.3.3 (原函数存在定理) 设 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上存在原函数.

命题 10.3.4 (微积分基本公式) 设 F 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 则对每个 $x \in [a,b]$, 成立 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

在多数文献中将命题 10.3.2 和 (或) 命题 10.3.4 称为**微积分基本定理**. 这是 Newton 和 Leibniz 发现的. 在他们之前, 微分和积分的许多个别结果已经得到. 但是只有当 Newton 和 Leibniz 发现了微分和积分运算的互逆关系之后, 微积分才成为统一的整体并开始了全新的发展.

比命题 10.3.4 更一般的是

命题 10.3.5 设 $f \in R[a,b]$, F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则对每个 $x \in [a,b]$, 成立 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

注 1 这个命题也被称为微积分基本定理, 但是它的证明完全不需要关于变上限积分的命题. 此外, 两个条件缺一不可. 关于这些问题有许多深入的研究, 例如可以参考 [56] 以及其中所引的文献.

注 2 命题 10.3.5 可推广如下. 设 $f \in R[a,b]$, $F \in C[a,b]$, 且除了有限个点之外满足条件 $F' = f$, 则对于每个 $x \in [a,b]$, 仍成立等式

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a),$$

这有时称为广义的 Newton-Leibniz 公式.

例如有

$$\int_{-1}^3 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = |x|\Big|_{-1}^3 = 2.$$

思考题 举例: (1) 可积函数未必有原函数; (2) 有原函数的函数未必可积.

注 由于有第一类间断点的函数不能是导函数, 因此 (1) 是容易的. 对于 (2), 可以考虑在区间 $[-1,1]$ 上的下列函数的导函数是否可积:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

10.3.2 例题

在命题 10.3.1 中出现的变限积分不仅在建立微积分基本定理时有用, 而且是一种非常有效的工具. 对于 $f \in C[a,b]$ 引入变限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 因此, 我们就有可能同时用微分学和积分学的工具去研究它.

下一题的证明和应用一般出现在二重积分理论中, 但在这里用变限积分方法来证明还是很容易的.

例题 10.3.1 设 $f \in C[0,+\infty)$, $a > 0$, 证明:

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^a f(x)(a-x)\,\mathrm{d}x.$$

证 将 a 看成非负变量, 等式两边就成为变上限积分. 当 $a = 0$ 时两边都等于 0, 然后将两边对 a 求导, 右边求导后得到

$$\left(\int_0^a f(x)(a-x)\,\mathrm{d}x \right)' = \left(a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x \right)' = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

与左边求导结果相同, 从 Newton-Leibniz 公式就得到所求的等式. □

下一题虽然不难, 但很容易出错. 先看正确的做法.

例题 10.3.2 设 $f \in R[A,B]$, $a,b \in (A,B)$ 是 f 的两个连续点, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

证 要点是利用变量代换改变积分限, 然后利用命题 10.3.2. 计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(b)-f(a). \quad \square\end{aligned}$$

错误证法分析 下面的"证法"是很有诱惑力的:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

请初学者注意: 上面的三步推导中的每一步都是错误的, 即犯了三个错误: (1) 没有根据就将求极限与求积分运算交换顺序; (2) 对差商求极限时忘记了题中 f 只在两点连续, 并无可导条件; (3) 即使 f 在 $[a,b]$ 上可导, 但导函数也不一定可积, 因此不能用 Newton-Leibniz 公式.

下一题的第一个证明是引进变限积分方法的典型应用.

例题 10.3.3 设 $f \in C[a,b]$, 且满足条件

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

证明: 函数 f 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点.

证 1 用数学归纳法. 对于 $n=0$, 从 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 和 $f \in C[a,b]$ 可见 f 在 (a,b) 上或变号, 或恒等于 0, 因此至少有一个零点.

设对于 n 的结论已成立, 我们讨论 $n+1$ 的情况. 引入辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

这时 $F(a)=0$. 从 f 满足的条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 得到 $F(b)=0$. 又从分部积分可见对 $k\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b x^k\,\mathrm{d}F(x) = x^k F(x)\Big|_a^b - \int_a^b kx^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b kx^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此有

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \int_a^b x^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad k=1,\cdots,n+1.$$

根据归纳假设, F 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点. 将它们记为 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$. 由于 a 和 b 又都是 F 的零点, 改记 $a=x_0$, $b=x_{n+2}$, 并对 $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,n+1$, 用 $n+2$ 次 Rolle 定理, 就得到所要求的 $n+2$ 个零点. □

下面再给出不利用变限积分的一个证明.

证 2 用反证法. 设有一个 f 满足所有题设条件, 但其零点不超过 n.

这时 f 不会恒等于 0, 因此从条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 可见 f 在区间 $[a,b]$ 内一定变号.

利用 f 的所有零点或其中的一部分, 可以作出区间 $[a,b]$ 的一个分划

$$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\},$$

其中 $x_0=a$, $x_k=b$, 中间的 $k-1$ 个分点都是 f 的零点, f 在每个子区间上不变号, 而在相邻的子区间上 f 的符号相反.

由反证法前提可见 $k-1\leqslant n$.

对于分划 P 可以构造辅助多项式

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}).$$

g 关于分划 P 具有与 f 相同的性质: 即在每个子区间上不变号, 而在相邻的子区间上符号相反. 这样就知道 $f\cdot g$ 在整个区间 $[a,b]$ 上不变号, 因此

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

另一方面, 由于 g 是次数不超过 n 的多项式, 从题设条件可见上述积分应当等于 0, 从而引出矛盾. □

10.3.3 练习题

1. 计算下列各题:

(1) $\left(\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)'_{x=0}$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{x^2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

2. 设 $f\in C[a,b]$, 且存在常数 $M,\eta>0$, 使对每个 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 恒有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(\beta-\alpha)^{1+\eta},$$

证明: $f\equiv 0$.

3. 设 $f\in C[a,b]$, 且在 $[a,b]$ 上满足不等式 $f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 证明: 在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$.

4. 设函数 $f\in C[0,\pi]$, 且有 $\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$, 证明：$f$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

5. 设 f 为周期函数, 且于每个有限区间上可积, 证明: 变上限积分

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

可以表示为一个周期函数与一个线性函数之和.

6. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且积分 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关, 证明: f 为周期函数.

7. 设 $f\in C(0,+\infty)$, 且对任何 $a,b>0$ 的积分 $\int_a^{ab}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关, 试求函数 f.

8. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使成立 $\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$, 并举例说明这样的 ξ 在 (a,b) 内不一定存在.

9. 设 $f\in C[a,b]$, 且处处大于 0, 证明: 在 $[a,b]$ 上有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x-\int_x^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\geqslant 2.$$

10. 设 a,b,c,d 均为多项式, 证明:

$$\int_1^x a(t)\,c(t)\,\mathrm{d}t\int_1^x b(t)\,d(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^x a(t)\,d(t)\,\mathrm{d}t\int_1^x b(t)\,c(t)\,\mathrm{d}t$$

可被 $(x-1)^4$ 整除.

11. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, $g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 且单调减少, 证明: $f\equiv 0$.

12. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且满足 $\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 f.

§10.4 定积分的计算

一般来说, 从定义出发来计算定积分是不切实际的. 本节以 Newton-Leibniz 公式 (见命题 10.3.4 和 10.3.5) 为基础, 在前三小节中介绍定积分计算, 在最后一小节则与定积分计算相结合介绍积分中值定理的应用. (有关不等式、积分估计和近似计算等例题见下一章.)

10.4.1 计算公式与法则

与不定积分的计算法则相对应, 定积分的计算法则有以下两个.

命题 10.4.1 (定积分的分部积分法) 设 $u'(x),v'(x)\in R[a,b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).\tag{10.11}$$

注 在应用上述公式时, 如果 $u(a)v(a)$ 或 $u(b)v(b)$ 不存在, 或者 $u(x)v(x)$ 在点 $x=a$ 或 $x=b$ 不连续, 则可以将 $u(x)v(x)|_a^b$ 理解为 $\lim\limits_{x\to b^-}u(x)v(x)-\lim\limits_{x\to a^+}u(x)v(x)$. (虽然这时 $u'(x)v'(x)$ 在点 $x=a$ 或 $x=b$ 不存在, 但是由于函数在一个区间上的可积性以及积分值与其在有限点处的定义无关, 因此这不会影响 $u'(x)v'(x)$ 的可积性以及积分值.)

命题 10.4.2 (定积分的换元积分法) 设 $f\in R[a,b]$, $x=g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调增加, $g'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且满足 $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注 1 如果 $f\in C[a,b]$, 则 g 的单调性条件可换为较弱的条件 $g([\alpha,\beta])\subset[a,b]$. 两种情况的证明均可见 [41] 等教科书.

注 2 尽管定积分的换元积分法与不定积分的相应法则在形式上是类似的，但两者还是有区别的，不能把前者简单地看成为后者与 N.L.公式的结合. 两者的主要区别在于：定积分的计算与积分区间紧密关联，不仅换元以后积分限要作相应的改变，而且在采用变换前必须考虑进行变换所需的条件在有关区间上是否满足. 相对来说，应用不定积分的换元法时对此不必多作强调，只有当需要写出原函数时才会与区间联系起来.

从下面的很多例子中可以看到，对定积分用换元法和分部积分法时往往能使一些积分项相互抵消，因此有时即使被积函数的原函数不是初等函数，我们仍然有可能计算出定积分的值. 因此，定积分计算并不要求被积函数的原函数一定是初等函数，这与不定积分计算完全不同.

10.4.2 例题

例题 10.4.1 计算 $I=\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 1 被积函数在 $x=0$ 时没有定义，但是从 $\sin x\sim x\ (x\to 0^+)$ 和 $x\ln x\to 0\ (x\to 0^+)$ 可以知道被积函数在 $x=0$ 右侧有界.

如果如下分部积分，则有

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\ \ln\sin x\Big|_{0+}^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}\ln\sin x.$$

由于右边第一项为无穷大，因此不能解决问题. 克服这个困难的方法也很简单，只要将上面的 $\mathrm{d}(-\cos x)$ 改为 $\mathrm{d}(1-\cos x)$ 即可. 利用 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$，即可计算如下:

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x)\\
&=(1-\cos x)\ \ln\sin x\Big|_{0+}^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\,\mathrm{d}(\ln\sin x)\\
&=-\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi/2}\Big(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\Big)\,\mathrm{d}x\\
&=[\cos x-\ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\pi/2}=\ln 2-1.\quad\square
\end{aligned}$$

解 2 从作代换 $x=2t$ 开始可计算如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4}2\sin 2t\ln\sin 2t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\ln 2\int_0^{\pi/4}\sin 2t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}2\sin 2t\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}2\sin 2t\ln\cos t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(对第一个积分作代换 $2t=x$, 对最后一个积分作代换 $s=\dfrac{\pi}{2}-t$)

$$=\ln 2+\int_0^{\pi/4}2\sin 2t\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\sin 2s\ln\sin s\,\mathrm{d}s$$

(利用定积分与积分变量无关的特点合并两个积分)

$$=\ln 2+\int_0^{\pi/2}4\sin t\cos t\ln\sin t\,\mathrm{d}t$$

(对积分再作代换 $\sin t=u$)

$$\begin{aligned}&=\ln 2+\int_0^1 4u\ln u\,\mathrm{d}u\\ &=\ln 2+2u^2\ln u\Big|_{0+}^{1}-\int_0^1 2u\,\mathrm{d}u=\ln 2-1.\quad\Box\end{aligned}$$

注 1 本题解 1 中处理分部积分的方法具有普遍意义, 因此要再强调一下. 具体来说, 由于两个不同的原函数之间只差一个常值函数, 因此在分部积分公式 (10.11) 中左边的 $u(x)\mathrm{d}v(x)$ 可改为 $u(x)\mathrm{d}(v(x)+c)$, 其中 c 待定. 利用这一点灵活性可以解决不少问题.

注 2 有的文献将本题与广义积分中的 Euler 积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ (见例题 12.3.5) 相联系. 实际上本题是常义积分, 且有初等原函数, 这与 Euler 积分的情况并不相同. 但是本题的解 2 确实与例题 12.3.5 中的方法类似.

下面是一个简单的题, 但其中还是有不少知识点需要注意.

例题 10.4.2 设 n 为大于 1 的自然数, 求 $\displaystyle\int_0^n(x-[x])\,\mathrm{d}x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解 由于被积函数在积分区间上只有有限个间断点, 积分的存在性没有问题. 但由于这有限个间断点是跳跃间断点, 被积函数在整个区间上的原函数不存在 (例题 7.1.1), 需分段计算积分. 在区间 $[0,1]$ 上, $x-[x]$ 与函数 $f(x)=x$ 仅在点 $x=1$ 处有不同的值, 因此它们的可积性和积分值相同, 这样就有

$$\int_0^1(x-[x])\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

又由于 $x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数, 它在每个长度为 1 的区间上的积分相同, 所以就可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^n (x-[x])\,\mathrm{d}x &= \left(\int_0^1+\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n\right)(x-[x])\,\mathrm{d}x\\&= n\int_0^1 (x-[x])\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}.\quad\square\end{aligned}$$

下面的例题说明, 与计算不定积分一样, 熟练地掌握初等代数或三角函数的运算公式, 对于定积分的计算也是十分重要的.

例题 10.4.3 在区间 $(0,\pi)$ 上定义 $D_n(x)=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$, $n\in\mathbf{N}_+$, 计算 $\displaystyle\int_0^\pi D_n(x)\,\mathrm{d}x$.

解 虽然 $D_n(x)$ 在 $x=0$ 时无定义, 但容易证明 $\lim\limits_{x\to0^+}D_n(x)=(2n+1)/2$, 因此 $D_n(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积. 直接对 $D_n(x)$ 积分是困难的, 我们作如下变换. 利用三角恒等式

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right)=\sin\frac{(2n+1)x}{2},$$

就可以将 D_n 分解如下:

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx.$$

逐项积分就得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi D_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right)\mathrm{d}x\\&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\quad\square\end{aligned}\tag{10.12}$$

注 以上积分有时也称为 Dirichlet 积分, 其中的被积函数 D_n 称为 Dirichlet 核, (10.12) 又可写成

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,\mathrm{d}x,\tag{10.13}$$

Dirichlet 核与公式 (10.13) 在积分理论与级数理论中有重要的应用.

下一题虽然是对变限积分求导，但是不能直接应用命题 10.3.2. 同时它也表明，该命题只给出了变限积分可导的充分条件. 变限积分在被积函数不连续点上仍然可能是可导的.

例题 10.4.4 设 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解 由于 $x=0$ 是被积函数的间断点，不能用对变动上限求导的方法来求 $F'(0)$，而只能按照定义来计算导数. 根据定义 $F(0)=0$，而当 $x\neq 0$ 时，由分部积分公式可以得到

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t^2\\&=x^2\cos\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{10.14}$$

按照导数的定义计算极限:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}.$$

右边的第一项极限明显为 0. 第二项是 $\frac{0}{0}$ 的不定式，用 L'Hospital 法则就得到结果是 0. 因此 $F'(0)=0$. □

注 $F'(0)$ 的计算也可以如下进行: 虽然函数 $2t\cos\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 没有定义，但是可以补充定义在该点的函数值为 0. 这时 (10.14) 中最后一个积分的被积函数在 $t=0$ 连续，从而可以直接用命题 10.3.2.

10.4.3 对称性在定积分计算中的应用

设积分区间关于原点对称，例如为 $[-a,a]$ $(a>0)$. 则容易知道，当被积函数 f 是奇函数，即其图像关于原点为中心对称时，就有 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$; 而当 f 为偶函数，即其图像关于 y 轴为对称时，就有 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

如果将以上的对称性进一步推广，则对于某些积分的计算是很有好处的. 下面我们会看到利用对称性可以计算出被积函数没有初等原函数的某些定积分. 在举例之前先列出三个简单而有用的事实，证明从略.

命题 10.4.3 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，则成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x,$$

特别当积分区间为 $[0,a]$ 时则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 10.4.4 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)=f(a-x)$, 即关于区间的中点为偶函数 (也就是关于直线 $x=a/2$ 为偶函数), 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 10.4.5 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)=-f(a-x)$, 即关于区间的中点为奇函数, 则成立

$$I=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

例题 10.4.5 对任意两个不同时为零的实数 a,b, 计算

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x.$$

解 由于被积函数关于积分区间的中点 $\frac{\pi}{2}$ 为奇函数, 因此用命题 10.4.5 即知该积分等于 0. □

下面两个定积分的计算题是利用对称性的典型例题. 由于被积函数的原函数不是初等函数, 因此不可能用 Newton-Leibniz 公式直接计算.

例题 10.4.6 计算 $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数中除去因子 x 后的部分关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 为偶函数. 而因子 x 关于点 $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 是奇函数. 因此若将因子 x 换为 $x-\frac{\pi}{2}$, 整个被积函数就是关于区间中点的奇函数, 从命题 10.4.5 知积分为 0. 这样就有

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \\
&= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 一般书中对本题的方法是直接作代换 $x=\pi-t$, 实质上与上述解法完全一样, 而能否成功的关键是对称性.

例题 10.4.7 计算 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $x=\tan t$, $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 就得到

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

为了知道被积函数 f 在积分区间 $[0,a]$ 上是否具有某种对称性, 只需要观察 $f(a-x)$. 计算得到

$$\ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)]=\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)=\ln\frac{2}{1+\tan t}$$
$$=\ln 2-\ln(1+\tan t).$$

由此可见

$$\ln(1+\tan t)-\frac{1}{2}\ln 2 \tag{10.15}$$

关于区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 的中点是奇函数. 应用命题 10.4.5, 函数 (10.15) 在该区间上的积分为 0, 因此就可得到

$$I=\int_0^{\pi/4}[\ln(1+\tan t)-\frac{1}{2}\ln 2]\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\ln 2\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.\quad\square$$

下面的恒等式在作代换 $\tan x=t$ 之后就得到关于广义积分的恒等式, 很有用处 (见 12.5.2 小节第一组参考题 1).

例题 10.4.8 证明: 对任意实数 a 成立恒等式

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}\equiv\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^a x}\equiv\frac{\pi}{4}.$$

证 容易证明两个积分相等, 因此下面只要计算第一个积分. 从

$$\frac{1}{1+\tan^a(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1}{1+\cot^a x}=\frac{\tan^a x}{1+\tan^a x}=1-\frac{1}{1+\tan^a x},$$

可见第一个积分的被积函数减去 1/2 之后关于区间中点为奇函数, 于是就可以用命题 10.4.5 得到

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\tan^a x}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.\quad\square$$

10.4.4 用递推方法求定积分

设有一列函数 $f_n(x)\in R[a,b]$, 其中下标 $n\in\mathbf{N}_+$ 为参数. 为了计算积分 $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 我们可用各种方法将下标为 n 的积分 $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 化成与下标 $k<n$ 的积分 $\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ 有关的表达式 (即**递推公式**). 继续如此做下去, 就有可能将问题化为求下标最小的一个或几个积分. 计算定积分的这种方法, 称为**递推方法**.

例题 10.4.9 计算 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

解 两个积分相等可以由换元 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ 得到. 由定积分的分部积分法,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x)$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

移项后得递推公式:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ (n \geqslant 2).$$

重复使用上述公式并由于

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1,$$

就得到

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数.} \end{cases} \tag{10.16}$$ □

注 请初学者注意, 在定积分的计算中, 公式 (10.16) 经常有用, 因此需要记住这个公式并能熟练应用. 此外, I_n 在 n 为奇数和偶数时的表达式不同是今后导出 Wallis 公式的关键 (命题 11.4.1).

例题 10.4.10 设 m, n 为自然数, 计算含双参数的积分

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

解 令 $x^{m-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $(1-x)^{n-1} = u$, 进行分部积分, 得到递推公式:

$$B(m,n) = \frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1),$$

连续应用上述公式, 得到

$$B(m,n) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)$$
$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$ □

注 读者可将本题与例题 9.1.10 比较, 以看出定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法之间的差别.

10.4.5 积分中值定理的应用

同微分中值定理一样, 积分中值定理在数学分析中同样十分重要. 应该指出, 应用积分中值定理的例题五花八门, 举不胜举, 其解题的方法与技巧也多种多样, 在研究生入学的数学分析试卷中更是经常出现. 由于篇幅限制, 我们不可能举出大量这样的例题, 希望初学者能通过**模仿与实践**, 举一反三, 拓宽自己的思路. 以下只是一些初步的例子, 更多的应用见下一章.

首先给出积分第二中值定理的一个证明, 它同时也是积分第一中值定理的典型应用.

例题 10.4.11 设 $f \in C[a,b]$, g 在区间 $[a,b]$ 上可微且 $g'(x) \leqslant 0$, 则有 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 在积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 中, 令 $\mathrm{d}v = f(x)\,\mathrm{d}x$, $u = g(x)$, 作分部积分:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \left(g(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\Big|_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g'(x)F(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到变限积分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的连续性与 $g'(x) \leqslant 0$, 对右边最后一个积分用积分第一中值定理 (及其改进), 知道存在 $\xi \in (a,b)$, 使得成立

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)F(x)\,\mathrm{d}x &= F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in (a,b). \quad \square\end{aligned}$$

下一个例题实际上是例题 10.2.7 的一个特例.

例题 10.4.12 设 $f \in C[0,2\pi]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.17}$$

解 先将积分区间 $[0,2\pi]$ 划分为 $\sin nx$ 的定号区间, 再用第一中值定理:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} |\sin nx|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in (2(k-1)\pi/n, 2k\pi/n)$, $k=1,2,\cdots,n$. 又直接计算得到

$$\int_{(2(k-1)\pi)n}^{(2k\pi)/n} |\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{4}{n}\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{n},$$

因此有

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{2\pi}{n}\right).$$

上式右边的和式, 可看成 $[0,2\pi]$ 上的连续函数 f 在 $[0,2\pi]$ 的 n 等距分划下的一个 Riemann 和. 令 $n\to\infty$ 就得到所求证的结果. □

注 1 本题采用的证明方法可称为 "子区间法", 即在计算一列函数 $\{f_n(x)\}$ 在某个区间上的定积分的极限值时, 对每个自然数 n, 把该区间划分成 n 个子区间, 分别计算出函数 $f_n(x)$ 在这些子区间上的定积分, 然后相加. 一般会得到一个与 n 有关的值, 最后取极限即可.

注 2 本题也可以通过如下方法证明: 先对阶梯函数 f 证明 (10.17) 成立, 然后用阶梯函数来逼近连续函数, 从而证明 (10.17) 对一般的连续函数成立. 这样的方法比较复杂, 但可以放宽对 f 的条件 (参见第一组参考题 5). 有兴趣的读者可以一试.

下一题的方法很多, 然而用积分中值定理的方法在思路上非常清晰.

例题 10.4.13 设对每个 $n \in \mathbf{N}_+$, $f_n(x) \in C[0,1]$, 且有 $\int_0^1 f_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 证明: 存在 N 和常数 c_i, $i=1,2,\cdots,N$, 使得

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2 = 1, \quad \max_{x\in[0,1]}\left|\sum_{n=1}^{N} c_n f_n(x)\right| > 100.$$

证 容易看出题中的 100 换成其他大数都是可以的. 对于积分等式

$$\int_0^1 [f_1^2(x)+f_2^2(x)+\cdots+f_N^2(x)]\,\mathrm{d}x = N$$

的左边用积分第一中值定理, 知道存在 ξ, 使得

$$f_1^2(\xi)+f_2^2(\xi)+\cdots+f_N^2(\xi)=N.$$

将上式左边看成为 N 维 Euclid 空间中的一个向量

$$\boldsymbol{v}=(f_1(\xi),f_2(\xi),\cdots,f_N(\xi))$$

的长度平方, 则这个向量的长度就是 $\sqrt{N}$.

另一方面, 可以将待定的 N 个数 $c_1,\cdots,c_N$ 看成为一个单位长度的待定向量 $\boldsymbol{c}$. 这样一来就只要使得

$$|c_1f_1(\xi)+c_2f_2(\xi)+\cdots+c_Nf_N(\xi)|>100$$

就够了. 而上式的左边可以看成是向量 $\boldsymbol{v}$ 与单位向量 $\boldsymbol{c}$ 的内积的绝对值. 为了使它尽可能大, 只要使它们同方向即可. 这时的内积等于向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $\sqrt{N}$. 因此只要取 $N=10\,001>100^2$ 和

$$c_i=\frac{f_i(\xi)}{\sqrt{N}},\quad i=1,2,\cdots,N,$$

就可以满足要求. □

10.4.6 练习题

1. Cauchy 曾经用下面的例子说明用 Newton-Leibniz 公式时必须验证条件. 请指出以下计算中的错误并作更正:

$$\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\arctan(\sec x)\Big|_0^{3\pi/4}=-\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}.$$

2. 计算下列各题:

(1) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 \min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\cos t}}$;　　(4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\quad(ab\neq 0)$.

3. 利用对称性, 计算下列各题:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

4. 设 $f\in C[0,a]$, $a>0$.

(1) 在 $[0,a]$ 上 $f(x)+f(a-x)\neq 0$, 计算 $I=\displaystyle\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x$;

(2) 在 $[0,a]$ 上 $f(x)f(a-x)\equiv 1$, 计算 $I=\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

5. 设 f 为连续函数, a,b 为实数, 证明下列等式:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $n\in\mathbf{N}_+$, 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{2n-1}x\cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^{2n-1}x\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x$.

7. 计算 $I(m,n)=\displaystyle\int_0^1 x^m\ln^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 m,n 是自然数.

8. 计算 $J(m,n)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 m,n 是自然数.

9. 求 $F'(0)$, 其中 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

10. (Fejer 积分) 证明: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

11. 定义 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\pi/2}|\sin t|\,\mathrm{d}t$, $x\in(-\infty,+\infty)$. (1) 证明: f 是周期为 π 的周期函数; (2) 求 f 的最大值与最小值.

12. 设 $f\in C[0,1]$, 且在 $(0,1)$ 上可微. 如果 $\displaystyle\int_{7/8}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}f(0)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=0$.

§10.5 关于教学的建议

10.5.1 学习要点

1. 可积的三个充分必要条件对于本科阶段的学习一般已经足够. 但是近年来不少数学分析教科书 (例如 [7, 42] 等) 将原先在实变函数课程中的 Lebesgue 定理 (见命题 10.1.6) 写入教材, 并出现了各种处理方法. 这是数学分析课程改革中的一个新动向. 本书避免了对于零测度集合的正面叙述, 但仍给出了 Lebesgue 定理的证明, 其中的方法来自 [7]. 我们认为其中的思路和处理还是比较容易接受的.
2. 微积分基本定理使得微分学和积分学成为统一的整体. 因此到了目前的学习阶段时, 解题方法非常丰富, 各种应用极其广泛. 为了选材和安排方便起见, 本章的题基本上还是围绕基本内容来选取的, 参考题一般也都比较容易; 较为困难的应用大都放在下一章内, 其中有很多材料是为考研服务的, 请读者根据自己的需要选用.
3. **对习题课的建议** 本章定理较多, 在应用这些定理时, 学生往往容易忽视检验定理的某些条件. 例如, 在应用积分中值定理时, 忽视检验第一中值定理条件中的 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号与第二中值定理条件中的 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 在应用定积分的换元积分法时, 忽视检验 $g'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 而在对积分上限 x 求导时, 忽视检验被积函数在 x 点的连续性. 在习题课上可以举出反例, 以加深学生对这些条件的印象.

下面是一些可供学生思考和讨论的例题, 其中的解法或证法都有错误, 请分析原因, 并作改正.

例题 10.5.1 证明: $\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 0$

证 因为 $x^2 = x\cdot x$, 因此由积分第一中值定理, 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使

$$\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \xi\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\xi\cdot x^2\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

错误分析 应用第一中值定理的必要前提是被积函数的两个因子之一在积分区间上不变号, 而本题的上述做法不满足这个条件.

例题 10.5.2 设 f 是周期为 T 的可积函数, 证明: 对于任意实数 a, 成立

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 定义函数 $F(a)=\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x,\ a\in(-\infty,+\infty)$. 则

$$F'(a)=\left(\int_0^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(a+T)-f(a)=0.$$

因此 $F(a)\equiv C$ (C 为常数), 又 $C=F(0)=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=C=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

错误分析 本题只假定 f 可积, 因此不能在函数 $F(a)=\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ 中对变动积分限求导.

例题 10.5.3 计算 $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}$.

解 先求不定积分, 得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

然后用 N.L.公式, 可以得到

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^\pi=0.$$

错误分析 由于 $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有间断点 $x=\frac{\pi}{2}$, 因此不能用 N.L.公式.

10.5.2 参考题

第一组参考题

1. 设 m 为自然数, $a<b$, 试从定积分的定义出发计算 $\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x$.

2. (1) 举例: 从 $|f|\in R[a,b]$ 未必能推出 $f\in R[a,b]$;

   (2) 证明: 若 f 是导函数, 则当 $|f|\in R[a,b]$ 时, 就一定有 $f\in R[a,b]$.

3. 设 $f,g\in R[a,b]$, ξ 和 ξ' 是从属于分划 P 的两个不同介点集, 证明:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,g(\xi_k')\Delta x_k=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在区间 (a,b) 上为下凸函数, 证明: f 的两个单侧导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 在 I 中的任意有限闭区间 $[c,d]$ 上可积, 且成立 Newton-Leibniz 公式:
$$f(d)-f(c)=\int_c^d f'_-(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^d f'_+(x)\,\mathrm{d}x.$$
5. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: 对于每一个给定的 $\varepsilon>0$, 存在函数 g, 使得
$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon,$$
其中的 g 是: (1) 阶梯函数, (2) 折线函数, (3) 连续函数, (4) 连续可微函数.
6. **证明积分的连续性命题**: 设 $f\in R[a-\delta,a+\delta]$, 其中 $\delta>0$, 则有
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$
7. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,[c,d]\subseteq[a,b]$, 使 f 在子区间 $[c,d]$ 上的振幅 $\omega_{f[c,d]}<\varepsilon$.
8. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: f 的连续点在 $[a,b]$ 中稠密 (即 f 在 $[a,b]$ 的每个子区间 (c,d) 中有连续点).
9. 设非负函数 $f\in R[a,b]$, 求证: 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 的充分必要条件是 f 在所有连续点处的值都等于 0.
10. 设 $f,g\in R[a,b]$, 且在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f(x)=g(x)$, 证明:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
11. (积分第一中值定理的一种推广) 证明: 设 $f,g\in R[a,b]$, 其中 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
12. 计算以下渐近等式
$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty)$$
中的待定常数 a, b.
13. 设非负严格增加函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由积分中值定理, 对于每个 $p>0$ 存在唯一的 $x_p\in(a,b)$, 使
$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\,\mathrm{d}t.$$
试求 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p$.

14. 设 $f \in C[0,+\infty)$, a 为实数, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)$, 证明: $f(+\infty)=0$.

15. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 定义 $F(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$, $a \leqslant x \leqslant b$, (1) 证明: F 在 $[a,b]$ 上可导, (2) 计算 $F'(x)$.

16. 设 $n \in \mathbf{N}_+$, 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

17. 令 $B(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\dfrac{(-1)^k}{m+k+1}$, $m,n\in\mathbf{N}_+$, (1) 证明 $B(m,n)=B(n,m)$, (2) 计算 $B(m,n)$.

18. 证明: 当 $m<2$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^m}\int_0^x \sin\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=0$.

19. 证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty}R^{\lambda}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$.

20. 设 $f\in C^2[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x\,\mathrm{d}x=5$, 求 $f(0)$.

21. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 找出满足条件

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,\ \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2$$

的所有 f, 其中 a 为给定实数.

22. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1)=3\int_0^{1/3}\mathrm{e}^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

23. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 且 $f^2(t)\leqslant 1+2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$, 证明: $f(t)\leqslant 1+t$.

24. 设 $f\in C^1[1,+\infty)$, $f(1)=1$, 且当 $x\geqslant1$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$, 证明: 存在有限极限 $f(+\infty)$, 且 $f(+\infty)\leqslant 1+\dfrac{1}{4}\pi$.

(本题即 8.5.3 小节练习题 13.)

25. 证明: $\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=0$.

第二组参考题

1. (连续量的平均值) 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的单调函数, 定义 f 的平均值为

$$F(x)=\begin{cases} f(0^+), & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x>0.\end{cases}$$

证明: (1) F 在 $[0,+\infty)$ 上为单调连续函数, 且与 f 具有相同的单调性; (2) $F(+\infty)=f(+\infty)$.

2. 证明: $f \in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f = I$ 的充分必要条件是存在 $[a,b]$ 的一个分划序列 $\{P_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$, 满足条件 $\lim\limits_{k\to\infty}\|P_k\| = 0$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k} f(\xi_{k,i})\Delta x_{k,i} = I$, 而且极限值不依赖于介点集的选取.

   (本题表明在 Riemann 积分的定义中分划的任意性要求可以降低. 例如用等距分划也是可以的.)

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 如果存在常数 I, 使对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a,b]$ 的任意分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 只要 $\|P\| < \delta$, 就有 $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon$, 则 $f \in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f = I$.

   (不引入介点集来定义的积分在历史上称为 Cauchy 积分. 本题表明对于有界函数来说, Cauchy 积分与 Riemann 积分一致.)

4. (Riemann 定理) 设 $f \in R[a,b]$, $g(x)$ 以 T 为周期且在 $[0,T]$ 上可积, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\, g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 是一个 n 次多项式, 且满足条件 $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 证明:
$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

6. 计算下列积分:

   (1) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, \cos nx\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, \sin nx\,\mathrm{d}x$.

7. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \cos^n \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$.

8. 1996 年发现了计算圆周率的全新算法, 它可以计算圆周率的任意指定位数上的数字, 而不必求出在这一位之前的任何数字. 这种算法的基础是关于圆周率的新公式. 它涉及到一个积分的两种计算方法. 下面的问题就是其中的前一半. 其余部分将在下册的幂级数一章中介绍.

   证明:
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

第十一章 积分学的应用

本章共分五节. §11.1 节是积分学在几何计算中的应用. §11.2 节介绍与积分有关的不等式. §11.3 节是积分的估计和近似计算. §11.4 节是积分学在分析中的其他应用, 其中包括数列极限计算, Wallis 公式, Stirling 公式, Taylor 公式的积分型余项和 π 的无理性证明等. 最后一节为学习要点和两组参考题.

§11.1 积分学在几何计算中的应用

11.1.1 基本公式与方法

对于平面图形的面积计算, 除了可以用几个曲边梯形面积的代数和来计算之外, 还可以用下面两个公式, 它们在许多问题中比直角坐标下的公式要方便.

1. 设没有自交点的平面封闭曲线的参数方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 当 t 从 α 增加到 β 时, 点 $(x(t), y(t))$ 以逆时针方向绕闭曲线一周, 则其面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x). \tag{11.1}$$

   这个公式实际上是下册中关于第二类曲线积分的 Green 公式的特例. 对于比较简单的情况将在下面给出证明.

2. 在极坐标中由射线 $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ (其中 $\theta_1 < \theta_2$), 与连续曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 围成的扇形面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{11.2}$$

在一定的条件下, 利用一元函数定积分还可以计算某些三维形体的体积和侧面积. 这些公式以及求曲线弧长的公式在一般教科书中都有, 这里不再列出.

需要学习的是导出这些公式中所用的方法.

关于体积与侧面积公式的严格讨论, 要以多元微积分为基础才能进行. 在现阶段, 它们的推导是基于**微元法**. 这种方法虽然并不完全严格, 但被广泛用于计算分布在区间 $[a, b]$ 上的几何量以及物理量, 其中实际上包含了两个内容:

(1) **以直代曲法** 计算分布在充分小的区间 $[x, x+\Delta x] \subseteq [a, b]$上的部分几何量时, 对那些当 $\Delta x \to 0$时, 其长度趋于 0 的曲线段, 可以用连接曲线端点的直线段来代替进行计算. 如果由此得到的量可表示为 $f(\xi)\Delta x$, 其中 $\xi \in [x, x+\Delta x]$, 则所求的几何量为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) **舍弃高阶无穷小量法** 如果存在 $M>0$, $p>1$, 使在任一充分小的区间 $[x,x+\Delta x]\subseteq[a,b]$ 上, 成立

$$|g(\eta)\Delta x-f(\xi)\Delta x|\leqslant M(\Delta x)^p,$$

其中 $\eta,\xi\in[x,x+\Delta x]$, $f(\xi)\Delta x$ 为用以直代曲法得出的部分量, 则所求的几何量也可写成积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. 在对具体问题应用舍弃高阶无穷小量法时, 我们往往取 $p=2$.

11.1.2 例题

平面图形的面积计算公式 (11.1) 往往很有用. 由于目前的各种教科书在定积分应用部分不一定都有介绍, 因此我们在这里仿照 [42] 给出简单情况下的一个证明, 其中假定运算所需要的连续和可微等条件均满足.

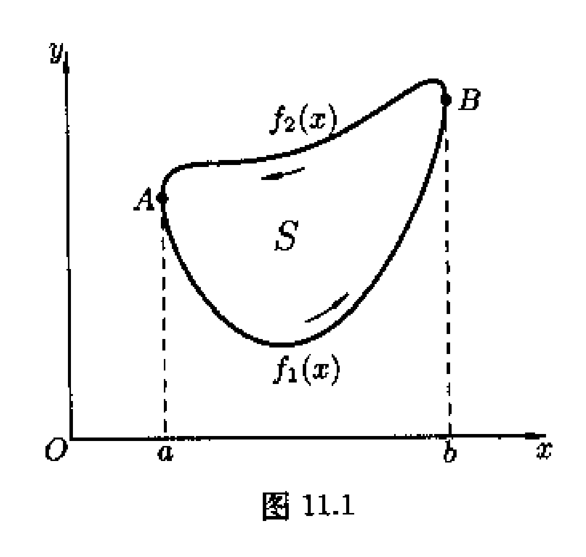


图 11.1

如图 11.1 所示的一条封闭曲线由参数方程 $x=x(t), y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 所描述. 当 t 从 α 到 β 时, 点 $(x(t),y(t))$ 从 A 点出发按逆时针方向经过 B 点绕曲线一周回到 A 点. 设 A,B 两点的横坐标分别是函数 $x(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值和最大值. A 点对应的参数值是 α 和 β, B 点对应的参数值为 γ. 设从 A 点到 B 点的两段曲线在直角坐标下的方程为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, 且如图所示在区间 (a,b) 上有 $f_2(x)>f_1(x)$.

这样就可以计算封闭曲线所包含的图形面积如下:

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_\beta^\gamma y(t)\,\mathrm{d}x(t)-\int_\alpha^\gamma y(t)\,\mathrm{d}x(t)=-\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t),\end{aligned}$$

由分部积分又可得到

$$S=-y(t)\,x(t)\Big|_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t)=\int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t).$$

取二者的平均值就得到公式 (11.1).

注 1 从证明中可见实际上得到了计算面积 S 的三个公式. 但是将前两个取平均值后得到的公式 (11.1) 在计算中一般较为方便, 这从下面举例就可明白. 此外, 如前所说, 该公式对于一般的没有自交点的参数曲线都是成立的.

注 2 由于极坐标下的 θ 就可看成为参数, 因此完全可以从公式 (11.1) 推导出极坐标下的扇形面积计算公式 (11.2) (留作练习题).

例题 11.1.1 求由方程 $x^2+xy+y^2=1$ 所确定的图形面积.

这就是求图 6.5 中所示的椭圆面积. 容易想到的一种思路是: 先用解析几何中的转轴方法消去交叉项, 由此确定椭圆的长短半轴, 最后用简单的定积分计算即可求出椭圆面积 (细节从略).

解 现在用微积分方法计算本题. 这里给出三种计算方法.

第一种方法是从方程解出

$$y_{1,2}(x)=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2},\quad -\frac{2}{\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}},$$

然后计算定积分

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}}[y_1(x)-y_2(x)]\,\mathrm{d}x=2\int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

第二种方法是用极坐标, 用 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入, 得到

$$r^2=\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

用公式 (11.2) 计算定积分:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{2+\sin\phi}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

第三种方法是先将方程左边配方为

$$x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}x^2+(y+\frac{x}{2})^2=1,$$

然后引入参数方程

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t,\ y=\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

由于

$$x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\,(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t)$$
$$-(\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t)(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t)=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

因此最后的定积分计算极其简单:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\quad\square$$

注 在习题课教材 [13] 中列举了求椭圆

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\ \ (A>0,\Delta=AC-B^2>0)$$

所围面积的八种解法, 其中包括了上面的前两种解法, 但没有用公式 (11.1) 的解法. 实际上, 用该公式处理一般情况也是非常方便的 (留作练习题).

例题 11.1.2 求由 $y^2-2xy+x^3=0$ 所确定的封闭曲线所包围的图形面积.

解 为了分析图形的形状, 需要找出 y 随 x 变化的规律. 为此需要引入参数. 令 $y=tx$ 是常用的方法. 这样就可以得到参数方程:

$$x=2t-t^2,\ y=2t^2-t^3.$$

首先分析 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 的变化情况, 然后就不难合成 xOy 坐标平面上的曲线. 利用这些分析就可以画出题设的曲线图形如图 11.2 所示. (参看例题 8.6.1 中对于类似问题的分析.) 当变量 t 从 0 到 2 时点 $(x(t),y(t))$ 从原点出发又回到原点, 恰好按照逆时针方向描出图中的一条封闭曲线.

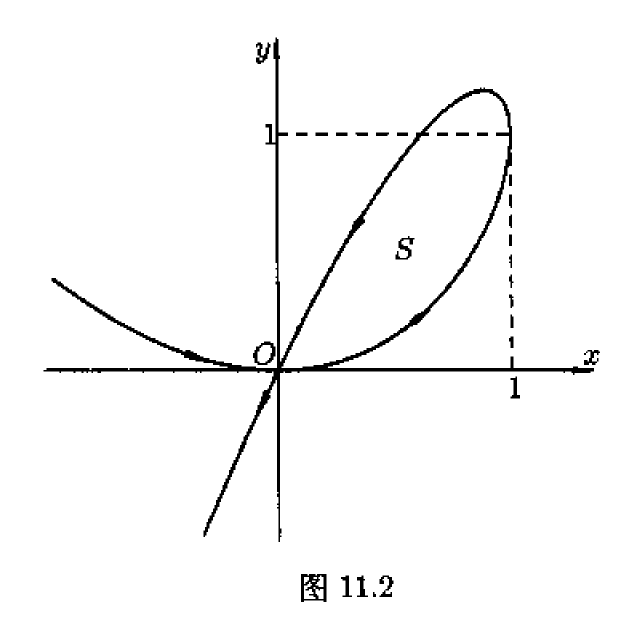


图 11.2

对于面积 S 的计算至少有两个方法. 第一个方法是利用直角坐标下的公式. 由于不难从方程直接解出

$$y_{1,2}(x)=x(1\pm\sqrt{1-x}),\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此就有

$$S=\int_0^1(x+x\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x-\int_0^1(x-x\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1(1-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-\frac{2}{5}t^{5/2}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

第二种方法是用公式 (11.1):

$$S=\frac{1}{2}\int_0^2(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_0^2[(2t-t^2)\,\mathrm{d}(2t^2-t^3)-(2t^2-t^3)\,\mathrm{d}(2t-t^2)]$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(4t^2-4t^3+t^4)\,\mathrm{d}t=\frac{8}{15}.\quad\square$$

例题 11.1.3 设曲线方程为 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$, 求曲线的长度.

解 记方程为 $y=f(x)$, 由弧长公式计算定积分

$$l=\int_0^\pi\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^\pi\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\ \left(\text{作代换 } t=\frac{x}{2}\right)$$
$$=2\left(\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t\right)=4\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t=4.\quad\square$$

例题 11.1.4 求双曲抛物面 $z=x^2-y^2$ 与平面 $x=1$, $z=0$ 所围成的立体体积.

分析 如图 11.3 所示, 该立体不是旋转体. 我们将用两种方法求解. 先计算平行于坐标平面 yOz 的平面或平行于坐标平面 xOy 的平面截立体所得的面积 $A(x)$ 或 $B(z)$, 然后计算定积分

$$\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x\quad\text{或}\quad\int_0^1 B(z)\,\mathrm{d}z$$

得到所论立体的体积

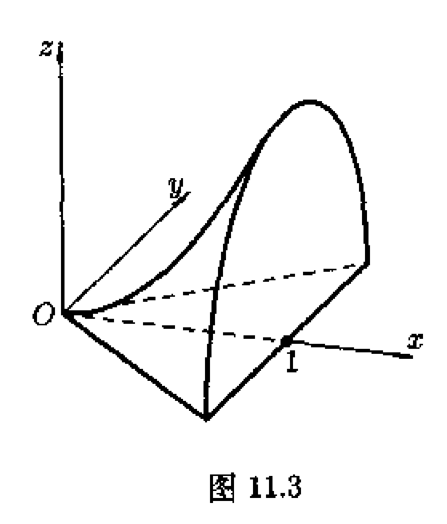


图 11.3

解 1 x 的变化范围是 $0\leqslant x\leqslant 1$. 对每个固定的 $x\in[0,1]$, 计算截面积 $A(x)$ 时, $z=x^2-y^2$ 成为抛物线的方程, 其中 $y\in[-x,x]$. 从而得到

$$A(x)=2\int_0^x(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$
$$=2\left(x^3-\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{4}{3}x^3.$$

因此, 所求的体积为

$$V=\frac{4}{3}\int_0^1x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\quad\square$$

解 2 z 的变化范围也是 $0 \leqslant z \leqslant 1$, 这可由 $x=1$ 时 $z=1-y^2$, 而 $|y| \leqslant 1$ 得到. 计算 $B(z)$ 时, 也应把 z 看作在 $[0,1]$ 上取值的固定数, 于是 $z=x^2-y^2$ 成为双曲线方程 $y^2=x^2-z,\ x \in [\sqrt{z},1]$, 或 $y=\pm\sqrt{x^2-z},\quad x \in [\sqrt{z},1]$. 这样, $B(z)$ 便是平面 $Z=z$ 上的上述双曲线与 $x=1$ 围成的弓形面积, 因此利用图形关于 x 轴的对称性, 可以计算得到

$$\begin{aligned} B(z) &= 2\int_{\sqrt{z}}^{1} \sqrt{x^2-z}\,\mathrm{d}x = \left(x\sqrt{x^2-z} - z\ln\left(x+\sqrt{x^2-z}\right)\right)\Big|_{\sqrt{z}}^{1} \\ &= \sqrt{1-z} - z\ln\left(1+\sqrt{1-z}\right) + z\ln\sqrt{z}. \end{aligned}$$

因此所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 B(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-z}\,\mathrm{d}z - \int_0^1 z\ln\left(1+\sqrt{1-z}\right)\mathrm{d}z + \int_0^1 z\ln\sqrt{z}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

显然这三个积分的计算要比解 1 中的计算复杂得多 (细节从略), 最后结果为

$$V = \frac{2}{3} - \frac{5}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

注 由此可见, 在利用平行的截面面积求体积的问题中, 选择合适的截面是十分重要的. 请读者考虑, 本题如果通过用平行于于坐标平面 xOz 的平面去截所论立体, 先计算与 y 有关的截面积后再积分的方法求体积, 计算过程是否简便?

11.1.3 Guldin 定理

质心是一个物理量. Guldin 的第一和第二定理将求旋转体的体积和侧面积转化为求质心, 体现了数学问题与物理问题之间的内在联系.

命题 11.1.1 (质心公式) 设密度均匀的平面图形分布在直线 $X=a, X=b$ 和 $Y=c, Y=d$ 之间, 且对任一 $x \in [a,b]$ 和 $y \in [c,d]$, 直线 $X=x$ 和 $Y=y$ 截图形的线段长度为 $s(x)$ 和 $s(y)$, 则图形的质心的横坐标与纵坐标为

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_a^b xs(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_c = \frac{\displaystyle\int_c^d ys(y)\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_c^d s(y)\,\mathrm{d}y}. \tag{11.3}$$

而分段光滑曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的质心的横坐标为

$$x_c=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}. \tag{11.4}$$

由上面的质心公式, 经过适当的计算, 可以得到下面两条定理:

命题 11.1.2 (Guldin 第一定理) 设平面曲线的质心坐标为 (x_c,y_c), 且曲线位于右半平面内, 则曲线绕 y 轴旋转一周所产生的旋转曲面的面积 S_y 等于质心绕 y 轴一周所经过的路程 $2\pi x_c$ 乘以曲线的弧长 l, 即 $S_y=2\pi x_c l$.

命题 11.1.3 (Guldin 第二定理) 设平面图形的质心坐标为 (x_c,y_c), 且图形位于右半平面内, 则图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转立体的体积 V_y 等于质心绕 y 轴一周所经过的路程 $2\pi x_c$ 乘以图形的面积 S, 即 $V_y=2\pi x_c S$.

例题 11.1.5 设曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 分段光滑. 求曲边梯形 $\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体体积.

解 1 由微元法, 对曲边梯形在充分小的区间 $[x,x+\Delta x]\subseteq[a,b]$ 上的部分, 取 $\xi\in[x,x+\Delta x]$. 我们用过 $(\xi,f(\xi))$ 点平行于 x 轴的直线段代替 $y=f(x)$ 的对应曲线段, 然后将所得到的矩形绕 y 轴旋转一周, 这样得到的旋转体体积为

$$\Delta V=\pi f(\xi)((x+\Delta x)^2-x^2)=\pi f(\xi)(2x\Delta x-(\Delta x)^2),$$

舍弃高阶无穷小量 $\pi f(\xi)(\Delta x)^2$ 后在 $[a,b]$ 上积分, 就得到旋转体体积

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

解 2 由 Guldin 第二定理, 曲边梯形 $\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体体积等于曲边梯形的质心 x_c 绕 y 轴一周所经过的路程 $2\pi x_c$ 乘以图形的面积 S,

$$V=2\pi x_c S. \tag{11.5}$$

将质心公式 (11.3) 中关于 x_c 的公式与曲边梯形的面积公式 $S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 代入 (11.5), 便得到

$$V=2\pi\cdot\frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

例题 11.1.6 求上题的旋转体中由曲线 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 生成的侧面积.

解 1 由以曲代直法, 曲线 $y=f(x)$ 在充分小的区间 $[x,x+\Delta x] \subseteq [a,b]$ 上的那部分曲线段绕 y 轴旋转一周得到的面积可以用过两点 $(x,f(x))$ 与 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ 的直线段绕 y 轴旋转一周得到圆台的侧面积来代替, 即

$$\Delta S_{侧} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}(x+(x+\Delta x))\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta f(x))^2}$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}(x+(x+\Delta x))\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

舍弃高阶无穷小量 $\pi\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2}(\Delta x)^2$ 后在 $[a,b]$上积分, 得旋转体侧面积

$$S_{侧} = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

解 2 由 Guldin 第一定理, 所说的侧面积等于曲线段 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的质心 (x_c, y_c) 绕 y 轴一周所经过的路程 $2\pi x_c$ 乘以曲线的弧长 l, 即

$$S_{侧} = 2\pi x_c l. \tag{11.6}$$

将弧长公式 $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 与关于 x_c 的质心公式 (11.4) 代入 (11.6), 便得到

$$S_{侧} = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

11.1.4 练习题

由于在习题集 [27] 和各种教科书中都有许多几何计算题可用, 因此本节只收入少量练习题作为补充.

1. 设椭圆方程为 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$, 其中 $A>0$, $\Delta=AC-B^2>0$. 试用例题 11.1.1 中的第三种方法 (即公式 (11.1)) 证明: 由该椭圆所围的面积等于 $\pi/\sqrt{\Delta}$.
2. 试以公式 (11.1) 为出发点, 推导出极坐标下的扇形面积计算公式 (11.2).
3. 已知三个半径为 r 的圆, 其中每个圆都通过另外两个圆的圆心, 求三个圆公共部分的面积.

   (本题有不用微积分的初等解法.)
4. 周长一定的等腰三角形, 腰与底的比例为多少时, 它绕底边旋转所得的旋转体体积最大?

5. 半轴长为 a 和 b 的一个椭圆在曲线 $y=c\sin(x/a)$ 上进行无滑动的滚动. 问 a,b,c 之间的关系怎样时, 椭圆在曲线上滚动了曲线的一个周期时, 它正好转了一周?
6. 在单位圆周上任意取一段位于第一象限且长度为 s 的弧, 设位于该弧下方、x 轴上方的曲边梯形的面积为 A, 而位于该弧左侧、y 轴右侧的曲边梯形的面积为 B. 证明: $A+B$ 只依赖于弧的长度 s, 而与弧的位置无关.
7. 试求由抛物线 $y^2=2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
8. 至少用两种方法计算下列三个圆的公共部分的面积:
$$x^2+y^2\leqslant 4,\ \ (x-2)^2+y^2\leqslant 4,\ \ x^2+(y-2)^2\leqslant 4.$$
9. 求椭圆柱 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{100}\leqslant 1$ 夹在平面 $z=0, y=2z$ 之间部分的体积.
10. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 所围立体区域的体积.

(这个立体区域的体积计算问题最早是由我国数学家刘徽 (公元 263 年) 提出来的, 他还给这个区域起名为牟合方盖 (见 [35]).)

§11.2 不等式

在 §1.3 节和 §8.5 节已经接触到了许多不等式. 现在有了积分学的工具, 可以得到的不等式就更多了. 由于这方面的材料较多, 我们将分成几小节来介绍.

11.2.1 凸函数不等式

凸函数的基本定义和主要理论见 §8.4 节和第八章的部分参考题. 需要指出, 本书中的下凸函数和上凸函数分别与有的文献中的凸函数和凹函数相对应.

在含有积分的凸函数不等式中, 先介绍 Hadamard 不等式.

例题 11.2.1 (Hadamard 不等式) 设 f 是 (a,b) 上的下凸函数, 则对每一对 $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, 有
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{11.7}$$

从图 11.4 上可以看出 Hadamard 不等式具有明显的几何意义. 由于 f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 曲线段 $y=f(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 位于曲线过点 $(\frac{1}{2}(x_1+x_2), f(\frac{1}{2}(x_1+x_2))$ 的切线段上方[①], 并位于连接点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 的

① 若 f 于该点不可导, 则从命题 8.4.3 可知也存在满足要求的直线段

直线段下方, 因此曲线段 $y=f(x)$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ 与直线 $x=x_1$, $x=x_2$ 及 x 轴围成的曲边梯形面积应在上述两直线段与直线 $x=x_1$, $x=x_2$ 及 x 轴围成的两个梯形的面积之间.

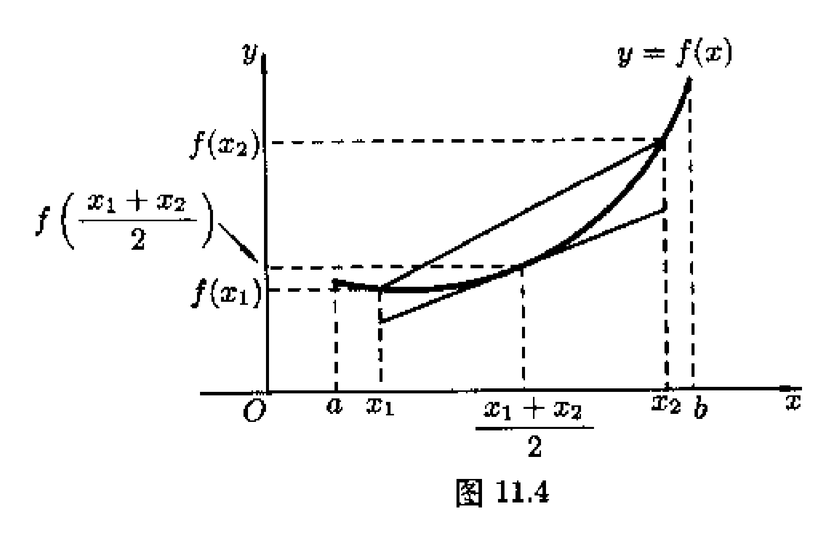


图 11.4

证 从命题 8.4.2 知道 f 连续, 因此可积性没有问题. 注意到 $\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ 不仅是 x_1 和 x_2 的中点, 同时也是 $x_1+\lambda(x_2-x_1)$ 和 $x_2-\lambda(x_2-x_1)$ 的中点, 其中 $\lambda \in [0,1]$. 利用 f 为下凸函数, 则就有不等式

$$\frac{1}{2}[f(x_1+\lambda(x_2-x_1))+f(x_2-\lambda(x_2-x_1))] \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \tag{11.8}$$

将上式两边对 λ 从 0 到 1 积分, 经计算后就可以得到

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \tag{11.9}$$

另一方面, 由 f 是下凸函数又可得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \int_0^1 [\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]\,\mathrm{d}\lambda = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

注 Hadamard 不等式 (11.7) 含有左边和右边的两个不等式. 可以证明, 其中的每一个不等式都是函数下凸的充分必要条件. 又可以证明, 若其中任何一个不等式对所有 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 成立等号, 则 f 只能是线性函数 (留作参考题).

第二个重要的凸函数不等式可以从命题 8.4.7 (Jensen 不等式) 取极限得到:

命题 11.2.1 (Jensen 不等式) 设 $f, p \in R[a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x)$ 非负

且 $\int_a^b p(x)>0$, 则当 ϕ 是 $[m,M]$ 上的下凸函数时, 成立不等式:

$$\phi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)\phi(f(x))\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

若 ϕ 为上凸函数则不等式反向.

Jensen 不等式包含了很多不等式. 取 $p(x)\equiv 1$, 就得到

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\phi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

又若 $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x=1$, 并利用 e^x 为下凸函数和 $\ln x$ 为上凸函数就得到

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\ln\left(\int_a^b p(x)\exp f(x)\,\mathrm{d}x\right).\quad(11.10)$$

左边的不等式就是广义的平均值不等式 (命题 8.5.1) 的积分形式.

下一个不等式也是 Jensen 不等式的特例. 设 $f\in R[a,b]$, $f(x)\geqslant m>0$, 则成立不等式

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

以上的每个不等式又包含了许多具体的不等式. 例如

例题 11.2.2 若 f 为 $[0,1]$ 上的上凸函数, 则对每个自然数 n 成立不等式:

$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

11.2.2 Schwarz 积分不等式

Schwarz 积分不等式是最基本的积分不等式之一, 应用非常广泛.

命题 11.2.2 (Schwarz 积分不等式) 设 $f,g\in R[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 1 (用证明 Cauchy 不等式 (命题 1.3.5) 的同样方法.) 如果 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$ 两个积分中至少有一个不等于 0, 我们不妨设 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. 由于对一切实数 λ, 在 $[a,b]$ 上 $(\lambda f(x)-g(x))^2 \geqslant 0$, 因此有

$$\int_a^b (\lambda f - g)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

将它展开, 得到关于 λ 的非负二次三项式

$$\lambda^2\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x - 2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

因此它的判别式 $\Delta \leqslant 0$, 即

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

移项即得所欲证的不等式.

如果积分 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则可以如下证明:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad \square$$

证 2 将 $[a,b]$ 作等距分划, 令 $x_i = a+\frac{i}{n}(b-a),\ i=0,1,\cdots,n$, 应用 Cauchy 不等式 (命题 1.3.5) 得到

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g^2(x_i),$$

令 $n\to\infty$,即得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

注 1 以上两个证明表明, 为了得到与离散不等式对应的积分不等式, 经常有两条思路可用: (1) 用过去的方法; (2) 从对应的离散不等式取极限.

注 2 从证 1 就可以得到 Schwarz 不等式成立等号的充分必要条件. 实际上, 从判别式 $\Delta=0$ 知道存在某个 λ_0, 使得 $(\lambda_0 f-g)^2$ 在 $[a,b]$ 上的积分为 0. 利用第十章的 Lebesgue 定理 (命题 10.1.6) 和第一组参考题 9, 可见在 $[a,b]$ 上凡

乎处处成立 $\lambda_0 f(x)=g(x)$. 回顾证 1, 这是在 f^2 于区间 $[a,b]$ 上的积分大于 0 的前提下得到的. 对于 g^2 的积分不等于 0 的情况有类似的结论.

注 3 从上述证明可见 Schwarz 不等式与 Cauchy 不等式本质上是同一不等式, 只是前者用积分形式表示而已. 因此 Schwarz 不等式也称为 Cauchy-Schwarz 不等式, 或者 Cauchy-Schwarz-Buniakowsky 不等式.

Schwarz 积分不等式在本书中有多次应用, 下面先举一个例子.

例题 11.2.3 设 $f\in C^1[a,b]$, 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

证 利用条件 $f(a)=0$ 可以写出

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

然后用 Schwarz 不等式作如下估计:

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_a^x (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)(x-a)\leqslant(x-a)\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

再将两边对 x 从 a 到 b 积分就得到所求的结果. □

11.2.3 其他著名积分不等式

除了 Schwarz 不等式, 还有许多其他的著名积分不等式. 下面我们再介绍三个在分析中的基本不等式, 即 Young 不等式, Hölder 积分不等式与 Minkowski 积分不等式.

命题 11.2.3 (Young 不等式) 设 f 在 $[0,\infty)$ 上连续可导且严格单调增加, $f(0)=0$, $a,b>0$, 则有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{11.11}$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 而等号当且仅当 $b=f(a)$ 时成立.

注 Young 不等式的几何意义十分清楚. 由于定积分等于曲边梯形的面积, 可能发生的只有图 11.5 所示的 (a)、(b)、(c) 三种情况. 其中定积分 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 等于画有垂直阴影线的曲边三角形面积, 定积分 $\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y$ 等于画有水平阴影线

的曲边三角形面积. 对于前两种情况, 这两个面积之和都严格大于边长为 a 和 b 的矩形面积, 而在第三种情况则相等. 这个矩形在图中的边界是由曲边三角形的部分边界和一段虚线构成的.

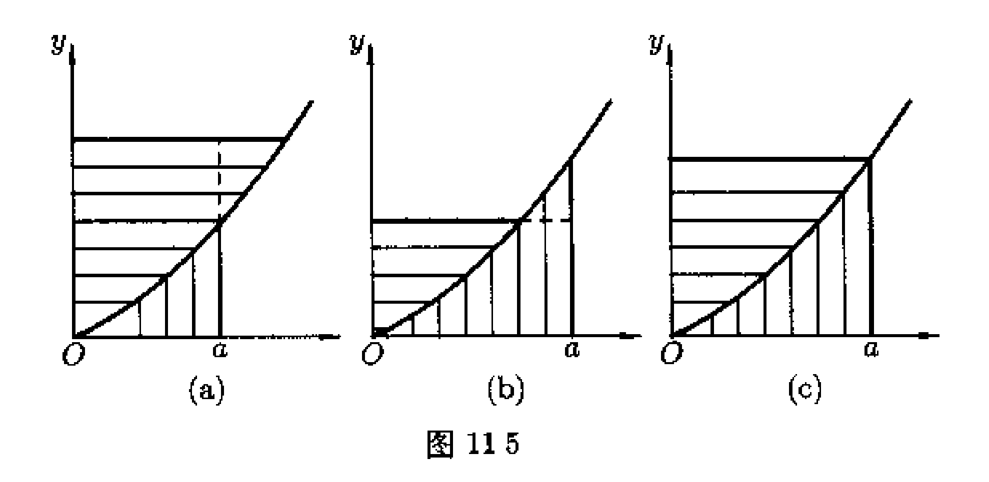


图 11 5

证 将 (11.11) 右边的两个积分之和记为 I. 利用 $g(f(x)) \equiv x$, 对其中第二个积分作变量代换 $y = f(x)$, 即 $x = g(y)$, 然后分部积分得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{g(b)} x\,\mathrm{d}f(x) \\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + xf(x)\Big|_0^{g(b)} - \int_0^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= b\,g(b) - \int_a^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{11.12}$$

其中利用了 $f(g(b)) = b$. 如果 $a = g(b)$, 也就是 $b = f(a)$, 则已经得到 (11.11) 中成立等号的情况 (见图 11.5(c)).

在 $a < g(b)$ 时, 对于 (11.12) 中的积分利用 $f(x)$ 在区间 $[a, g(b)]$ 上严格单调增加, $f(x) \leqslant f(g(b)) = b$, 就得到 $I > b\,g(b) - [g(b) - a]b = ab$. 在 $a > g(b)$ 时, 类似地可得到

$$I = b\,g(b) + \int_{g(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x > b\,g(b) + [a - g(b)]b = ab\text{w} \quad \square$$

注 可以发现以上证明的每一步都有明显的几何意义. 此外, Young 不等式中的条件 "$f \in C^1[0, \infty)$" 可以降低为 "$f \in C[0, \infty)$". 但这样改变条件后, 不能再用分部积分法, 而需要从积分定义出发来建立 (11.12). 这个证明及 Young 不等式的另一边估计留作参考题.

下面的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式都可以从 §8.5 节中对应的离散不等式取极限或者用与那里类似的方法得到, 因此这里不再给出证明.

命题 11.2.4 (Hölder 不等式) 设 $f,g\in R[a,b]$, p,q 为满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 的一对正实数 (共轭实数), 则成立

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \tag{11.13}$$

命题 11.2.5 (Minkowski 不等式) 设 $f,g\in R[a,b]$, $1\leqslant p<+\infty$, 则成立

$$\left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \tag{11.14}$$

当 $0<p<1$ 时不等式反向成立.

注 Hölder 积分不等式与 Minkowski 积分不等式是 "实变函数" 与 "泛函分析" 中的两个基本不等式. 当然在那里对于函数 f,g 的条件要更为一般. 此外, 在 Hölder 不等式中成立等号的条件是存在常数 c, 使得 $|f(x)|=c|g(x)|^{1/(p-1)}$ (或者对换 f 和 g); 在 Minkowski 不等式中成立等号的条件是存在非负常数 c, 使得 $f(x)=cg(x)$ (或者对换 f 和 g). 但即使是在 Riemann 可积条件下, 这两个条件中的等式都应当理解为几乎处处成立 (参见第十章 Lebesgue 定理前的注解).

11.2.4 不等式的其他例题

用积分学方法可以建立过去要用 Taylor 定理才能得到的某些不等式. 下面就是一个例子 (见美国数学月刊, 97 卷 (1990), 912–915 页).

例题 11.2.4 在 $x>0$ 时从 $\cos x\leqslant 1$ 出发, 从 0 到 x 积分, 得到不等式 (命题 1.3.6)

$$\sin x<x.$$

再对两边从 0 到 x 积分, 得到 $1-\cos x<\dfrac{x^2}{2}$. 将它改写为

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2},$$

然后再做一次积分得到

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$

即例题 8.5.3 中的不等式. 于是已经有

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x.$$

下一次积分后可以得到

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

归纳地进行下去就可以得到关于正弦和余弦函数的一般性不等式, 其中包括了 8.5.3 小节最后一个练习题中的不等式. 此外, 还可以得到以下两个对所有 x 成立的绝对值不等式

$$\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

$$\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

对于每个固定的 x, 令 $n\to\infty$, 就可得到在下册中的 Taylor 级数展开式. □

例题 11.2.5 设函数 $f\in C[a,b]$ 且单调增加, 证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 f 非负时, 本题有明显的物理意义: 如果曲线 $y=f(x)$ 单调增加, 则密度均匀的曲边梯形

$$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

的质心不可能落在直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的左边.

分析 本题的解法很多 (参见 [13, 30]), 下面举出其中的两个证明. 关键是要利用 f 的单调性和 $x-(a+b)/2$ 关于积分区间的中点为奇函数的性质.

证 1 因为 f 单调增加, 所以成立

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\geqslant 0. \tag{11.15}$$

将上式对 x 从 a 到 b 积分, 又利用

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

就可以得到所要的不等式. □

证 2 将 $[a,b]$ 分为两个区间, 分别用第一中值定理, 就得到:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&\quad= [f(\xi_2)-f(\xi_1)]\cdot\frac{(b-a)^2}{2} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

因为其中 $a<\xi_1<\dfrac{1}{2}(a+b)<\xi_2<b$, 而 f 单调增加. □

下面是对于广义算术平均值-几何平均值不等式 (例题 8.5.1) 的一个新的积分学证明, 见美国数学月刊, 103 卷 (1996), 585 页.

例题 11.2.6 设有 n 个非负数 $x_1,\cdots,x_n$ 和 n 个正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 且 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$, 则成立不等式

$$G_n \equiv \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \equiv A_n, \tag{11.16}$$

其中当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立等号.

证 只需对 n 个正数 $x_1,\cdots,x_n$ 证明即可. 不妨设已有 $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$, 则存在 $k\in\{1,\cdots,n-1\}$, 使得 $x_k\leqslant G_n\leqslant x_{k+1}$. 这时用拟合法得到

$$\begin{aligned}
\frac{A_n}{G_n}-1 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\left(\frac{x_i-G_n}{G_n}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{G_n}^{x_i} \frac{\mathrm{d}t}{G_n} \\
&= -\sum_{i=1}^k \lambda_i \int_{x_i}^{G_n} \frac{\mathrm{d}t}{G_n} + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \int_{G_n}^{x_i} \frac{\mathrm{d}t}{G_n}.
\end{aligned}$$

又用拟合法无中生有地写出

$$\begin{aligned}
0 &= \ln G_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\ln G_n - \ln x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{G_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{x_i}^{G_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{i=k+1}^n \int_{G_n}^{x_i} \frac{\mathrm{d}t}{t}.
\end{aligned}$$

将两式相加得到

$$\frac{A_n}{G_n}-1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_{x_i}^{G_n} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G_n}\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \int_{G_n}^{x_i} \left(\frac{1}{G_n}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t,$$

由于右边的每一项都非负, 因此就得到 $A_n \geqslant G_n$, 而且可直接看出等号成立的充分必要条件是 $x_i = G_n$, $i = 1, \cdots, n$, 也就是 $x_1 = \cdots = x_n$. □

评注 这个证明确有新意, 但关键并不在于用积分工具. 如果对于中间一步的 $\ln G_n - \ln x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 用 Lagrange 微分中值定理也一样可以进行到底.

11.2.5 练习题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加, 证明: 对每个 $c \in (a,b)$, 函数 $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数.
2. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上是下凸函数, 证明: 函数 $F(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数.
3. 设 f 于 $[0,1]$ 上为非负的上凸函数, 证明: $\int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$.
4. 设 f 在 $[a,b]$ 上为上凸可微函数, $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = \alpha > 0$, $f'(b) = \beta < 0$, 证明:
$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \frac{(b-a)^2}{\beta - \alpha}.$$
5. 设 $f \in C^1[0,2]$, $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leqslant 1$, 证明: $\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant 1$.
6. 已知函数 $f \in C[a,b]$, 且 $f(x)$ 处处大于 0, 证明:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$
7. 已知非负函数 $f \in R[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, k 为实数, 证明:
$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1.$$
8. 设 $f \in C^1[a,b]$ 且 $f(a) = 0$, 证明比例题 11.2.3 更强的不等式:
$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2 (x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$
9. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微且当 $x \in (0,1)$ 时, $0 < f'(x) < 1$, $f(0) = 0$. 证明:
$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

10. (1) 试用 Young 不等式证明: 当 $a,b\geqslant 1$ 时成立 $ab\leqslant \mathrm{e}^{a-1}+b\ln b$.

(2) 设函数 $f\in R[a,b]$, 试用 Minkowski 不等式证明下面两个不等式不能同时成立:

$$\int_0^{\pi}|f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}\quad 和\quad \int_0^{\pi}|f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}.$$

§11.3 积分估计与近似计算

11.3.1 积分值的估计

在许多实际问题中, 我们往往不一定需要知道定积分的精确值, 而只需要对积分值的可能范围进行估计. 这里的方法很多, 其中最基本的方法是先估计被积函数在积分区间上的最小值和最大值 (或者下确界和上确界), 然后乘以区间的长度. 其次就是用积分中值定理和各种不等式进行估计. 当然需要考虑被积函数在积分区间上的具体特性. 下面先通过一个例子来说明各种方法.

例题 11.3.1 估计积分 $I=\displaystyle\int_a^b\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值, 其中 $0<a<b$.

解 如果利用 $|\sin x|\leqslant|x|$, 则只能得到

$$|I|\leqslant b-a.\tag{11.17}$$

这个估计在 $b-a$ 较大时当然很差.

利用积分第一中值定理, 由于因子 $1/x$ 不变号, 就得到:

$$|I|=\left|\sin\xi\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}\right|\leqslant\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{b}{a}=\ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right)<\frac{b}{a}-1.\tag{11.18}$$

如果 $a>1$, 则这个估计比 (11.17) 要好. 但是对于 $b-a$ 很大的情况仍然不好.

利用积分第二中值定理和因子 $1/x$ 单调非负, 就有:

$$|I|=\left|\frac{1}{a}\int_a^{\xi}\sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a}|\cos\xi-\cos a|\leqslant\frac{2}{a}.\tag{11.19}$$

如果 $a>1$, 则对于 $b-a$ 很大的情况这个估计明显比前两个要好. 观察该被积函数的特性 (其图像见图 4.2(a)), 当积分区间较大时, 必须将 $\sin x$ 所起的正负抵消的作用考虑进去, 而不能如前两个估计那样只利用 $|\sin x|\leqslant|x|$ 和 $|\sin x|\leqslant 1$. 这就是估计 (11.19) 优于它们的理由所在.

估计 (11.19) 与区间右端无关. 下面一个估计则对任何 $0 \leqslant a < b$ 都成立:

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < 3. \tag{11.20}$$

这里不妨设 $0 \leqslant a < 1 < b$, 否则下面的估计更为简单. 这时将积分拆开, 并利用 (11.17) 和 (11.19) 就得到

$$|I| \leqslant \left|\int_a^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < 1+2=3. \quad \square \tag{11.21}$$

当然这还是一个很粗的估计. 与区间无关的最优估计问题留作下面的参考题. 又若 a,b 是给定的具体数值, 则还需要利用被积函数在 $[a,b]$ 上的具体特性才能作出较好的估计. 下面就是一个例子 (即是 [27] 中的 2328 题).

例题 11.3.2 估计定积分 $I = \displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解 1 将积分区间按 π 的整倍数拆开, 就不难证明 $I > 0$ (细节从略). 又利用上面已有的估计式 (11.18), 就得到 [27] 中的答案:

$$I = \frac{\theta}{50\pi},\ 0 < \theta < 1. \quad \square$$

解 2 利用被积函数的分母大于 100π, 而如下分部积分后会变得更大, 就有

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\Bigg|_{100\pi}^{200\pi} - 2\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{200\pi} - 2\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对于右边的积分用积分第二中值定理估计, 就有

$$\left|I - \frac{1}{200\pi}\right| \leqslant \frac{2}{10^6\pi^3}\left|\int_{100\pi}^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{10^6\pi^3} \approx 0.129\times 10^{-6}.$$

也就是说积分 $I \approx 1/200\pi \approx 0.001\,59$. $\square$

注 用 Mathematica 计算得到 $I \approx 0.001\,591\,49$. 实际上, 如果对上面的最后一个积分再用分部积分和第二中值定理, 则可以得到更为精确的近似值.

各种不等式在估计中都可能有用. 其中 Cauchy 不等式与 Schwarz 不等式更是常用的工具. 例如, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a,b>0)$ 的周长为

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中被积函数的原函数不是初等函数, 因此不可能用 Newton-Leibniz 公式来计算 (可参看 [49] 中的 138-142 页). 下面我们分别用 Schwarz 不等式和 Cauchy 不等式来估计这个积分的上界和下界. 它们的平均值即是在某些数学手册中关于椭圆周长的近似公式之一.

例题 11.3.3 证明 $\pi(a+b) \leqslant s \leqslant \pi\sqrt{2a^2+2b^2}$.

证 首先, 不难由 Schwarz 不等式得到上界估计:

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 4\left(\int_0^{\pi/2} (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\left(\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{2a^2+2b^2}. \end{aligned}$$

然后用 Cauchy 不等式求出被积函数的下界:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\cdot\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &\geqslant a\sin t\cdot\sin t + b\cos t\cdot\cos t = a\sin^2 t + b\cos^2 t, \end{aligned}$$

对两边积分再乘 4 就得到积分的下界估计.

$$s \geqslant 4\int_0^{\pi/2} (a\sin^2 t + b\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \pi(a+b). \quad \square$$

11.3.2 积分的近似计算

在数学分析教科书中对于积分的近似计算一般是介绍三种方法, 即梯形公式、矩形公式和抛物线公式 (也称为 Simpson 公式). 这些公式以及更深入的数值积分方法都是以下面的定理为基础的.

命题 11.3.1 (Euler-Maclaurin 求和公式) 设函数 $f \in C^{(2m+2)}[a,b]$, $h = (b-a)/n$, $x_i = a+ih$, $i = 0,1,\cdots,n$, 则

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1}+f(x_i)] - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\ &\qquad\quad + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a), \qquad (11.22) \end{aligned}$$

其中 $\xi \in [a,b]$, B_{2k} $(k=1,2,\cdots,m+1)$ 是 Bernoulli 数, 其中前三个是 (见 7.2.3 小节):

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

容易看出, 上述公式的左边就是对于区间 $[a,b]$ 的 n 等距分划下的梯形公式与积分之差, 因此公式给出了梯形公式的误差表达式. 通过组合就可以得到矩形公式和抛物线公式的误差估计.

公式 (11.22) 的证明并不困难, 主要是用分部积分法. 下面给出的几个例题主要是介绍方法. 将例题中所得的结果用于等距分划的每个子区间, 并加以合并就可以得到 $m=0,1$ 时的 Euler-Maclaurin 公式. 它们提供了梯形公式和矩形公式的误差估计.

例题 11.3.4 设 $f \in C^2[0,h]$, 则存在 $\xi \in [0,h]$, 使成立

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] - \frac{1}{12}f''(\xi)h^3. \tag{11.23}$$

证 如下用两次分部积分得到

$$\begin{aligned}
\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^h f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\Big|_0^h - \int_0^h f'(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] - \frac{1}{2}\int_0^h f'(x)[x(x-h)]'\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] + \frac{1}{2}\int_0^h f''(x)[x(x-h)]\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{11.24}$$

由于 $x(x-h)$ 不变号, 对右边的积分用第一中值定理就得到所要的结果:

$$\frac{1}{2}\int_0^h f''(x)[x(x-h)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h [x(x-h)]\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}f''(\xi)h^3 \quad \square.$$

注 如果引进变上限积分 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ 0 \leqslant x \leqslant h$, 就可以看出本题与 7.4.2 小节的第一组参考题 9(3) 相同. 两者在条件和结论上的差异不是本质的, 只要应用 10.5.2 小节的第一组参考题 11 就可以解决. 此外, 这也说明在积分学中的许多问题用微分学也是可以解决的.

例题 11.3.5 设 $f \in C^4[0,h]$, 则存在 $\xi \in [0,h]$, 使成立

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] - \frac{h^2}{12}[f'(h)-f'(0)] + \frac{1}{720}f^{(4)}(\xi)h^5. \tag{11.25}$$

证 从上一例题中推导得到的等式 (11.24) 继续做下去:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] = \frac{1}{2}\int_0^h f''(x)[x(x-h)]\,\mathrm{d}x,\\
&= -\frac{h^2}{12}\int_0^h f''(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^h f''(x)\left(x^2-hx+\frac{h^2}{6}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{h^2}{12}[f'(h)-f'(0)] + \frac{1}{2}\int_0^h f''(x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{hx^2}{2}+\frac{h^2x}{6}\right)'\mathrm{d}x\\
&= -\frac{h^2}{12}[f'(h)-f'(0)] - \frac{1}{2}\int_0^h f'''(x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{hx^2}{2}+\frac{h^2x}{6}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{h^2}{12}[f'(h)-f'(0)] - \frac{1}{2}\int_0^h f'''(x)\left(\frac{x^4}{12}-\frac{hx^3}{6}+\frac{h^2x^2}{12}\right)'\mathrm{d}x\\
&= -\frac{h^2}{12}[f'(h)-f'(0)] + \frac{1}{24}\int_0^h f^{(4)}(x)(x^2(x-h)^2)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

在最后一个积分中, 利用因子 $x^2(h-x)^2$ 不变号, 再用积分第一中值定理就得到所要的等式. □

以上结果对于梯形公式和矩形公式的误差估计已经够用. 为了对抛物线公式作出误差估计则还需要 $m=2$ 时的 Euler-Maclaurin 公式, 其证明方法与上面完全一样, 读者可自己完成. 此外, 在 [14, 17] 等教科书中均对抛物线公式采用微分学方法作出误差估计. 下面只是对于抛物线方法中的基本公式作一点介绍.

例题 11.3.6 (万能公式) 若 $p(x)$ 是不超过 3 次的多项式, 则有

$$
\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}[p(a)+4p\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)+p(b)](b-a). \tag{11.26}
$$

证 令 $q(t)=f(a+t(b-a))$, 就可以将要证明的公式变为等价的

$$
\int_0^1 q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}[q(0)+4q(\frac{1}{2})+q(1)].
$$

然后利用积分为线性运算, 分别用 $q(t)=1,t,t^2,t^3$ 代入验算即可. □

注 这个公式在初等数学的体积计算中有万能公式的美名. 这时只要将一个立体的顶截面、中截面和底截面的面积分别乘以 $1:4:1$, 然后除 6 并乘以高度即可. 容易验证它对于球、圆锥和圆台等形体的体积都给出了准确的答案.

11.3.3 练习题

1. 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,\mathrm{d}x > 0$;

(2) $\displaystyle\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{20}$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{n^2\pi^2}{8}$;

(4) $\displaystyle 0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi^3}{144}$;

(5) $\displaystyle 0.005 < \int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < 0.01$;

(6) $\displaystyle \frac{2}{9}\pi^2 < \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}\pi^2$.

2. 设 f 在 $[0,a]$ $(a>0)$ 上有可积的导函数, 证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

3. 设 f 在 $[0,1]$ 上有可积的导函数, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x,\ \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

4. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)| \leqslant M$, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 对于函数 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

(1) 证明: $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{8}$;

(2) 在增加条件 $f(a)=f(b)=0$ 时证明: $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{16}$.

5. 证明: 对每个自然数 n 成立

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$, $|f'(x)| \leqslant M$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)| \leqslant M$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

8. (矩形公式) 设 $f \in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}.$$

9. 设 f 于 $[-1,1]$ 上可微, $|f'(x)| \leqslant M$, 且有 $a \in (0,1)$, 使得 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M(1-a^2).$$

10. 设 f 于 $[0,1]$ 上可微, $|f'(x)| \leqslant M$, 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

11. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且 $f' \in R[0,1]$, 对自然数 n 定义

$$A_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nA_n = \frac{1}{2}(f(0) - f(1))$.

12. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可微, 且 $f'' \in R[0,1]$, 对自然数 n 定义

$$B_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right),$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n = \frac{1}{24}[f'(1) - f'(0)]$.

§11.4 积分学在分析中的其他应用

11.4.1 利用定积分求数列极限

从第二章开始, 已经介绍过求数列极限的许多方法. 下面再介绍一种求数列极限的新方法——将求数列极限化为求定积分. 它的原理如下:

设 $f \in R[a,b]$, 则有与等距分划对应的极限等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

或

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

因此, 如果能将某个数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 写成如上面右边的积分和式那样的表达式, 则就将极限计算问题转换为定积分的计算问题了. 当然还可以有与不等距分划相对应的变型.

应当指出, 这个新方法有时很有效, 但有时也不一定比过去的方法简单. 它的优点是至少对于一类问题提供了一种统一的思路.

例题 11.4.1 计算数列 $\{a_n\}$ 的极限, 其中通项为:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

解 这里用定积分方法的计算非常简单:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + \frac{1}{1+\dfrac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right)\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2. \quad \square\end{aligned}$$

注 在过去对于本题已经有了两个解法. 这就是例题 2.5.4, 其中以 Euler 常数的命题 2.5.6 为工具, 以及 2.8.3 小节中的巧用夹逼定理的方法. 本节的解法虽然需要积分学的知识, 但思路要简明得多.

例题 11.4.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

证 1 取对数后就不难写成积分和式:

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

令 $n\to\infty$, 注意到上式右端的极限为 $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = -1$, 便得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}. \quad \square$$

注 这个题在过去已有几种解法 (见例题 2.5.3). 这里的方法从思路上是清楚的, 但是函数 $\ln x$ 在 $x=0$ 右侧邻近无界, 因此所涉及的积分是第十二章中的广义积分. 而用和式取极限计算广义积分是要另行讨论的问题 (见例题 12.1.1).

不用积分和式的方法, 也可以用积分估计如下证明.

证 2 由于对数函数单调增加, 因而成立不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k < \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x < \sum_{k=2}^{n}\ln k,$$

这就是

$$\ln(n-1)! < (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1 < \ln n!,$$

整理后得到关于 $n!$ 的双边不等式

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < n\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

开 n 次根后取极限, 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, 即可达到目的. □

在用定积分方法计算数列的极限时, 配合 Taylor 公式分离出主要部分也是需要掌握的方法:

例题 11.4.3 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right].$$

解 记表达式为 a_n. 由 Taylor 公式, 我们有

$$\sin\frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + o\left(\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right) = \frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

因此可计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \pi x(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$ □

11.4.2 Wallis 公式与 Stirling 公式

本小节将介绍与阶乘 $n!$ 有关的两个重要公式, 它们在处理有关阶乘的极限问题时非常有用.

第一个公式是数学家 Wallis 得到的 (1655 年), 因此称为 Wallis 公式 (其原文见 [4]). 它与 Viète 公式 (见 4.3.4 小节题 5) 都是关于圆周率的无穷乘积公式, 但在 Wallis 公式中只需要乘除运算, 连开方运算也不需要. Wallis 公式对于 π 的近似计算没有直接影响, 但是在导出 Stirling 公式中将起重要作用.

命题 11.4.1 (Wallis 公式)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{11.27}$$

分析 回顾 2.3.2 小节的练习题 8 和 9, 我们看到 (11.27) 左边的极限存在性是容易证明的, 困难在于求出这个极限.

从例题 10.4.9 的积分计算已知 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$ 的表达式为:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{11.28}$$

这里的差异是显著的, 圆周率 π 只出现在一个公式中!

将 I_n 作为一个数列的通项, 则从例题 10.2.4 已知 $\{I_n\}$ 是无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. 可以想像, 当 n 充分大时, I_n 与 I_{n+1} 之间的差是更高阶的无穷小量 (参见图 10.3), 从而 I_{2n+1}/I_{2n} 的极限很有可能是 1. 如果真是如此, 则就有可能得到关于 π 的某种结果. 当然这里又遇到了 0/0 型的不定式, 但是由于有表达式 (11.28), 因此不难处理.

证 在 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时有 $0 < \sin x < 1$, 因此就有 $\sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x$. 这样就成立 (积分) 不等式 $I_{2n+2} < I_{2n+1} < I_{2n}$. 利用 (11.28), 得到

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n} < I_{2n+1} < I_{2n}.$$

两边除以 I_{2n}, 并取极限 (即夹逼), 可见确实有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

再用 (11.28) 代入, 就得到所要的结果:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} = 1. \quad \square$$

注 在应用中 Wallis 公式的几个等价形式有时更为方便. 例如:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}, \tag{11.29}$$

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n}. \tag{11.30}$$

特别是从 (11.29) 可见, Wallis 公式的实质就是刻画了双阶乘 $(2n)!!$ 与 $(2n-1)!!$ 之比的渐近性态.

Stirling 公式是关于阶乘 $n!$ 的重要结果, 具有广泛的应用. 其一般形式为

$$\begin{aligned} \ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_2}{1\cdot 2n} + \frac{B_4}{3\cdot 4n^3} + \cdots \\ + \frac{B_{2m}}{(2m-1)(2m)n^{2m-1}} + \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}}, \end{aligned} \tag{11.31}$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, B_{2n} 是 Bernoulli 数 (见 7.2.3 小节).

本书只给出含有上述公式右边前三项的最简单形式的 Stirling 公式的证明, 而在参考题中指出如何可以得到更为精细的下一个公式的证明. 一般形式的 Stirling 公式 (11.31) 可以从 Euler-Maclaurin 公式 (11.22) 推出. 其他证明方法还有很多, 有兴趣的读者可以参看近年来在*美国数学月刊*上发表的许多新方法.

命题 11.4.2 (最简单形式的 Stirling 公式) 关于阶乘 $n!$ 有渐近公式:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (n \to \infty). \tag{11.32}$$

分析 关于阶乘 $n!$ 的结果很多. 就本书来说, 在前面的 1.3.2, 2.5.5, 2.7.3 各小节中都有关于 $n!$ 的不等式, 此外还有许多与极限有关的结果. 在 2.7.1 小节中还有对于 $n!$ 作为无穷大量的比较: $a^n \ll n! \ll n^n$ $(a > 1)$. 但如何确切地刻画 $n!$ 的渐近性态, 则还是不清楚. 这就是 Stirling 公式要解决的问题.

从以前的结果出发, 可以得到许多启示. 首先, 从 2.5.5 小节练习题 7 就有对每个 $n \in \mathbf{N}_+$ 成立的不等式:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < b_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n} < n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

为了研究 $\{b_n\}$ 的性态, 自然要观察它的前后项之比, 这样就有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

因此数列 $\{b_n\}$ 严格单调增加. 这里只不过利用了关于数 e 的最初讨论 (见命题 2.5.1). 再利用例 8.2.3 的结论, 可见以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ 为通项的数列严格单调减少, 且收敛于 e. 这样就得到

$$\frac{b_n\sqrt{n+1}}{b_{n+1}\sqrt{n}} = \frac{b_n}{b_{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

它就是下面证明的出发点.

证 定义数列

$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \quad n \in \mathbf{N}_+,$$

则只需证明 $\{a_n\}$ 收敛于 $\sqrt{2\pi}$. 为此写出其前后项之比

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \tag{11.33}$$

利用 $f(x)=1/x$ 下凸, 在 Hadamard 不等式 (例题 11.2.1) 中, 令 $x_1=n, x_2=n+1$ 代入, 得到不等式:

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

将上式乘以 $(n+\frac{1}{2})$ 并作整理, 得到等价的不等式:

$$0 \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right). \tag{11.34}$$

将它与 (11.33) 作比较, 就有

$$1 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}. \tag{11.35}$$

这表明正数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 因此收敛, 记其极限为 α. 同时从 (11.35) 的右边不等式又知道另一个正数列 $\{a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}\}$ 单调增加. 由于它的极限也是 α, 这样就证明了 $\alpha>0$.

利用 Wallis 公式 (11.27) 或 (11.30), 并用 $n!=a_n\cdot\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}$ 代入, 就有

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}=\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}}, \tag{11.36}$$

可见极限 $\alpha=\sqrt{2\pi}$. □

注 对于数列 $\{a_n\}$ 不仅要证明它收敛, 而且还必须证明其极限 $\alpha>0$, 否则 (11.36) 的最后一步通不过. 有不少文献忽略了这一点. 上述证明来自 [7].

11.4.3 Taylor 公式的积分型余项

在第七章 "微分学的基本定理" 中已介绍了带有 Peano 余项、 Lagrange 余项与 Cauchy 余项的 Taylor 公式. 这里将介绍带积分型余项的 Taylor 公式.

命题 11.4.3 设 $f(x)$ 在区间 (x_0-r, x_0+r) 中有 $n+1$ 阶连续导函数, 则对每个 $x\in(x_0-r,x_0+r)$ 成立

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t. \tag{11.37}$$

证　从

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

可以得到

$$R_n^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

利用逐次分部积分运算就可以有

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} R_n'(t)\,\mathrm{d}t = (t - x)R_n'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} R_n''(t)(x - t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x} R_n''(t)(x - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} R_n'''(t)(x - t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \cdots = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} R_n^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,\mathrm{d}t. \quad \square \end{aligned}$$

注　(1) 对余项 (11.37) 右边用第一中值定理, 在 x_0 与 x 之间有 ξ, 使得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x - t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

这就是 Lagrange 余项 (命题 7.2.3).

(2) 在 (11.37) 右边的积分中, 把被积函数看作 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 与 1 的乘积, 由积分第一中值定理, 存在 ξ 在 x_0 与 x 之间, 使

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - x_0). \end{aligned}$$

将 ξ 改写成 $\xi = x_0 + \eta(x - x_0)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, 则上式成为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0 + \eta(x - x_0))(1 - \eta)^n(x - x_0)^{n+1}.$$

这就是 Cauchy 余项 (命题 7.2.4).

(3) Lagrange 余项与 Cauchy 余项分别含有不完全确定的中值 ξ 与 η, 而积分型余项中则不含中值, 这无疑是一个优点. 由于这个原因, 带积分型余项的 Taylor 公式常被用于比较精确的表达式中.

11.4.4 π 的无理性证明

作为定积分的又一方面的应用，我们证明 π 是无理数. 下面的证法是由 I. Niven 提出的 (见 [4]). 这方面较新的材料见美国数学月刊, 108 卷 (2001), 222–231 页 (数学译林 2001 第 3 期).

命题 11.4.4 π 是无理数.

证 用反证法. 假定 π 是有理数, 则可设 $\pi = \dfrac{a}{b}$, 其中 a, b 为正整数. 定义辅助函数

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{b^n x^n(\pi - x)^n}{n!}.$$

这是一个多项式, 其中各项的次数从 n 到 $2n$. 可以证明: 对每一项求任意阶导数后, 再令 $x=0$ 代入, 只能得到 0 或者整数. 实际上这里只有三种情况: (1) 该项求导后仍含有因子 x, (2) 该项求导后已经是常数 0, (3) 该项求导后为非零常数. 只需要讨论情况 (3). 假设求导之前该项为 cx^k, 则情况 (3) 只能是对该项求 k 阶导数的结果, 这时得到的值是 $k!c$. 由于 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 而 $k \geqslant n$, 因此 $k!c$ 一定是整数.

这就证明了对任意自然数 i, $f^{(i)}(0)$ 都是整数.

又由 $f(x)$ 的表达式可知 $f(x) = f(\pi - x)$, 因此对任意自然数 i, $f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$ 也是整数.

然后我们要证明定积分

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \tag{11.38}$$

的值也是整数. 对这个积分用分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= f(x)(-\cos x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= f(0) + f(\pi) + f'(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 f 为 $2n$ 次多项式, 重复以上过程, 最后的结果是

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(0)+f(\pi)-f''(0)-f''(\pi)+\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(0)+(-1)^n f^{(2n)}(\pi).$$

根据前面的分析, 可见左边的积分值是整数.

另一方面, 在区间 $[0,\pi]$上, $0 \leqslant a - bx = b(\pi - x) \leqslant a$, 因此对 $f(x)$ 有估计式

$$0 \leqslant f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \leqslant \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

这样就得到对于积分 (11.38) 的估计:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}.$$

由于当 $n \to \infty$ 时 $n!$ 是较 $\pi^n a^n$ 更为高阶的无穷大量, 因此只要取 n 充分大, 上式右边就小于 1. 这与积分 (11.38) 为整数不相容. 因此 π 不能是有理数, 而只能是无理数. □

一个复数, 如果它是某个整系数代数方程的根, 则称之为代数数, 否则, 就称之为超越数. 命题 2.5.5 已经证明数 e 是无理数. 在它的注解中还提到 e 还是超越数. π 的情况也是如此. Lindemann 于 1882 年证明了 π 是超越数, 从而最后解决了用圆规和直尺不可能化圆为方这个古希腊三大几何难题中的最后一个问题. 关于 e 和 π 的超越数证明可看 [52, 54, 4] 等.

11.4.5 练习题

1. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right)$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(1^a + 3^a + \cdots + (2n+1)^a)^{b+1}}{(2^b + 4^b + \cdots + (2n)^b)^{a+1}}$, 其中 $a, b \neq -1$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(2 + \cos\frac{k\pi}{n}\right)^{\pi/n}$;

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$;

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k-1)} \quad (x > 0)$.

(最后一题若用第十章参考题 3 就很方便.)

2. 证明对于区间 $(\frac{2}{3}, 1)$ 中的数 A, 存在 N 使 $n > N$ 时, 成立

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < A n^{\frac{3}{2}},$$

并与 11.3.3 的题 5 在方法和结果上进行比较.

3. 设 $f(x) \in C[0,1]$, $f(x)$ 处处大于 0, 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right) f(1)},$$

由此导出算术平均值-几何平均值不等式的积分形式，并与 11.2.1 小节的不等式 (11.10) 作比较.

4. 设 $A_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2 - A_n)$.

5. 设 $B_n = \dfrac{2}{2n+1} + \dfrac{2}{2n+3} + \cdots + \dfrac{2}{4n-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - B_n)$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

7. 试从 Stirling 公式 (命题 11.4.2) 的证明中推导出:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{4n}},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$.

(在第二组参考题 15 中有更好的结果，但需要比 (11.34) 更强的不等式.)

8. 试写出 $(2n)!!$, $(2n-1)!!$ 和 C_{2n}^{n} 的渐近公式.

9. 利用 Stirling 公式计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{n!}{n^n\sqrt{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dbinom{-1/2}{n}\sqrt{n}$.

10. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^{1+\gamma}}$，其中 γ 是 Euler 常数.

§11.5 关于教学的建议

11.5.1 学习要点

1. 在第一节中所说的“微元法”虽然不是一种严格的数学方法，但是在学习多元微积分以前，对于一些利用定积分进行计算的几何与物理问题，我们还经常要利用它来进行. 在教学上，对这种方法不作严格论证，只要使学生在一些具体计算问题中能够使用就行了.

2. 本章分各个专题介绍积分学的应用，与上一章一起组成积分学的比较完整的内容. 本章的取材是围绕积分学中的基本内容来选取的，其中考虑到了本科和考研两方面的需要. 由于篇幅所限，没有能够收入积分学在物理学等方面的应用，在数值积分方面也未作全面介绍. 所收入的习题中比较困难的列入第二组参考题.

3. **对习题课的建议** 本章除了积分学在几何上的应用之外, 对于本科学习来说, 至少需要学习利用定积分计算某些数列的极限 (第 11.4.1 小节) 和 Stirling 公式 (11.32). 这些内容对于前面的数列极限内容也是重要的补充和发展. 至于其他内容, 则机动余地较大, 教师可以根据教材和学生情况来决定取舍.

11.5.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2. 设 $a>0$, 证明:

$$\int_0^{\pi} x a^{\sin x}\,\mathrm{d}x \int_0^{\pi/2} a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^3}{4}.$$

3. (Tschebyscheff 不等式) (1) 设 $F \in C[a,b]$, 处处大于 0, 且单调减少, 证明:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b xF^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) 设 f,g 在区间 $[a,b]$ 上对于任何 $x<y$ 具有性质 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geqslant 0$, 又设 $p \in R[a,b]$, 且处处大于 0, 证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0 \leqslant f(x) < 1$, 证明:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{1-\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

5. 证明不等式:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

6. 设 $f^{(2n)}(x)\in C[a,b]$, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n-1$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max\{|f^{(2n)}(x)|\mid x\in[a,b]\}.$$

7. 设函数 $f,g\in C[a,b]$, 且 $f(x)\not\equiv 0$, $g(x)$ 处处大于 0. 记

$$d_n=\int_a^b|f(x)|^n g(x)\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots$$

证明: 数列 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限.

8. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\pi/n}{n+1}+\dfrac{\sin 2\pi/n}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

9. 对任意实数 a, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n+1}\cos\left(\dfrac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=\mathrm{e}^{-\frac{a^4}{2}}$.

10. 设 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负单调减少函数, 令

$$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbf{N}_+,$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(这是 "面积原理" 的一种简单情况 (参见 [26]). 取 $f(x)=1/x$, 就得到关于 Euler 常数的命题 2.5.6; 取 $f(x)=1/\sqrt{x}$, 就是第二章第一组参考题 14.)

11. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\sin x^2\,\mathrm{d}x$, 使得误差不超过 0.001.

12. 证明: 函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $(0,1]$ 上有无穷多个零点.

13. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, f' 单调增加且有 $f'(x)\geqslant m>0$, 证明:

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且满足 $f'(x)\geqslant m>0$, $|f(x)|\leqslant\pi$, 证明:

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

15. 对 $n\in\mathbf{N}_+$, 定义

$$S_n=1+\frac{n-1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}+\cdots+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2n},$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\pi}{2}$.

第二组参考题

1. 曲线 K 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $\rho\in C[0,\pi]$, 且已知 K 上任何两点之间的距离不超过 1, 证明: 由曲线 K 与射线 $\theta=0$, $\theta=\pi$ 围成的扇形面积
$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

2. 设 $f\in C[a,b]$, 且处处大于 0. 记 $f_{kn}=f(a+kh_n)$, $h_n=(b-a)/n$, $k=1,2,\cdots,n$. 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\exp\{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x\},$$
并用于证明 (Poisson 积分):
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x=2\ln r,$$
其中 $r>1$.

3. 设 $f\in C[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1x^2f(x)\,\mathrm{d}x=1$,

   (1) 证明 $\displaystyle\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)|\geqslant3$.

   (2) 又知 $\displaystyle\int_0^1xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明 $\displaystyle\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)|\geqslant10.2$.

4. 设 $f\in C[0,1]$, 如果对某个自然数 $n>1$, 成立
$$\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1xf(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=\int_0^1x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x=1,$$
求证 $M=\displaystyle\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)|\geqslant2^n(n+1)$.

5. 求出使不等式
$$c_1\leqslant\int_a^b\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant c_2$$
成立的最佳常数 c_1,c_2, 对其中的积分限分两种情况讨论: (1) $0\leqslant a<b$, (2) $a<b$.

6. 在命题 11.2.3 (即 Young 不等式) 中的可微条件可以去掉, 此外还可以得到另一个方向的不等式: 设 $f\in C[a,b]$, 严格单调增加, 且 $f(0)=0$, 记其反函数为 $g(y)$, 证明下列不等式并解释其几何意义:
$$ab\leqslant\int_0^af(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^bg(y)\,\mathrm{d}y\leqslant bg(b)+af(a)-f(a)g(b),$$
其中成立等号的充分必要条件是 $b=f(a)$ (即 $a=g(b)$).

7. 设 $f \in C(a,b)$, 证明:

(1) 若对任何 $a < x_1 < x_2 < b$ 成立不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 f 为下凸函数;

(2) 若对任何 $a < x_1 < x_2 < b$ 成立不等式

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则 f 为下凸函数;

(3) 若以上两个不等式中的任何一个始终成立等号, 则 f 只能是线性函数.

(因此 Hadamard 不等式中的每个不等式都是 f 下凸的充分必要条件.)

8. 设 $f \in C^1[0,a]$, $f(0)=0$,

(1) 证明:

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

且其中成立等号当且仅当 $f(x)=cx$;

(2) (Opial 不等式) 增加条件 $f(a)=0$, f 在 $(0,a)$ 上大于 0, 证明:

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{4}\int_0^a |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

9. (Bellman-Gronwall 不等式) 设当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x), g(x)$ 为非负连续函数, 且有

$$f(x) \leqslant A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $A>0$, 证明: 当 $x \geqslant 0$ 时

$$f(x) \leqslant A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

10. 设 $f \in C^2[a,b]$, $f(0)=f(1)=0$, f 在 $(0,1)$ 中无零点, 证明:

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > 4,$$

且其中 4 是最佳下界.

11. 设 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

(这是 Cauchy-Schwarz 不等式的反向不等式, 也称为 Kantorovich 不等式.)

12. 设非常值函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13. 设 $f \in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=f'(0)=0$, $f'(1)=1$, 证明:

$$\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4,$$

且其中成立等式当且仅当 $f(x)=x^3-x^2$.

14. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上处处大于 0, 且对于 $L>0$ 满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant L|x_1-x_2|$, 又已知对于 $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ 有

$$\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \alpha, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \beta,$$

证明下列积分不等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. 先用微分学或其他方法证明: 当 $0<x<1$ 时成立不等式

$$0 < \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x < \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

然后用 $x = 1/(2n+1)$ 代入, 得到比 (11.34) 更强的不等式. 然后证明比 (11.32) 更为精细的 Stirling 公式, 也就是一般公式 (11.31) 中 $m=0$ 的情况:

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta_n}{12n},$$

或者其等价形式,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}},$$

其中 $0<\theta_n<1$.

第十二章　广义积分

广义积分作为变限积分函数的极限，其许多性质与定积分类似. 本章共分 5 节. §12.1 节讨论广义积分的定义. §12.2 与 §12.3 节分别讨论广义积分的敛散性判别与计算. §12.4 节讨论了无穷限广义积分的一些性质. 最后一节为学习要点和两组参考题.

广义积分与数项级数之间有密切联系. 在各种数学分析教材中两者的教学顺序并不相同. 虽然本书在第二章中已经提到了无穷级数的概念 (见 2.2.3 小节末的注解以及例题 2.2.6, 2.2.9, 命题 2.5.2 等), 但是要到下册中才有关于无穷级数的全面论述. 因此这方面的联系也要到后面介绍.

§12.1　广义积分的定义

12.1.1　基本定义

1. 在定积分一章中给出函数 f 为 Riemann 可积的定义时, 有两个基本限制: (1) 积分区间 $[a,b]$ 必须有限, (2) 函数 f 在 $[a,b]$ 上必须有界. 前者是在积分的分划定义中隐含的必要条件, 后者则可以作为可积的必要条件而得到 (见例题 10.2.1). 广义积分就是在这两个方面对于定积分定义的突破. 今后也称原有的 Riemann 积分为**常义积分**.
2. 为方便起见, 引入如下定义: 设 I 为区间, 函数 f 在 I 上有定义, 如果对任意有界闭区间 $[a,b]\subseteq I$, $f\in R[a,b]$, 则称 f 在 I 上**内闭可积**.
3. 广义积分的定义方法是通过对常义积分取极限. 称 b 为函数 $f(x)$ 在定义域区间 $[a,b)$ 上的**奇点**, 如果 $b=+\infty$ 或者 $f(x)$ 在点 b 左侧邻近无界. 假如 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上内闭可积, b 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的奇点, 则定义广义积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
如果上式右边极限存在且有限 (在 $b=+\infty$ 时, $b\to b^-$ 是指 $b\to+\infty$), 则称广义积分 $\int_a^b f$ 收敛或 f 广义可积 (在不产生混淆时也可简称可积); 否则, 称广义积分 $\int_a^b f$ 发散或 f 广义不可积 (简称不可积). 类似地定义以 a 为奇点的广义积分 $\int_a^b f$ 及其敛散性.
4. 称广义积分 $\int_a^b f$ 绝对收敛或 f (广义) 绝对可积, 若广义积分 $\int_a^b |f|$ 收敛.

5. 设 b 为 f 在 $[a,b)$ 上的奇点. 如果 $b=+\infty$, 则称广义积分 $\int_0^{+\infty} f$ 为**无穷型广义积分** (简称**无穷限积分**或**无限积分**). 如果 b 为有限数, 则称广义积分 $\int_a^b f$ 为**无界型广义积分** (简称**无界积分**或**瑕积分**), 并称 b 为**瑕点**. 这两类广义积分不但往往可以用换元法互换, 而且它们的定义与很多性质也可以统一叙述.

6. 设 $a<c<b$, 如果 c 为 f 在 $[a,c)$ 与 $(c,b]$ 上的奇点或 a,b 分别为 f 在 $(a,c]$ 与 $[c,b)$ 上的奇点, 则定义广义积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
当右边两个广义积分都收敛时, 称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; 否则, 称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

注 1 上述无穷限积分与无界积分的统一叙述可以简化广义积分的许多结果的表达. 但两类广义积分毕竟还有区别 (例如见 12.4), 学习本章时要注意两类广义积分的异同.

注 2 对不定积分、定积分和广义积分, 可积的含义是不同的. 不定积分的可积是指其为初等函数族, 定积分的可积是指其 Riemann 可积, 即 Riemann 积分存在, 而广义积分可积是指广义积分收敛. 这似乎容易引起混淆, 但在根据上下文不会引起混淆的情况下, 使用可积这个术语可以简化叙述.

除了以上基本概念之外, 还需要知道广义积分的主值. 以下对两种广义积分分别给出它们的主值定义.

设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, 定义
$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$
为广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ 的 Cauchy **主值**, 如果右边极限存在的话.

对于无界积分, 设 f 在区间 $[a,b]$ 中只有一个瑕点 c, $a<c<b$, 则定义
$$P.V.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\left(\int_a^{c-\delta}+\int_{c+\delta}^{b}\right) f(x)\,\mathrm{d}x$$
为广义积分 $\int_a^b f$ 的 Cauchy 主值, 如果右边极限存在的话.

容易看出, 若广义积分收敛, 则其主值与广义积分的值相同; 但是当广义积分发散时, 它的主值仍可能存在. 因此主值是广义积分概念的一个推广, 它在理论和应用上都很有价值. 对于本章内容来说, 如果事先能判定某个广义积分收敛, 则在计算该广义积分时可以用主值来代替, 这有时会带来方便.

12.1.2 广义积分与和式极限

虽然广义积分是通过对常义积分取极限得到, 但在被积函数单调情况下也有可能如常义积分那样直接从积分和式取极限得到. 首先我们讨论有限区间上的无界广义积分. 下面就是这类结果之一.

例题 12.1.1 设 f 在 $(0,1)$ 上单调, 无界广义积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12.1}$$

证 不妨只讨论 f 单调增加, 则有不等式

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这里两边的积分中至少有一个是广义积分. 然后令 $n\to\infty$ 即可. □

注 这里有几点需要注意. 首先, 单调性条件只要在奇点邻近满足即可. 其次, 在只有一个奇点的情况, 从等式 (12.1) 左边极限存在可推出右边的广义积分收敛. 然而对于有两个奇点的情况这是不成立的. 例如

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$$

就是如此 (见 [47] 第一卷 253 页).

对于无穷限广义积分也有类似结果. 但是这时的积分和式本身已经是无穷项求和, 也就是无穷级数. 在学习无穷级数理论之前, 可以先按照 2.2.3 小节末的注解来理解.

例题 12.1.2 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则有

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 不妨假定 f 单调减少. 首先可以证明 f 在 $[0,+\infty)$ 上非负. 用反证法. 如果在某点 x_0 处有 $f(x_0)<0$, 则就有

$$\int_{x_0}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_0)(A-x_0)\to-\infty \quad (A\to+\infty),$$

这与无穷限广义积分收敛的条件矛盾.

于是, 对任意自然数 n, 我们有

$$\int_h^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} hf(kh) = h\sum_{k=1}^{n} f(kh) \leqslant \int_0^{nh} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到中间的和式作为 n 的函数 (即数列) 为单调增加, 且有上界, 因此存在极限. 令 $n \to +\infty$, 得到

$$\int_h^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

再令 $h \to 0^+$ 即得所要求证的结果. □

12.1.3 练习题

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续, 且积分 $\int_0^{+\infty} f = 0$, 证明: $f \equiv 0$.
2. 如果广义积分 $\int_a^b f^2$ 收敛, 则称 f 在 $[a,b]$ 上平方可积. 分无穷限积分与无界积分两种情况讨论广义积分的平方可积性与绝对可积性之间的关系.
3. 设 $f \in C(0,1]$, $f(0^+) = +\infty$, 定义函数 $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $0 < x \leqslant 1$, $n \in \mathbf{N}_+$. 证明: 广义积分 $\int_0^1 f$ 收敛的充分必要条件是存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ 收敛, 证明: 对于任何实数 a, 下列广义积分也收敛:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$ 都存在且有限. 证明: 对任意实数 $a > 0$, 广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

收敛, 并求它的值.

6. 找出以下广义积分计算中的错误, 说明理由, 并计算其主值. 在积分

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

中, 由于被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 从而所求积分为 0.

§12.2 广义积分的敛散性判别法

本节在第一小节中从一个例题开始, 讨论敛散性判别法. 对 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的必要性给出证明和改进. 在后两个小节中给出例题和练习题.

12.2.1 敛散性判别法

下面先看一个简单例题. 在其中我们将从基本定义出发进行讨论, 而不直接应用某个判别法, 其目的是说明这里所遇到的问题的一般特征.

例题 12.2.1 设 f 在 $[a,+\infty)$ $(a>1)$ 上内闭可积, 且已知广义积分

$$\int_a^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 证明: 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

证 如果 f 非负, 则可以写出不等式

$$0 \leqslant \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中两个积分作为变上限 A 的函数都是单调增加函数. 由于右边在 $A\to+\infty$ 时存在极限, 中间的积分作为 $A\in[a,+\infty)$ 的函数就是有上界的单调增加函数, 因此当 $A\to+\infty$ 时也有极限. 这就证明了 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分收敛. 对于 f 非正情况的讨论是类似的. 这就是比较判别法.

但是当 f 为变号函数时,上面的比较方法不能直接使用①. 这时需要两个新的工具: (1) 广义积分的 Cauchy 收敛准则, (2) 积分第二中值定理.

任取 $a<A<A'$, 对于积分

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_A^{A'} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|,$$

利用右边积分号下第二个因子 $1/x$ 单调且非负, 就有 $\xi\in(A,A')$, 使得成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi} xf(x)\,\mathrm{d}x\right|,$$

然后利用条件就可以使得左边的积分当 A, A' 充分大时小于事先给定的 $\varepsilon>0$, 因此 f 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积. □

① 如果 f 绝对可积, 则比较方法还可以用.

注 1 注意在证明过程中两次应用 Cauchy 收敛准则，一次是用收敛的必要条件，另一次是用收敛的充分条件. 实际上从广义积分开始，在后面的无穷级数和含参积分各章中各种形式的 Cauchy 收敛准则都要起非常重要的作用. 其中的基本理由和上面这个简单例题是相同的. 初学者可以复习一下 §3.4 节中对于 Cauchy 收敛准则的基本内容.

注 2 上面的证明实际上重复了 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法的推导过程. 当然可以直接应用这两个判别法之一来达到目的.

这里需要指出，Abel 判别法和 Dirichlet 判别法中的条件不仅是广义积分收敛的充分条件，同时也是必要条件. 当然，Abel 判别法的必要性是平凡的. 但是 Dirichlet 判别法的必要性则是较新的发现，多数教科书中都没有收入. 下面我们给出它的证明 (参见 [65]).

命题 12.2.1 (Dirichlet 判别法) 设 f 在 $[a,b)$ 上内闭可积，b 为奇点，广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是存在分解 $f=uv$，使得

(1) 函数 u 在 $[a,b)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)=0$；

(2) 对任何 $b'>a$，积分 $\displaystyle\int_a^{b'} v(x)\,\mathrm{d}x$ 存在且有界.

证 充分性见一般教科书. 下面只对 $b=+\infty$ 情况的必要性给出证明，对于其他情况的证明是类似的.

从广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，根据 Cauchy 收敛准则，存在 $A_1>a$，使得对于任何 $B>A\geqslant A_1$，成立 $\left|\displaystyle\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|<1$.

归纳地可知，对于 $n\geqslant 2$，存在 $A_n\geqslant A_{n-1}+1$，使得对于任何 $B>A\geqslant A_n$，成立 $\left|\displaystyle\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\dfrac{1}{n^3}$. 这样得到的 $\{A_n\}$ 是严格单调增加的无穷大数列.

现在定义

$$u(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant A_1,\\ \dfrac{1}{n}, & A_n<x\leqslant A_{n+1},\ n\in\mathbf{N}_+;\end{cases}\tag{12.2}$$

和

$$v(x)=\frac{f(x)}{u(x)},\ a\leqslant x<+\infty.\tag{12.3}$$

这样就有分解 $f=uv$, 其中函数 u 满足条件 (1) 是明显的, 下面只需验证函数 v 满足条件 (2). 容易看出 v 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 因此只需要证明它在任何区间 $[a,A]$ 上的积分有界.

由于当 $a\leqslant A\leqslant A_1$ 时 $v(x)=f(x)$, 因此存在常数 $L>0$, 使得对这样的 A 成立

$$\left|\int_a^A v(x)\,\mathrm{d}x\right|<L.$$

若 $A>A_1$, 则存在 n, 使得 $A_n<A\leqslant A_{n+1}$. 这时根据定义 (12.3) 和 (12.2), 可以先作分解:

$$\int_a^A v(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int_a^{A_1}+\int_{A_1}^{A_2}+2\int_{A_2}^{A_3}+\cdots+(n-1)\int_{A_{n-1}}^{A_n}+n\int_{A_n}^{A}\right)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

然后就不难作出所需要的估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^A v(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_a^{A_1}f\right|+\left|\int_{A_1}^{A_2}f\right|+2\left|\int_{A_2}^{A_3}f\right|+\cdots+(n-1)\left|\int_{A_{n-1}}^{A_n}f\right|+n\left|\int_{A_n}^{A}f\right|\\&\leqslant L+1+2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{(n-1)^3}+n\cdot\frac{1}{n^3}\\&=L+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<L+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<L+2.\quad\square\end{aligned}$$

下面我们再观察 Abel 判别法.

命题 12.2.2 (Abel 判别法) 设 f 在 $[a,b)$ 上内闭可积, b 为奇点, 广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是存在分解 $f=uv$, 使得

(1) 函数 u 在 $[a,b)$ 上单调有界,

(2) 积分 $\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

众所周知, Abel 判别法的充分性可以从 Dirichlet 判别法导出, 同时其必要性是平凡的, 因为可以令 $u\equiv 1$, $v\equiv f$. 但是应用 Dirichlet 判别法的必要性可以证明, 在 Abel 判别法中的必要性可以加强为: $u(x)$ 不仅单调, 而且 $u(b^+)=0$ (见 [65]).

证明是简单的. 设 $f=uv$ 是满足 Dirichlet 判别法条件的分解. 不妨设其中 u 非负. 然后令

$$u_1=\sqrt{u},\ v_1=\sqrt{u}v,$$

就不难看出 $f=u_1v_1$ 是满足 Abel 判别法条件的分解, 而且 $u_1(b^+)=0$.

12.2.2 例题

例题 12.2.2 讨论下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^1|\ln x|^p\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x^2)}$ $(p>0)$.

解 容易验证, 4 道题的被积函数都在奇点附近不变号, 因此都可用比较判别法和 Cauchy 判别法来解, 并且它们的收敛性就是绝对收敛性.

(1) 这是一个无穷限积分. 由通分可得

$$\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}=\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}.$$

当 $p=1$ 时, 由

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)}=1$$

及 Cauchy 判别法, 知原广义积分收敛.

当 $p\neq 1$ 时, 由

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}=1-p\neq 0$$

及 Cauchy 判别法, 知原广义积分发散. □

(2) 当 $p=0$ 时这是常义积分, 而当 $p\neq 0$ 时这是瑕积分.

当 $p>0$ 时, 瑕点是 $x=0$. 这时, 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}|\ln x|^p=0$, 知 $\int_0^1|\ln x|^p\,\mathrm{d}x$ 总是收敛的.

当 $p<0$ 时, 虽然被积函数在 $x=0$ 处无定义, 但由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}|\ln x|^p=0$, 可见 $x=0$ 并不是瑕点. 这里要注意: 定积分的可积性和积分值与被积函数在有限个点处的值无关, 因此可以采取补充定义的方法来讨论, 而且可积性和积分值与补充定义的具体方法无关.

由 $\lim\limits_{x\to 1^-}|\ln x|^p=+\infty$ 知这时 $x=1$ 是瑕点. 由

$$|\ln x|^p=|\ln(1-(1-x))|^p\sim(1-x)^p=\frac{1}{(1-x)^{-p}}\quad(x\to 1^-)$$

可知, 原积分在 $-1<p<0$ 时收敛, 而在 $p\leqslant -1$ 时发散. □

(3) 此广义积分的瑕点为 $x=0,1$. 我们可以分别讨论被积函数在区间 $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$, $[1,\frac{3}{2}]$ 和 $[\frac{3}{2},+\infty)$ 上的积分, 并将在这四个区间上的积分分别记为 I_i, $i=1,2,3,4$. 这时每个积分只有一个奇点, 而且奇点是积分区间的端点.

记被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$.

对 I_1, 由 $f(x)\sim x^{-\frac{2}{3}}\ (x\to 0^+)$, 可知 I_1 收敛.

对 I_2 和 I_3, 由 $f(x)\sim (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ (x\to 1)$, 可知 I_2,I_3 均收敛.

最后, 由 $f(x)\sim x^{-\frac{4}{3}}\ (x\to +\infty)$, 可知 I_4 收敛.

因为 I_1,I_2,I_3,I_4 都收敛, 所以原广义积分收敛.

(4) 这是一个无穷限积分, 同时 $x=0$ 又是瑕点. 下面我们分别讨论被积函数在区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的积分, 并将这两个积分记为 I_1 和 I_2.

对 I_1, 由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^p\cdot\frac{1}{x^p(1+x^2)}=1,$$

因此 $p<1$ 时 I_1 收敛, 而 $p\geqslant 1$ 时 I_1 发散.

对 I_2, 由于

$$\lim_{x\to +\infty} x^{p+2}\frac{1}{x^p(1+x^2)}=1,$$

而由 $p>0$ 知 $p+2>1$, 因此 I_2 收敛.

合并以上讨论, 知原广义积分在 $p\geqslant 1$ 时发散, 在 $0<p<1$ 时收敛. □

注 在题 (1) 中两个广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+p}\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{p}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 都是发散的, 但不能因此得出

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

是发散的结论.

解题 (2) 时, 由于无论 p 取何值, $|\ln x|^p$ 在 $x=0$ 处总是无定义的, 因此初学者容易在 $p<0$时, 仍然将 $x=0$ 当作瑕点. 教学时应该向同学强调, 判别积分区间的一个端点 (或内点) 是不是奇点的根据不是被积函数是否在该点有定义, 而是被积函数是否在该点邻近无界. 例如, 对于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}x\ln x\,\mathrm{d}x$$

等广义积分, $x=0$ 都不是奇点.

解题 (3) 时, 初学者容易犯的错误是忽略位于积分区间内部的瑕点 $x=1$.

此外要注意, 在没有判定收敛性之前, 没有根据写出积分分解的等式. 例如对于题 (3), 等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1+\int_1^{3/2}+\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$$

只有在判定右边每个积分收敛之后才成立, 而不是在此前.

例题 12.2.3 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性, 对于收敛的情况还要判别是条件收敛还是绝对收敛.

解 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 由 $0\leqslant \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^p}\leqslant 1$ 知 $x=0$ 不是瑕点.

因为 $\left|\int_0^A \sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$ 对每个有限的 A 成立, $\frac{1}{x^p}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$, 由 Dirichlet 判别法知道原广义积分收敛.

下面讨论其绝对收敛性. 如果 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 也收敛. 但从

$$\frac{|\sin x|}{x^p}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p}-\frac{\cos 2x}{x^p}\right),$$

而且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 可见 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 也发散. 因此原广义积分在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p>1$ 时, $x=0$ 是瑕点. 分解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

对 I_2, 由 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}$ 及 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛, 知 I_2 绝对收敛.

对 I_1, 由 $\frac{\sin x}{x^p}\sim x^{1-p}\ (x\to 0^+)$ 知 I_1 在 $1-p>-1$, 即 $1<p<2$ 时绝对收敛, 在 $1-p\leqslant -1$, 即 $p\geqslant 2$ 时发散.

因此, 原广义积分在 $1<p<2$ 时绝对收敛, 在 $p\geqslant 2$ 时发散. □

在判别广义积分的敛散性时, 我们往往要进行不等式的放大与缩小, 有时还要进行恒等式的变换.

例题 12.2.4 设 $p>0$, 证明广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

在 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散, 在 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛, 在 $p>1$ 时绝对收敛.

分析 由被积函数的形式, 容易联想起利用广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$. 检验两个被积函数之差

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}-\frac{\sin x}{x^p}=-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},\tag{12.4}$$

可以发现上式右边的分母上比被积函数的分母多了一个因子 x^p, 其广义积分的敛散性要好处理一些.

证 由于被积函数 $\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}$ 在 $x=0$ 右侧有界, $x=0$ 不是瑕点. 因此, 我们只要讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x. \tag{12.5}$$

由 (12.4) 得到

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}.$$

由上一个例题知, 右边第一项的广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛, 而在 $p>1$ 时绝对收敛. 下面考虑广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x. \tag{12.6}$$

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 由

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}$$

与

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\,\mathrm{d}x$$

发散, 知道广义积分 (12.5) 发散. 而当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, 由

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\leqslant\frac{1}{x^p(x^p-1)}\sim\frac{1}{x^{2p}}\ (x\to+\infty)$$

与

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 知道广义积分 (12.6) 绝对收敛.

因此, 广义积分 (12.5) 当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 为收敛的广义积分与发散的广义积分之差, 从而发散; 当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时, 为条件收敛的广义积分与绝对收敛的广义积分之差, 从而条件收敛; 当 $p>1$ 时, 为两个绝对收敛的广义积分之差, 从而绝对收敛. □

注 1 本例虽然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p+\sin x}=0$, 且 $\left|\displaystyle\int_a^A\sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$ 对每个 $A>a$ 成立, 但在 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 所论广义积分仍发散. 这说明在 Dirichlet 判别法中, 单调性的条件是不能缺少的.

注 2 本例最后利用了两个推理: (1) 如果一个广义积分能表示为条件收敛的广义积分与绝对收敛的广义积分之差, 则必然条件收敛; (2) 如果一个广义积分能表示为两个绝对收敛的广义积分之和或差, 则必然绝对收敛.

现在考虑一个很不一般的广义积分. 图 12.1 是其中的被积函数的图像, 它具有非常奇特的性质, 可以说明一些重要的问题.

例题 12.2.5 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的敛散性.

解 由于被积函数在 $x>0$ 时大于 0, 因此只需要研究变上限积分

$$F(A)=\int_0^A \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

在 $[0,\infty)$ 上的有界性. 若有界则收敛, 否则即发散. 又因 F 单调增加, 因此只要观察 F 在一列趋于无穷大的点上的函数值序列是否有界即可.

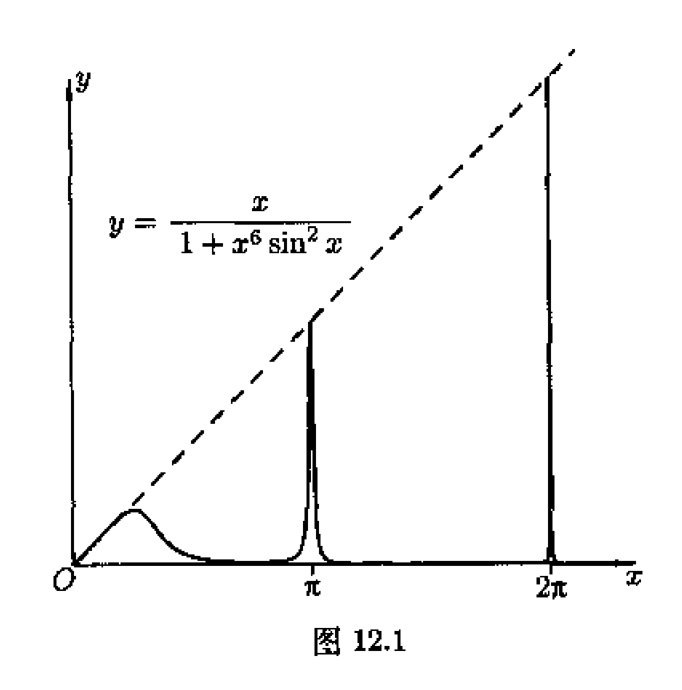


图 12.1

取 $A=n\pi$, $n\in\mathbf{N}_+$, 则可分解积分为

$$\int_0^{n\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n} u_k, \text{ 其中 } u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}.$$

对于 u_k 可估计如下 ($k\geqslant 2$), 其中对于区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的 $\sin x$ 用了 Jordan 不等式 (例题 8.5.6):

$$\begin{aligned}
u_k &\leqslant k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=k\pi\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\\
&=2k\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\leqslant 2k\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4x^2}\\
&=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\sim \frac{1}{2k^2} \quad (k\to\infty).
\end{aligned}$$

由于

$$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<2$$

与 n 无关, 可见 $\{F(n\pi)\}$ 有界, 从而函数 $F(A)$ 在 $0 \leqslant A < +\infty$ 上有界, 因此本题的广义积分收敛. □

注 如图 12.1 所示, 这个收敛积分的被积函数满足等式 $f(k\pi) = k\pi$. 这表明函数图像与第一象限的角平分线 $y = x$ 有无穷多个交点. 交点的坐标是: $(k\pi, k\pi)$, k 取所有非负整数. 但是当 $x \neq k\pi$ 时函数值 $f(x)$ 就急剧下降, 当 $x > \pi$ 时的函数图像在图 12.1 上已经与 x 轴很难区分开. 由这个例子可见, 无穷限的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, 其被积函数的极限 $f(+\infty)$ 不仅可以不存在, 而且可以有 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = +\infty$ (其中的上极限是 §3.6 节中概念在连续情况的推广).

12.2.3 练习题

1. 讨论下列广义积分的敛散性, 若是收敛, 还要讨论是条件收敛还是绝对收敛:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin^4 x\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

2. 对于以下含有参数的广义积分, 确定出使积分绝对收敛、条件收敛和发散的参数范围:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p > 0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}|\ln x|^p\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p \geqslant 0)$; (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-\mathrm{e})^p(\ln\ln x)^q}$.

3. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为互不相同的实数, $p_1, \cdots, p_n > 0$, 讨论广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$$

的敛散性.

4. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

5. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 的敛散性.

6. 求 $F(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^a\mathrm{d}t$ 的定义域.

7. 设 $f'\in C[0,1]$ 且 $f'(x)$ 处处大于 0, 证明: 广义积分

$$\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $p<2$ 时收敛, $p>2$ 时发散.

8. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛, 证明:

(1) 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}(|f|\pm f)$ 发散; (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x(|f|+f)}{\int_a^x(|f|-f)}=1.$

9. 设 $f\in C^1[a,+\infty)$ 单调, 且 $f(+\infty)=0$, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 收敛.

10. 设 $f,g\in C^1[a,+\infty)$, $f'(x)$ 非负, $f(+\infty)=0$, 且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

§12.3 广义积分的计算

广义积分是定积分与函数极限的结合, 因此定积分计算的公式与技巧几乎都能应用于广义积分. 这方面的例题放在下面第一小节中. 第二小节则专门介绍几个特殊广义积分的计算, 它们都有重要的应用, 也都需要用特殊的技巧来计算.

与常义积分的计算不同之处是, 在计算一个广义积分之前应当先观察它是否收敛, 如果该广义积分是发散的, 就不必做无用功了. (在某些问题中这时还需要考虑其主值是否存在和怎样计算的问题.)

12.3.1 例题

例题 12.3.1 计算广义积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 这时的积分以 0 和 $+\infty$ 为奇点, 容易验证其收敛性. 因此可以将积分拆开成两个积分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

然后对上式右边的第二个积分作倒代换, 就得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

因此原广义积分等于 0. □

注 以上计算的实质是什么? 试作代换 $x=\tan t$, 就得到

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\tan t\,\mathrm{d}t.$$

由于

$$\ln\tan(\frac{\pi}{2}-t)=\ln\cot t=-\ln\tan t,$$

因此被积函数 $\ln\tan t$ 在区间 $(0,\pi/2)$ 上关于区间中点为奇函数. 如果与命题 10.4.5 作比较, 可见积分等于 0 的原因在于对称性. 关于命题 10.4.5 在广义积分情况的推广留作练习题.

例题 12.3.2 计算广义积分 $\int_0^1(\ln x)^n\,\mathrm{d}x \quad n\in\mathbf{N}_+$.

解 这是一个无界积分, $x=0$ 是瑕点. 由 $\lim\limits_{x\to0+}x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^n=0$, 知所求广义积分收敛. 设 $I_n=\int_0^1(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$, 应用分部积分法得

$$\begin{aligned}I_n&=x(\ln x)^n\Big|_0^1-\int_0^1 n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=-nI_{n-1}\\&=(-1)^2n(n-1)I_{n-2}=\cdots=(-1)^n n!I_0=(-1)^n n!.\end{aligned}$$ □

在广义积分计算中也可以用分部积分, 但这时需要注意, 如果在积分外出现非有限数, 则不能得到正确结果.

例题 12.3.3 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

这个广义积分的收敛性是容易判别的, 而且 $x=0$ 不是瑕点. 为了计算它的值, 可以用与例题 12.3.1 完全相同的方法, 答案也是 0, 同时那里的注解对本题也一样有效, 细节从略.

但是由于本题的被积函数的形式, 容易使我们产生用分部积分的想法. 这时用分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)\\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Big|_{0+}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x(1+x^2)}.\end{aligned}$$

这时右边的第一项当 $x\to 0^+$ 时发散, 同时最后一个积分也发散, 出现了 $\infty-\infty$ 型的不等式. 造成错误的原因是忽视了运用广义积分分部积分法的条件 "$\int_a^b u\,\mathrm{d}v$, $\int_a^b v\,\mathrm{d}u$, $uv\Big|_a^{b^-}$ 中至少要有两个收敛".

注 类似的问题对于常义积分也是存在的, 这在例题 10.4.1 中已经遇到过, 但对于广义积分却难以用那里介绍的待定常数法来解决. 当然, 也可以如例题 9.1.5 那样, 用分部积分法先求出本题的被积函数的不定积分, 然后用广义的 N.L. 公式进行计算.

12.3.2 几个特殊广义积分的计算

本节介绍几个有名的广义积分, 其中的方法和结果都是重要的. 利用这些积分还可以计算出很多其他积分 (见下一小节的练习题).

例题 12.3.4 (Euler 积分) 计算积分 $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 这是无界积分, 瑕点为 $x=0$. 利用 Cauchy 判别法, 容易验证其收敛性. 先作代换 $x=2t$, 得到

$$I=\int_0^{\pi/4}2\ln\sin 2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/4}2\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}2\ln\cos t\,\mathrm{d}t,$$

对右边最后一个积分用代换 $t=\pi/2-u$, 得到

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/4}2\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\ln\sin u\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}2\ln\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\end{aligned}$$

所以答案为 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. □

例题 12.3.5 (Froullani 积分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 极限 $f(+\infty)$ 存在且有限, 实数 $a,b>0$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解 本题的广义积分的收敛性将在下面的计算过程中建立. 对 $0<r<R<+\infty$, 由定积分的换元积分法, 成立

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对上式右边的两个定积分分别应用积分第一中值定理, 得到

$$\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\ \ (ar<\xi<br),$$
$$\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\eta)\int_{aR}^{bR}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\eta)\ln\frac{b}{a}\ \ (aR<\eta<bR).$$

在上两式中分别令 $r\to0^+$, $R\to+\infty$, 注意到这时 $\xi\to0^+$, $\eta\to+\infty$, 由于 $f(0^+)=f(0)$, $f(+\infty)$ 存在有限, 而且 $\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在这时的极限就是 Froullani 积分, 便得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.\quad\square$$

注 从上面的证明过程可以得到 Froullani 积分的两种变型:

(1) 若 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 没有有限极限, 但是对某个 $A>0$, 积分

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 若 f 在 0 点不连续, 甚至右极限也不存在, 但对于某个 $A>0$, 积分

$$\int_0^A\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

例题 12.3.6 (Dirichlet 积分) 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

解 从例题 12.2.3 已知这个广义积分为条件收敛. 为了计算它的值, 要利用在例题 10.4.3 中已经得到的结果 (也有称为 Dirichlet 积分的):

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

先观察将其分母换为 x 所产生的影响. 用 L'Hospital 法则 (见例题 8.1.1) 可见有

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = O(x)\ (x\to 0),$$

因此 f 在 $[0,\pi]$ 上常义可积. 应用 Riemann 引理 (例题 10.2.6) 就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,\mathrm{d}x = 0,$$

并且得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

最后在利用代换得到的等式

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

的两边令 $n\to\infty$, 就得到所要的结果. □

下面的一个广义积分称为概率积分 (也称为 Euler-Poisson 积分), 它的值在概率统计中是一个基本量.

例题 12.3.7 (Euler-Poisson 积分) 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解 积分的收敛性是明显的. 利用对于每个 t, 数列 $\left\{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right\}$ 的极限是 e^{-t^2}, 我们研究积分

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

作代换 $t=\sqrt{n}\sin x$, 就有

$$I_n=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (n\to\infty).$$

这里利用了例题 10.4.9 和 Wallis 公式 (11.26). 由于右边的极限值已经是概率积分的数值, 而且又有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

因此只需要再证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t=0.$$

利用关于指数函数的一个不等式 (见例题 8.5.4): 当 $a\geqslant 1$ 时在区间 $[0,a]$ 上成立

$$0\leqslant\mathrm{e}^{-x}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^a\leqslant\frac{x^2}{a}\mathrm{e}^{-x},\tag{12.7}$$

在其中令 $x=t^2$, $a=n$, 就得到估计式

$$0\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\left[\mathrm{e}^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}t^4\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{n}.$$

由于当 $n\to\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0. □

注 计算概率积分的方法很多. 比较传统的方法有: (1) 从简单不等式

$$1-x^2\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\ (x\geqslant 0)\tag{12.8}$$

出发, 用夹逼方法, 见 [14] 第 2 卷 455 小节 (留作练习题); (2) 二重广义积分方法, 见 [14] 第 3 卷, 592 小节; (3) 含参积分方法, 见 [14] 第 2 卷 484 小节. 上面所用的方法见美国数学月刊, 63 卷 (1956), 35–37 页.

12.3.3 练习题

1. 根据例题 12.3.1 的注, (1) 写出命题 10.4.5 在广义积分情况的推广, 并作出证明; (2) 推广该例题, 也就是说当 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上满足什么条件时, 可以利用类似的方法, 或命题 10.4.5 的推广形式, 证明 f 在这个区间上的广义积分等于 0.

2. 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx$;

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}$;

(3) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n\in \mathbf{N}_+)$;

(5) $\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^m dx$ $(n,m\in\mathbf{N}_+)$;

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$;

(8) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

3. 利用 Euler 积分 (例题 12.3.4) 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln\tan x\,dx$;

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx$;

(4) $\int_0^{\pi/2} x\cot x\,dx$;

(5) $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx$;

(6) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$;

(8) $\int_0^{\pi/2} \ln|\sin^2 x-a^2|\,dx$ $(a^2\leqslant 1)$.

4. 利用 Froullani 积分 (例题 12.3.5 及其注) 计算下列积分 $(a,b>0)$:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\,dx$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax\sin bx}{x}\,dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\,dx$;

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}\,dx$.

5. 利用 Dirichlet 积分 (例题 12.3.6) 计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)}\,dx$;

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$.

6. 利用概率积分 (例题 12.3.7) 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\,dx$.

7. 若 $a,b>0$, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$ 收敛, 证明:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\,dt.$$

§12.4 广义积分的特殊性质

这方面有两点需要注意. 第一点是: 绝对可积的广义积分必可积, 但反之未必. 对定积分, 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上必绝对可积, 反之则未必. 两者恰恰相反. 从这点来说, 广义积分与其说像定积分, 倒不如说更像数项级数 (见下册).

第二点是无穷限广义积分所特有的问题, 将在本节讨论.

12.4.1 收敛无穷限积分的被积函数在无穷远处的性质

由命题 2.2.9 及其注知道, 如果无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$. 与之类比, 初学者容易认为对无穷限广义积分应当成立以下结论:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛 } \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

但是从例题 12.2.5 和图 12.1 中我们知道极限 $f(+\infty)$ 完全可以不存在.

首先建立以下基本结论:

例题 12.4.1 设无穷限广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 有意义, 则它一定等于 0.

证 若 $f(+\infty)$ 为有限正数或正无穷大, 则都存在 $x_0>a$ 和 $c>0$, 使得当 $x>x_0$ 时成立 $f(x)>c$. 因此对于 $A>x_0$ 有

$$\begin{aligned}\int_a^A f(x)\,dx &> \int_a^{x_0} f(x)\,dx+\int_{x_0}^A f(x)\,dx\\ &> \int_a^{x_0} f(x)\,dx + c(A-x_0) \to +\infty\ (A\to+\infty).\end{aligned}$$

这与无穷限积分收敛的条件矛盾, 可见 $f(+\infty)$ 不可能是有限正数或正无穷大. 同样地可以证明 $f(+\infty)$ 也不可能是负数或负无穷大. 因此得到 $f(+\infty)=0$. □

若 f 单调, 则 $f(+\infty)$ 一定有意义, 从而有 $f(+\infty)=0$. 但是实际上这时还有更好的结果.

例题 12.4.2 若无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 单调, 则有

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

证 不妨设 f 单调减少. 这时与例题 12.4.1 的证明类似地可以知道 f 非负. 由于广义积分收敛, 对于 $\varepsilon>0$, 有正数 $M>a$, 使得对于任何一对 $A_1,A_2>M$, 成立不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

取 $A_1=x$, $A_2=2x$, 则当 $x>M$ 时, 就有

$$0\leqslant 2xf(x)\leqslant\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

即已经得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$. □

下面是无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时使 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 成立的主要结果.

命题 12.4.1 设无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且被积函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

证 用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立, 则 $\exists\,\varepsilon_0>0$, 使 $\forall\,A>a$, $\exists\,x_0>A$, 满足 $|f(x_0)|\geqslant 2\varepsilon_0$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 因此对 $\varepsilon_0>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\,x',x''\in[a,+\infty)$ $(|x'-x''|<\delta)$, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$. 所以当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有

$$|f(x)|\geqslant|f(x_0)|-|f(x_0)-f(x)|>\varepsilon_0.$$

并且 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 因此就有

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0\int_{x_0}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x=\varepsilon_0\delta. \tag{12.9}$$

由于这个不等式右边的 $\varepsilon_0\delta$ 是一个固定的正数, 而对于每个 $A > a$, 都存在 $x_0 > A$ 满足 (12.9), 因此与无穷限积分的 Cauchy 收敛准则矛盾. □

注 在无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, 我们不知道保证 $f(+\infty) = 0$ 的充分必要条件是什么. 但若有 $f \in C[a, +\infty)$, 则在积分收敛时, 条件 $f(+\infty) = 0$ 等价于 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续 (参见例题 5.4.6).

此外下面的一个结论也是基本的, 它表明虽然极限 $f(+\infty)$ 不一定存在, 但若将数列的极限点概念 (3.6.1 小节) 推广到函数极限, 则当连续被积函数的无穷限广义积分收敛时, 必有一个极限点是 0.

例题 12.4.3 设 $f \in C[a, +\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在数列 $\{x_n\} \subset [a, +\infty)$, 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

证 根据 Cauchy 收敛准则, 对 $\varepsilon_n = 1/n$, $n > a$, 存在 $A_n > n$, 使得

$$\left|\int_{A_n}^{A_n+1} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{n}.$$

对上述积分用积分第一中值定理, 就有

$$|f(x_n)| = \left|\int_{A_n}^{A_n+1} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{n},$$

其中 $x_n \in (A_n, A_n + 1)$. 因此 $\{f(x_n)\}$ 为无穷小量, 而 $\{x_n\}$ 是正无穷大量. □

注 如果积分还是绝对收敛的, 则有更好的结论 (见下面的练习题 6).

12.4.2 练习题

1. 设函数 f 于 $[a, +\infty)$ 上可导, f' 内闭可积, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 证明: $f(+\infty) = 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有有界的导函数且无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. 举例说明例题 12.4.2 之逆不成立, 也就是说, 当函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且满足条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ 时, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 仍可能发散.

4. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $xf(x)$ 单调, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微且无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明：存在数列 $\{x_n\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

6. 设 $f \in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在数列 $\{x_n\} \subset [a,+\infty)$, 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n f(x_n) = 0$. 并举出例子说明, 如果积分只是条件收敛, 则本题结论可以不成立.

§12.5 关于教学的建议

12.5.1 学习要点

1. 在很多教科书中, 无穷限积分与无界积分的定义、性质、敛散性判别和计算等都是分成两部分来讲授的. 这样做必然会使得可以统一的许多结果必须分成两次重复叙述了. 我们倾向于将它们放在一起叙述, 而在需要分开的地方再分开叙述, 这样不但可以精简文字, 而且可以突出两类广义积分的异同之处.

2. 广义积分的许多敛散性判别法与数项级数的敛散性判别法是平行的, 例如比较判别法, Cauchy 收敛准则, Abel判别法与 Dirichlet 判别法等. 这在学了级数之后就非常清楚. 如果所用教材中数项级数的讲授安排在广义积分之前, 则应当加入这方面的例题和练习题.

3. **对习题课的建议** 广义积分内容在各种数学分析教科书中所占篇幅一般不多, 因此主要的训练内容集中在敛散性判别法上, 而关于计算和估计就比较少. 但是从目前考研的情况来看, 在常义积分方面的每种题型都可能在广义积分中出现. 因此我们在参考题中较多地收入了这方面的题, 希望引起注意. 在这方面较有特色的不仅有传统题, 也有过去注意不多的题. 前者如用代换 $x = t - 1/t$ 解决积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

的计算, 后者如第一组参考题 1, 2, 第二组参考题 7, 8.

12.5.2 参考题

第一组参考题

1. 证明: 对于任何实数 α, 成立恒等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

并计算以下积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^6)}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{100}x}$.

2. 证明 (或改进) 对以下广义积分的估计:

(1) $\displaystyle\frac{1}{29}<\int_1^{+\infty}\frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{29}+\frac{1}{59}$;

(2) $\displaystyle\frac{\pi}{10}<\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}}<\frac{\pi}{8}$;

(3) $\displaystyle\frac{1}{30}<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{20}$;

(4) $\displaystyle 0.009\,9<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<0.01$.

3. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $p>0$, 且 $|f|^p$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x=0.$$

4. 设 f,g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $p>0$, 且 $|f|^p$, $|g|^{p/(p-1)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明: 函数

$$I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

5. 设 $f\in C^1[a,+\infty)$, 单调减少, 且 $f(+\infty)=0$, 证明: 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\displaystyle\int_a^{+\infty}xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上为内闭可积的正函数, 且有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p$, 则当 $-\infty\leqslant p<-1$ 时, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $-1<p\leqslant+\infty$ 时, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

7. 证明: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\gamma$, 其中 γ 是 Euler 常数 (见 2.5.3 小节).

8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.

9. 讨论以下带有参数的广义积分的敛散性, 确定使得积分绝对收敛、条件收敛和发散的参数范围:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

10. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$ 在 $p>0$ 时收敛, 证明:

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty}f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0.$$

11. 设 $f\in C[0,+\infty)$, 广义积分 $\int_0^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. 设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积, 且在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 证明:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

13. 在常义积分的积分第二中值定理的基础上, 证明**广义积分第二中值定理**: 设广义积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 (奇点为 a 或 b, 或者 a 和 b 都是奇点), 如果 f 在 (a,b) 上单调有界, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a^+)\int_a^{\xi}g(x)\,\mathrm{d}x+f(b^-)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. 设广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得

$$\int_1^{+\infty}x^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. 设 $a>0$, f 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积, 证明: 积分 $\int_a^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

16. 在 $x>0$ 时定义特殊函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 证明:

(1) $\Gamma(x)<+\infty\ \forall x>0$;　　(2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;

(3) $\Gamma(1)=1,\ \Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbf{N}_+$;　　(4) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(从 (3) 可见 $\Gamma(x)$ 是阶乘 $n!$ 的连续化. 这在一定条件下是唯一的 (见 [54]).)

第二组参考题

1. 先证明不等式 (12.8), 然后由

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

出发, 用夹逼方法计算概率积分.

2. (Gordon 不等式) 证明: 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ 在 $x>0$ 时严格单调减少, 且成立

$$\frac{x}{x^2+1}<f(x)<\frac{1}{x}.$$

3. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 且平方可积, 令 $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 证明: $\frac{g(x)}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上平方可积, 且成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可微, f 和 f'' 在这个区间上均平方可积, 证明: f' 在这个区间上也平方可积.

5. 设 $f\in C^1[0,+\infty)$, 且 $xf(x)$ 和 $f'(x)$ 在这个区间上均平方可积, 证明:

(1) f 也在这个区间上平方可积;

(2) 成立不等式

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2};$$

(3) 在上述不等式中成立等号的充分必要条件是 $f(x)=a\mathrm{e}^{-bx^2}$, 其中 $b>0$.

6. 问 a,b 是怎样的正实数时, 广义积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)\mathrm{d}x$$

是收敛的?

7. 设有理函数 $f(x)=P(x)/Q(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k A_k,$$

其中 A_k 是有理函数 f 的部分分式分解中 $1/x_k$ 项的系数, x_k 是分母 $Q(x)$ 的零点, 和式只对虚部大于 0 的 x_k 求和. 当 x_k 为单根时有简单公式 $A_k=P(x_k)/Q'(x_k)$.

8. 应用上题的结果,

(1) 证明: 对 $n\in\mathbf{N}_+$ 成立 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{2n}$.

(2) 证明: 若 $n,m\in\mathbf{N}_+$ 满足条件 $2m+1<2n$, 则成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

(3) 计算积分: (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{50}}{x^{100}+1}\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\,\mathrm{d}x$.

9. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负函数, 且满足以下条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

证明: (1) 在 $x>0$ 时成立 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2}{1+x^2}$;

(2) 在 $x<0$ 时成立 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{1+x^2}$.

(本题是概率论中的基本不等式, 且不能再改进 (见 [30]). 它表明期望与方差有限的连续随机变量的分布函数 (在标准化之后) 所必须满足的限制.)

10. 设 $p>0$, 定义

$$g(x)=\begin{cases}p\left[\dfrac{x}{p}\right]+\dfrac{p}{2}, & x\geqslant 0,\\ -g(-x), & x<0,\end{cases}$$

证明: 对所有 x 成立

$$\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})pt}{\sin\frac{1}{2}pt}\cdot\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[g(x^+)+g(x^-)].$$

参考题提示

第二章 数列极限

第一组参考题 (55 页)

1. 设前两个子列收敛于 α 和 β, 利用第三个条件取适当的子列证明 $\alpha=\beta$.
2. 与上一题有密切联系.
3. 用极限的和差运算法则即可.
4. 试用反证法.
5. 试用夹逼定理.
6. 利用 n 的因子分解对 $p(n)$ 作估计.
7. 用拟合法 (参考例题 2.4.3 及其注解 1). 答案为 0.
8. 利用 $0<k<1$ 和 $x>0$ 时成立的不等式 $(1+x)^k<1+x$.
9. (1) 构造数列, 使通项是 x_n-x_{n-1}. (2) 试用 2.4.3 小节中练习题 4 的结果.
10. (1) 将分式 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 倒过来如何? (2) 试用反证法.
11. 可用数学归纳法.
12. 可用数学归纳法.
13. (1) 将左边记为 a_n, 研究前后项之差即可. 由此可得 (2). 对于 (3) 可模仿命题 2.5.4.
14. 模仿命题 2.5.6 中对 Euler 常数的讨论. 此题还可以用积分法做 (见第十一章第一组参考题 9).
15. 将 a_n 用算术平均值表示出来.
16. 可取对数后做.
17. 证明 $\{x_n\}$ 单调增加有上界. 极限为 1/2.
18. 可归纳地证明 $a_{2k}\downarrow$, $a_{2k-1}\uparrow$. 答案为 $(b+2c)/3$.
19. 注意对每个 n 成立 $a_n+b_n+c_n=a+b+c=A$. 答案为 $A/3$.
20. (1) 可归纳地证明 $b_n\uparrow$, $a_n\downarrow$. (2) 在题中已有提示. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}=\pi$ 可从命题 1.3.6 的不等式得到.

第二组参考题 (57 页)

1. 有许多方法可以证明 $\{a_n\}$ 有界. 有推广价值的一种方法是利用

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}}<\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1}=\sqrt{n-1}+1,$$

然后用 $\sqrt{n-1}<2\sqrt{n-2}$ 从里向外将根号逐个脱去.

2. 将左边展开, 并利用一个辅助不等式 (其中 $k>1$):

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)>1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{k}.$$

3. 利用命题 2.5.4 和极限 $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$.
4. 本题与 Euler 常数有关, 可利用命题 2.5.6 的结果. 答案为 e.
5. 用两次 Stolz 定理. 答案为 1/2.
6. (1) 用二项式定理. (2) 需要用 Stolz 定理.
7. 用 $a_1=A_1, a_k=A_k-A_{k-1}, k=2,\cdots,n$ 代入, 然后用 Stolz 定理.
8. 先证明 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=+\infty$, 然后再设法用 Stolz 定理.
9. 证明 $u_n\downarrow 0$, 但这还不够, 还需要用 Stolz 定理证明 $u_n\sim\frac{1}{n}$,
10. 实际上这个证明不比 Cauchy 命题的证明难.
11. 将 $\frac{a_n}{b_n}$ 用 $\frac{a_i-a_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}$ $(i=2,\cdots,n)$ 的线性组合表示出来.
12. 可试用拟合法 (参考例题 2.4.3).
13. 先推出 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ (参见例题 2.2.9), 然后参考 Cauchy 命题的证明方法. 反例可考虑 $x_n=y_n=1/\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}_+$.
14. 可以直接写出 $\{x_n\}$ 的表达式, 然后用上一个参考题. (本题的其他解法见例题 3.6.3 中.)
15. 可求出 a_n 的表达式. 答案是 $a_0=1/5$.
16. 分别考虑奇数项子列和偶数项子列, 证明它们均收敛于 2.
17. 试作变量代换 $y_0=x+x^{-1}$, 然后用 x 将 y_n 和 S_n 表示出来.
18. 用迭代生成数列一节的现成结论即可. 这里关于函数性质的讨论可以在学了微分学后再做.
19. 注意 $b=1+\sqrt{5}$ 时 $\{x_n\}$ 本身恰为一个周期 2 轨.
20. 本题已知有几种证法. (1) 将 $x_i^{(k)}$ $(i=1,\cdots,n)$ 写为 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合, 可以发现问题归结为证明在二项式系数

$$1,\binom{k}{1},\cdots,\binom{k}{k}$$

将相隔 n 项的各项取和后除以 2^k, 当 $k\to\infty$ 时极限均为 $\frac{1}{n}$.

(2) 不妨从 $x_1+\cdots+x_n=0$ 开始. 将 $x_i^{(n-1)}$ $(i=1,\cdots,n)$ 写为 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合, 用拟合法估计 $\max\{|x_1^{(n-1)}|,\cdots,|x_n^{(n-1)}|\}$ 与 $\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$ 之间的关系. 然后可以先证明出 $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k(n-1))}=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

此外本题还可以用线性代数或多元函数的方法求解.

第三章 实数系的基本定理

第一组参考题 (95 页)

1. 用凝聚定理等工具即可.
2. 与上一题类似.

3. 参考例题 3.7.1 的某一个证明. 对开区间上的无界函数则要换一种说法.
4. 用闭区间套定理或其他等价工具.
5. 与原证明无本质不同. 参考例题 3.6.1 的几个证明.
6. 与正文内容基本平行, 可先对有界数列证明.
7. 与题 5 类似.
8. 考虑子列中的收敛子列就够了.
9. 只要证明存在无穷多个 n, 使得 $\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n} > 1+\dfrac{1}{n}$. 然后用反证法.
10. 与上题类似.

第二组参考题 (96 页)

1. 这个结论称为 Archimedes 公理或原理, 但可以由实数系的基本定理证出.
2. 这就是 Dedekind 的连续性定理 (公理), 它与实数系的每一个基本定理等价.
3. 这个结论称为实数的连通性, 它与实数系的每一个基本定理等价.
4. 这比用第二章的几何方法要容易.
5. 可试用 $y_n = -x_n, n \in \mathbf{N}_+$.
6. (1) 试从几何上考虑如何归纳地找出所要的项. (2) 用反证法.
7. 参考例题 3.6.3 的解法. 也可以写出 x_n 的表达式, 如第二章第二组参考题 14 那样做.
8. 参考例题 3.6.3 的解法.
9. 证明 $\{\sin n\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密, 即无限多次进入 $(-1,1)$ 中的任何一个邻域中去.
10. 几何直观: 由于 $\{x_n\}$ 的项在 n 增加时既要到 l 邻近, 又要到 L 邻近, 而且前后两项之差趋于 0, 因此一定会无限多次进入在 (l,L) 中的任意一个邻域中去.

第四章 函数极限

参考题 (122 页)

1. 用确界定理即可.
2. 用极限定义即可.
3. 必要性无问题. 充分性在作了修改 (1) 和 (2) 后仍成立. 但对于推论来说, 情况不同. (1) 不行, (2) 可以.
4. 只能说阶小于 1/2, 但不是 1/2.
5. 这里 $a \gtrless 1$ 是不一样的. 答案为 $\max\{a,1\}$.
6. (1) 除以 x 后求极限即可. (2) 类似.
7. 目前没有 Taylor 公式可用. 可记极限为 $p(n)$, 求递推关系. 答案: $p(n)=\dfrac{n(n^2-1)}{6}$.
8. 直接验证即可 ($D(x)$ 的定义见 4.1.5 小节第 10 题).
9. (1) 和 (2) 均与例题 5.1.1 类似.
10. 与上一题类似, 稍难一点.
11. 对 $a>1$ 的情况可以有 $k \geqslant 0$, 使得 $2^k \leqslant a < 2^{k+1}$, 然后利用条件. 对 $0<a<1$ 可化为前一情况.

12. 这是数列极限中的 Cauchy 命题的推广.
13. 与上一题类似.
14. 这是数列极限中的 $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理的推广, 并包含了前两题.
15. 本题比 4.4.4 小节第 2 题难一点. 需要 Cauchy 命题中的方法.

第五章 连续函数

第一组参考题 (153 页)

1. 构造辅助函数 $F(x) = f(x+a) - f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1-a$.
2. 与上一题类似, 但注意两个题的条件和结论均不相同.
3. 请先作个图.
4. 试用反证法, 将极限不存在用正面方式写出. 两个小题是类似的.
5. (1) 可直接证, (2) 可作辅助函数 $F(x) = f(x) - x$.
6. 可证明 $\{c_n\}$ 严格单调.
7. 学习例题 5.1.4 的方法.
8. 试用反证法.
9. 作辅助函数 $g(x) = f(x+\lambda) - f(x)$, 试证明: $\forall \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists x > M$, 使得 $|g(x)| < \varepsilon$.
10. 任取 $x < y$, 在两点之间插入足够多的等距分布的点, 用以估计 $|f(x) - f(y)|$. 此外, 在学了微分学后有更容易的解法. (从本题可知, 在文献中若提到带指数的 Lipschitz 条件时, 总假定其中的指数不大于 1.)
11. 能否从 Dirichlet 函数学到点什么?
12. 利用一致连续性. 本题有重要的意义, 即可以用简单的分段线性连续函数来一致逼近任何连续函数.
13. 试用反证法.
14. 严格单调性是明显的. 试从几何观察来设计一个证明方法.
15. 前半题可用反证法. 后半题的答案是否定的. 例如考虑 Dirichlet 函数.
16. 直接按定义证即可.
17. 与连续性的两个定义的等价性证明类似.
18. 与上题类似.
19. 按定义证明即可.
20. 可以从几何上考虑 $y = f(x)$ 的图像, 理解为什么会有这样的"线性估计"?

第二组参考题 (154 页)

1. 再强调一次, 这里的 7 个小题都不要很多知识, 有连续函数的零点存在定理就够了. 关键在于发挥你的想像力.
2. 本题也只需要连续函数的零点存在定理. 试从 $n = 2, 3$ 做起, 看什么时候你会有个飞跃. 本题的解法很多, 包括数学归纳法.

3. 在题 (1) 中可试用反证法和凝聚定理. (2) 以 (1) 为基础, 例如取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}_+$.
4. 有了上一个题的结论本题就很容易了.
5. 本题的结论很有趣: 第一小题的答案是不存在 (请证明); 第二小题的答案是存在 (请举例).
6. 设法将问题转化为熟知的函数方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
7. 试用反证法.
8. 结论是 $k \geqslant 0$.
9. 可从证明 f 一定是严格单调增加函数着手.
10. 注意: $M(x)$ 和 $m(x)$ 都是单调函数. 证明前先作草图观察这两个函数有什么特点.
11. 可试用 Lebesgue 方法.
12. 用闭区间套定理或其他工具均可.
13. 本题中的连续性条件是本质的. (在数学通报 1965 年第 5 期和美国数学月刊, 64 卷 (1957), 598–599 页上均有讨论, 指出两个周期不可公约的周期函数之和仍有可能为周期函数.)
14. 再次强调一下, 本题完全不需要连续性条件.
15. 在一致连续性的充分必要条件中本题要难一点. 充分性容易. 必要性证明时可以考虑在 x 和 y 之间插入多个等分点.
16. 可试用 Lebesgue 方法.
17. 可试用闭区间套定理.
18. 可以学习命题 5.5.2 中的方法.
19. 可以先建立一个中间结果: 对于 $\varepsilon > 0$, 存在某个自然数 k 和某个 (非退化) 闭区间 $[a,b]$, 使得对 $n \geqslant k$ 和 $x \in [a,b]$ 成立 $|f(nx)| \leqslant \varepsilon$ (用反证法和闭区间套定理即可).
20. 用反证法. 这时设有两个极限点 $\xi_1 < \xi_2$. 根据第三章第二组参考题 9, 区间 (ξ_1, ξ_2) 中每个点都是极限点. 只需证明它们都是 f 的不动点. (本题的第一个证明见美国数学月刊, 83 卷 (1976), 273 页. 此外还可看同一刊物的 87 卷 (1980), 748–749 页.)

第六章　导数与微分

第一组参考题 (181 页)

1. 本题完全是巧用导数定义.
2. 将 $f(x)$ 拆成简单分式后求导.
3. 用 Heine 归结原理化为函数极限问题.
4. f 是常值函数. 用三角公式即可.
5. 用有限增量公式. 答案为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$.
6. 答案: (1) $\dfrac{1}{2}$, (2) $\sqrt{\mathrm{e}}$.
7. 将 f 拆成适当的两项后求导.
8. 试用数学归纳法.

9. 用微分法方便一些.
10. 与上题类似.
11. 用适当的抛物线方程, 写出切线方程进行计算即可.
12. 与上题类似, 但计算可能复杂一些.
13. 证明不难. 注意本题解释了曳物线的实际意义.
14. 这个结果实际上为正文中的例题 6.1.4 所覆盖.
15. 用 Leibniz 公式或数学归纳法均可.
16. 先可考虑若 $a_0 \neq 0$ 时如何做?
17. 可以借用 6.1.4 之题 6 中的公式.
18. 试用凝聚定理.
19. 想出这些结果不容易, 用数学归纳法证明不难.
20. 试用数学归纳法.

第二组参考题 (183 **页**)

1. (1) 用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 计算 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \cdots + \mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}$ 的实部和虚部较为方便. (2) 在 (1) 的基础上求导.

   (Euler 公式的证明可以留到今后解决. 但不必因为尚未证明而在数学分析教学中不敢用它.)
2. 在有理点上 $R(x)$ 不连续, 因此只要对 x_0 为无理数时证明 $R(x)$ 不可导. 对每个自然数 q, 总有整数 p, 使 $\dfrac{p}{q} < x_0 < \dfrac{p+1}{q}$. 然后估计差商.
3. 先作图猜出结论, 然后设法写出证明. (结论总是先有, 然后才去证明它. 否则证明什么? 当然猜测可能错, 那就重新再来过.)
4. 直接计算即可.
5. 用数学归纳法即可. 但本题还有其他捷径.
6. 可以用 $(u+v+w)^n = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$ 为样板.
7. 注意导函数是线性的, 因此最大值在边界达到.
8. 引入 $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m x^{k-1}$, $m = 1, \cdots, n$. 发现它们之间的递推关系.
9. 可先用 Leibniz 公式写出 $\dfrac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!} = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) + g(n)$. 然后证明 $g(n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. 答案为 Euler 常数 γ.
10. 注意要证明 $f'(0)$ 存在. 也可利用第四章参考题 15 的结果.
11. 可以对 $(1+\sqrt{x})^{2n+2} + (1-\sqrt{x})^{2n+2}$ 求 n 阶导数.
12. Schwarz 导数是在复分析中较老的概念, 但自 1978 年后出人意料地在混沌研究中得到重要的应用. 本题的各小题计算均不难.

第七章 微分学的基本定理

第一组参考题 (221 页)

1. 仿例题 7.1.2.
2. 令方程左边为 $f(x)$, 分析 $f'(x)$. 可试用反证法.
3. 与上题的方法类似.
4. 试作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-kx}f(x)$.
5. 试用数学归纳法.
6. (1) 试作辅助函数 $F(x)=f^2(x)f(1-x)$. (2) 类似.
7. 先从几何意义搞清楚本题要证明什么?
8. 与上一题类似.
9. 这 4 小题都可用于复习在例题 7.1.3 中的方法.
10. 设法用 Cauchy 中值定理.
11. 实际上与题 9 类似.
12. 试用反证法.
13. 可用 Cauchy 中值定理和函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.
14. 注意与 Stolz 定理的相似处 (当然这是下一章的 L'Hospital 法则的特例).
15. 设法利用例题 7.1.5 的结论.
16. 设 $0<x<2$, 写出 $f(0), f(2)$ 在点 x 的 Taylor 展开式.
17. 注意在例题 7.2.5 中只能用 $t>0$ 作估计.
18. 在 $(0,a)$ 中的最大值点当然是极大值点, 因此在该点的导数为 0. 如何利用这个条件?

第二组参考题 (223 页)

1. 若 $f'\in C[a,b]$, 则用 Lagrange 中值定理即可. 本题的意义在于对导函数来说, 连续性的要求不是必要的. 方法上与第一组参考题中第 7 题类似.
2. 设法先求出 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 再说.
3. 试用变换 $y=\dfrac{1}{x}$ 后再观察.
4. 若 f'' 无零点, 则保号. 然后用 Taylor 公式.
5. 考虑本题的几何意义. 可试用辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

6. 试用辅助函数 $F(x)=[f(x)-f(a)]\mathrm{e}^{x/(b-a)}$.
7. 可以只考虑 $\alpha>1$. 试用辅助函数 $F(x)=\ln f(x)$.
8. 试用辅助函数 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$.
9. 本题给出了关于 x,h 的一个恒等式, 条件很强. 试固定 x 后对 h 求导, 先证明 f' 为线性函数.

10. 可试用辅助函数

$$F(x)=\pm[f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]-\varepsilon(x-a)(b-x)],$$

其中 $\varepsilon>0$. 设法证明 $F(x)\leqslant 0$.

11. 可以先证明在区间 $\left[0,\dfrac{1}{2c}\right]$ 上 $f(x)\equiv 0$.
12. 注意在条件中蕴含了 $f^{(n)}(0)=0\ \forall n\geqslant 0$.
13. 上题的提示在这里也是对的.
14. 一阶导数是差商的极限. 本题是其推广. 试用带 Peano 余项的 Taylor 公式. 还可以利用第六章第二组参考题 8.
15. 利用例题 7.2.5 的方法, 写出带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n.$$

取互异的 $h_1,\cdots,h_{n-1}$ 代替上面的 h, 然后从中解出 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$.

16. 不妨设已有 $f(+\infty)=0$. 设法证明 $f^{(n)}(+\infty)=0$. 然后可以借用上题中的思路.
17. (1) 本题可以从例题 7.2.5 得到, 当然也可以独立证明.

(2) 从几何上不难考虑. 对 (2) 试用反证法. 这里需要关于极限类型 $x\to+\infty$ 的 Cauchy 收敛准则.

(在学了积分学后可以知道本题所讨论的问题等价于: 在区间 $[a,+\infty)$ 上广义可积的函数当 $x\to+\infty$ 时是否一定收敛于 0.)

18. 写出 $f(x+r)$ 在点 x 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 利用单调性作估计.
19. 在上题的基础上已不难得到. (本题的结果见美国数学月刊, 90 卷 (1983), 130–131 页.)

第八章 微分学的应用

第一组参考题 (274 页)

1. 试用辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$. (本题与上一章第二组参考题 17 (3) 相同, 但这里有新的工具可用.)
2. 先证明 $f(0)=f'(0)=0$, 然后从条件中求出 $f''(0)=4$. 答案为 e^2.
3. 与例题 8.1.10 类似. 答案为: $\alpha=k-1$, 极限为 $-\dfrac{1}{(k-1)A}$.
4. 注意 f 是闭区间上的连续函数.
5. $p=1$ 时即三点不等式. $0<p<1$ 时证明不难.
6. 注意所要证明的不等式等价于

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

然后将 n 改为连续变量 x, 就可用微分学方法证明.

7. 可试用辅助函数 $f(x)=x-\sin x(\cos x)^{-1/3}$.
8. 可以按常规的微分学方法求解.
9. 分别处理左边和右边的不等式.
10. 作辅助函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{3\pi}x^2,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$. 在 $x=0$ 用极限值补充定义. 求 f 的最小值.
11. 可设法从应用平均值不等式开始.
12. 只要证明 $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$ 严格单调增加.
13. 可用 Young 不等式或凸性不等式.
14. 必要性对一般可微函数都成立. 充分性可用反证法.
15. 在第五章有类似的题, 但这里当然要利用可微性.
16. 写出 $f(0)$ 和 $f(1)$ 在极小值点的 Taylor 展开式.
17. 试用辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-\dfrac{1}{2}t^2(t+1)$.
18. 用反证法. 若 g 在 (a,b) 中无零点, 则可以试用辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

第二组参考题 (275 **页**)

1. 考虑辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.
2. 计算 $x\neq 0$ 时的 $g^{(n)}(x)$ 和它在 $x\to 0$ 时的极限. 这里可以使用导数极限定理 (7.1.2 小节).
3. 可以用上一题的结论.
4. 注意基本关系 $P_n'(x)=P_{n-1}(x)\ \forall n\geqslant 2$. 主要工具是带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式. 只有 (3) 稍难一点.
5. 可以利用上题的 (6). 答案为 $a+(b-a)\mathrm{e}^{-1/2}$.
6. 证明 $\dfrac{x_n}{y_n}$ 严格单调增加.
7. 不妨从 $\alpha=1, a=0$ 开始. 可以证明: 若分母有实根或 $b=0$, 则不会有三个拐点. 再用平移, 将问题归结为讨论

$$y=\frac{x}{x^2+2\beta x+\gamma},\ \beta^2-\gamma<0.$$

可以用二阶导数证明这时存在三个拐点.

8. 可以用第一章中的向前－向后数学归纳法证明对一切自然数 n 成立

$$f\Big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

然后用例题 5.1.2 中的方法.

9. 证明对每个 $x_0\in(a,b)$ 成立 $f(x_0)=f(x_0^+)=f(x_0^-)$.
10. 从条件可有 $f(x+h)-f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}[f(x+2h)-f(x)]$, 反复利用这个关系和 f 的局部有界性, 可证明 f 在 (a,b) 内的每个闭子区间上一致连续.
11. 可以先在一个长度较小的区间上来做.
12. 试用反证法.

13. 用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即可 (本题的结论若联系到凸性就容易理解).
14. 用反证法. 若对每个 $x \in \mathbf{R}$ 成立 $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x) < 0$, 则由于它们均具有介值性质, 因此均保号. 然后设法利用上一题.
15. 将不等式左边记为 $h(x)$. 易见 h 是最高次项系数大于 0 的偶次多项式. 若 $p(x)$ 取到负值, 则在最小值点 x_0 处必有 $p(x_0) < 0$, $p'(x_0) = 0$, $p''(x_0) > 0$. 于是 $p''(x_0) - p(x_0) > 0$ 另一方面, 考虑 $\mathrm{e}^{-x}h(x) = [\mathrm{e}^{-x}(p''(x) - p(x))]'$, 就可引出矛盾.
16. 要看出在 $P(x) = 0$ 的两个相异实根之间存在 $Q(x) = 0$ 的至少两个根.
17. 用 $F(x) = f(x) - x$ 就容易做.
18. 思路同上, 只是讨论稍长一些.
19. 结论取决于表达式 $A = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - 1$ 的值. 在 $A < 0$ 时有 4 个相异实根, 在 $A > 0$ 时有两个相异实根. 在 $A = 0$ 时有重根.
20. 法线的条数可以归结为上一题的三角方程的实根个数 (也可归结为 4 次代数方程的实根个数问题). 设定点的座标为 (X, Y). 则可以确定出一条曲线:

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

稍有一点曲率知识的读者会知道这就是椭圆的渐屈线方程. 结论是: 若定点在椭圆的渐屈线内时, 可引出 4 条法线; 若定点在渐屈线外, 则只有两条. 若在渐屈线上, 则一般为三条, 但在尖点处只有两条. 在下面的图 1 中作出了一个椭圆和它的渐屈线, 其中 $a = 3$, $b = 2$. 在图 2 中显示了从点 (0.5,0.5) 出发得到 4 条法线的情况.

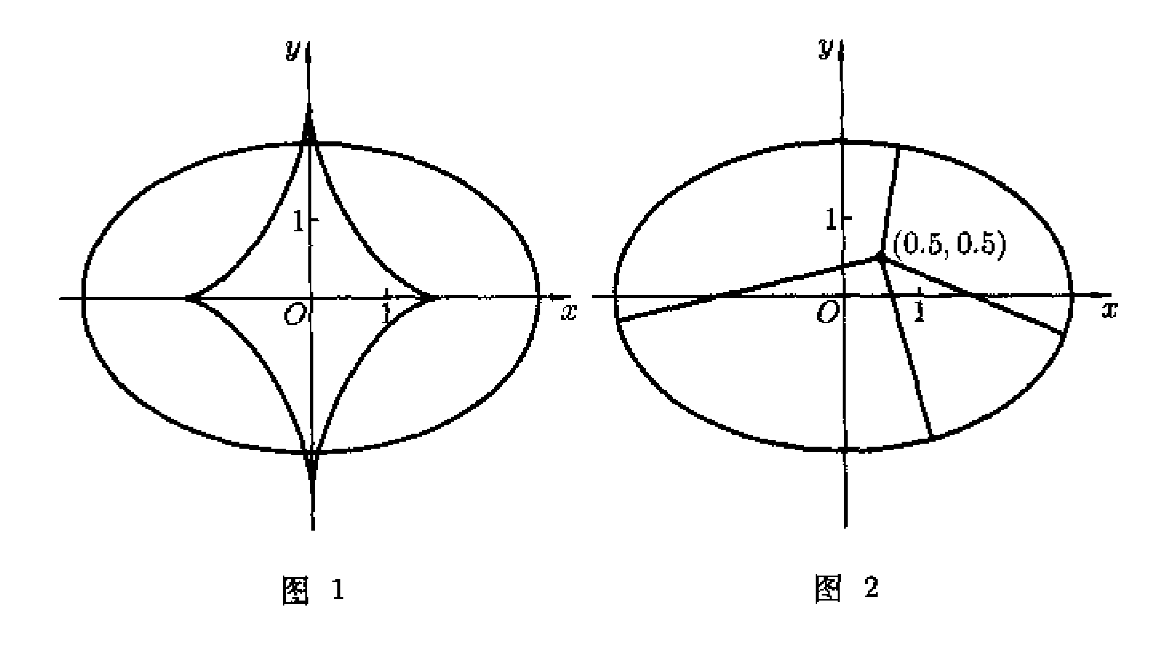


图 1　　图 2

第九章 不定积分

参考题 (298 页)

1. 作代换 $\sin^2 x = t$.

2. (1) 先求 $x\ln(1+x^2)$ 的原函数, 然后分部积分; (2) 作代换 $x=\mathrm{e}^t$; (3) 求 $F(0)=0$ 的原函数, 分段求出 F 的增量; (4) 分部积分; (5) 利用 $\sin(a-b)=\sin((x+a)-(x+b))$; (6) 用例题 9.2.2 的解 2 中的方法.
3. 分部积分.
4. 用 t 的表达式作变量代换.
5. 这时的部分分式分解是形式为 $A_i/(x-x_i)$ 的 n 项之和.
6. 求满足条件 $F(0)=0$ 的原函数.
7. 这里的方法与证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数的代数方法类似. 用反证法. 设 $h(x)=P(x)/Q(x)$, 其中 P 和 Q 是不可约的多项式, 设法引出矛盾.

第十章　定积分

第一组参考题 (332 页)

1. 不要取等距划分.
2. (1) 将 Dirichlet 函数加以改造, (2) 利用导函数的介值性.
3. 分析介点集不同所引起的差.
4. 所需知识均见命题 8.4.3.
5. (1) 可从积分定义得到, 其余可以由此逐步改造得到.
6. 利用可积性作足够细的分划, 由此估计积分, 其中取 $|h|$ 小于分划细度.
7. 与例题 10.2.1 类似.
8. 与例题 10.2.3 类似.
9. 用例题 10.2.3 的方法就可以证明在一个连续点上的函数值为 0.
10. 利用两个函数的可积性是关键. 只用到一个函数的可积性是不够的.
11. 利用导函数的介值性.
12. 这只是两个极限计算.
13. 设法证明极限为 b.
14. 不妨先做 $a=1$, 这时同时乘除以 e^x 后用 L'Hospital 法则即可.
15. 作代换 $x+t=s$ 即可.
16. n 为奇数时就是例题 10.4.3, n 为偶数时可用类似方法得到.
17. 设法将 $B(m,n)$ 写成积分.
18. 参考例题 10.4.4.
19. 用 Jordan 不等式克服指数上的困难.
20. 对 $f''(x)\sin x$ 的积分用分部积分.
21. 答案是只有 $f\equiv 0$ 的一种可能性.
22. 考虑 $\mathrm{e}^x f(x)$.
23. 用变限积分, 开方后将右边除到左边再积分.
24. 利用 f 单调增加, 且 $f\geqslant 1$.
25. 参考例题 10.3.1.

第二组参考题 (334 页)

1. (1) 为证单调性可以作代换 $t=xu$, 关于连续性只要证明 F 在点 $x=0$ 右连续. (2) 由于没有 f 连续的条件, 所以不能用 L'Hospital 法则, 但可以用 Cauchy 命题 (命题 2.4.1) 的方法做.
2. 只需证明充分性. 首先, 与命题 10.1.1 类似地证明 f 在积分区间上有界. 然后利用条件中的一列特殊分划去估计细度足够小的任何一个分划的和式与 I 之差.
3. 在上一题基础上, 只要取一列等距分划, 证明相应的积分和与介点集无关地收敛于 I. 这时要根据 Cauchy 积分和式的定义, 利用 (部分) 介点构造新的分划, 估计

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

与 I 之差.

4. 从简单情况开始: f 从常值函数, 阶梯函数开始, g 从不变号开始.
5. 写出 f 的多项式形式, 将 f 与 x^k 相乘后的积分写成关于 k 的有理分式.
6. 找递推关系.
7. 对给定的 $\varepsilon > 0$ 将积分拆开估计.
8. 注意分子和分母可约, 将最大公因子约去后再积分.

第十一章 积分学的应用

第一组参考题 (370 页)

1. 将 $1/\mathrm{e} = (\mathrm{e}^{-x} f(x))\Big|_0^1$ 写为积分形式开始做起.
2. 利用对称性处理左边第一个积分, 然后用 Schwarz 不等式.
3. (1) 将不等式 $F(x)F(y)(x-y)(F(x)-F(y)) \leqslant 0$ 先对 x 积分, 再对 y 积分. (2) 与 (1) 的方法类似.
4. 先将不等式整理等价形式 $\left(\int_0^1 \dfrac{1}{1-f}\right)\left(\int_0^1 (1-f)\right) \geqslant 1$.
5. 作积分代换, 使两边的被积函数为 $\cos(\sin x)$ 和 $\sin(\cos x)$, 左边写为 $\sin(\pi/2 - \sin x)$ 再作比较.
6. 令 $g(x) = (x-a)^n (b-x)^n$, 对 $f^{(2n)}(x)g(x)$ 的积分不断作分部积分即可.
7. 先用 Schwarz 不等式证明数列 $\{d_{n+1}/d_n\}$ 单调.
8. 用 Taylor 展开式分出主部.
9. 取对数做.
10. 参考命题 2.5.6 的证明.
11. 作 Taylor 展开, 并用余项控制误差.
12. 在被积函数的零点处对于其左方的各个峰和谷的大小进行估计.
13. 作代换 $f(x) = y$, 再用第二中值定理.
14. 分 f 在区间 $[a,b]$ 上有无零点进行讨论. 当 $\sin f(x)$ 不变号时用积分第一中值定理.
15. 将 S_n 用组合数表示并作简化.

第二组参考题 (372 页)

1. 设法用勾股定理.
2. 利用 $r^{2n}-1$ 的因式分解.
3. (1) 用反证法即可, 因为 $3x^2$ 的积分为 1; (2) 这时积分 $\int_0^1 x(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 对每个 a 成立, 利用 a 的任意性作估计.
4. 与上题类似, 这时 $\int_0^1 (x-a)^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 对每个 a 成立.
5. 用变限积分容易证明 c_1 是从 π 到 2π 的积分, 而 c_2 是从 0 到 π 的积分, 它们的近似值为 $-0.433\,785$ 和 $1.851\,94$.
6. 首先在没有可微条件下建立 (11.10), 然后从两个方向进行估计.
7. (1) 可先证明 f 在任何闭区间上必在端点达到最大值, 然后用反证法; (2) 可用反证法; (3) 同时具有两种凸性的函数一定是线性函数.
8. (1) 令 $h(x) = \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$, 则 $h \geqslant |f|$, $h' = |f'|$, 再用 Schwarz 不等式;
   (2) 将积分拆开, 用两次 (1).
9. 将右边除到左边, 乘以 g 后再积分.
10. 取 $f(x_0) = M$, 解决分母问题. 然后在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 上用微分中值定理, 得到两个中值点 α 和 β, 在这个子区间上即可估计出 f'' 的积分大于等于 4.
11. 从 $\dfrac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} \leqslant 0$ 出发积分即可.
12. 用反证法, 利用边界条件在两个半子区间上估计积分.
13. 记 $p(x) = x^3 - x^2$, 证明 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (f''-p'')^2$.
14. 因 f 连续, 取 m 为其最小值, 设 $f(x_0) = m$, 则 $m \leqslant f(x) \leqslant m + L|x - x_0|$. 由此出发作估计.
15. 参考正文中的 Stirling 公式的证明和注, 并先做 11.4.5 小节练习题 7.

第十二章 广义积分

第一组参考题 (398 页)

1. 作代换即可. 注意与例题 10.4.8 的联系.
2. (4) 需要作分部积分.
3. 有两个方法: 分析积分和式, 或用连续函数逼近.
4. 用 Hölder 不等式和上一题.
5. 在 $[a, A]$ 上分部积分, 在必要性证明中用例题 12.4.2.
6. 归结到 Cauchy 判别法.
7. 分段写出积分即可.
8. 用 Taylor 公式估计阶.

9. (1) $q/r - p > 1$ 时绝对收敛, 否则发散; (2) $p < 2$ 绝对收敛, $2 \leqslant p < 3$ 条件收敛, 其他情况发散.
10. 先证 $f(+\infty) = 0$.
11. 分段估计.
12. 这两题在常义积分都见过, 这里的推广不难.
13. 在常义积分的结果上做.
14. 只是上一题的应用.
15. 用 Schwarz 不等式.
16. (4) 需要概率积分.

第二组参考题 (401 页)

1. 需要 Wallis 公式.
2. 为得到右边的不等式, 可以研究 $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$; 另一边不等式的证明是类似的.
3. 分部积分后用 Schwarz 不等式.
4. 用 Schwarz 不等式, 或反证法.
5. 主要工具是分部积分和 Schwarz 不等式.
6. Taylor 展开.
7. 用 9.2.1 小节中分解有理函数为部分分式的方法做, 可参考 [14] 的第 2 卷 459 小节.
8. 在 (1), (2) 中用 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 做比较方便.
9. (1) 与 (2) 等价. 证明方法很多, 也可用反证法, 这时从前两个条件可以推出第三个条件不成立.
10. 积分号下和式可以对消至只剩一项.

参 考 文 献

[说明] *以下文献按作者名(编者名)的(拼音)字母顺序排列. 为简明起见, 对翻译著作不列出原作的外文名和译者名. 对有多册或多卷的著作也只列出所见的最早版本.*

[1] Bailey D H, Borwein J M, Borwein P B, Plouffe S. The quest for pi. The Mathematical Intelligencer, 1997, 19: 50～57

[2] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities. Berlin: Springer, 1961

[3] 别莱利曼. 趣味代数学. 北京: 中国青年出版社, 1980

[4] Berggren L, Borwein J, Borwein P. Pi: A Source Book. New York: Springer, 1997

[5] 布朗克. 微积分和数学分析习题集. 北京: 科学出版社, 1986

[6] 波耶. 微积分概念史. 上海: 上海人民出版社, 1977

[7] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 南京: 江苏教育出版社, 1998

[8] 陈传璋, 金福临, 朱学炎, 欧阳光中. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1983

[9] Conway J H, Guy R K. The Book of Numbers. New York: Springer, 1996

[10] 柯朗, 约翰. 微积分和数学分析引论. 北京: 科学出版社, 1979

[11] 德林费尔特. 普通数学分析教程补篇. 北京: 人民教育出版社, 1960

[12] 邓纳姆. 天才引导的历程. 北京: 中国对外翻译出版公司, 1994

[13] 方企勤, 林源渠. 数学分析习题课教材. 北京: 北京大学出版社, 1990

[14] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 北京: 高等教育出版社, 1954

[15] Finlay-Freundlich E. Celestial Mechanics. London: Pergamon, 1958

[16] 格莱克. 混沌: 开创新科学. 上海: 上海译文出版社, 1990

[17] 格列本卡, 罗渥舍诺夫. 数学分析教程. 北京: 高等教育出版社, 1953

[18] 关肇直. 高等数学教程. 北京: 高等教育出版社, 1959

[19] 国际最佳数学征解问题分析. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1983

[20] Halmos P R. How to write mathematics. L'Enseignement mathématique, 1970, 14: 123～152

[21] 郝柏林. 从抛物线谈起. 上海: 上海科技教育出版社, 1993

[22] 哈代, 李特伍德, 波利亚. 不等式. 北京: 科学出版社, 1965

[23] 侯世达. 哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成. 北京: 商务印书馆, 1996

[24] 胡雁军, 李育生, 邓聚成. 数学分析中的证明方法与难题选解. 郑州: 河南大学出版社, 1987

[25] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1991

[26] 华罗庚. 高等数学引论. 北京: 科学出版社, 1963

[27] 吉米多维奇. 数学分析习题集. 北京: 人民教育出版社, 1958

[28] 克莱鲍尔. 分析中的问题与命题. 长沙: 湖南师范学院学报, 1984

[29] 克莱因. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 1979

[30] 匡继昌. 常用不等式. 长沙: 湖南教育出版社, 1989

[31] 邝荣雨, 杨新华, 林莉. 数学分析习题集. 北京: 教育科学出版社, 1997

[32] Larson L C. Problem-Solving through Problems. New York: Springer, 1985

[33] 李成章, 黄玉民. 数学分析. 北京: 科学出版社, 1999

[34] Li T-Y, Yorke J A. Period three implies chaos. Am. Math. Monthly, 1975, 82: 985～992

[35] 李文林. 数学珍宝——历史文献精选. 北京: 科学出版社, 1998

[36] 刘玉琏, 傅沛仁. 数学分析讲义. 北京: 高等教育出版社, 1985
[37] 李世金, 赵洁. 数学分析方法 600 例. 长春: 东北师范大学出版社, 1992
[38] 卢侃, 孙建华, 欧阳容百等. 混沌动力学. 上海: 上海远东出版社, 1990.
[39] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 1976, 261: 459~467.
[40] 米尔诺. 从微分观点看拓扑. 上海: 上海科学技术出版社, 1983
[41] 沐定夷. 数学分析. 上海: 交通大学出版社, 1993
[42] 欧阳光中, 姚允龙. 数学分析. 上海: 复旦大学出版社, 1993
[43] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 北京: 高等教育出版社, 1993
[44] 波利亚. 怎样解题. 北京: 科学出版社, 1982
[45] 波利亚. 数学与猜想. 北京: 科学出版社, 1984
[46] 波利亚. 数学的发现. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1979
[47] 波利亚, 舍贵. 数学分析中的问题和定理. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
[48] 钱昌本. 高等数学解题过程的分析和研究. 北京: 科学出版社, 1999
[49] 秦曾复, 朱学炎. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1991
[50] 卢丁. 数学分析原理. 北京: 人民教育出版社, 1979
[51] Saunders P T. An Introduction to Catastrophe Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1980
[52] 沈燮昌, 邵品琮. 数学分析纵横谈. 北京: 北京大学出版社, 1991
[53] 沈燮昌, 方企勤, 廖可人等. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1986
[54] 斯皮瓦克. 微积分. 北京: 人民教育出版社, 1980
[55] 孙本旺, 汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1981
[56] 汪林, 戴正德, 杨富春等. 数学分析问题研究与评注. 北京: 科学出版社, 1995
[57] 谢邦杰. 超穷数与超穷归纳法. 长春: 吉林人民出版社, 1979
[58] 薛宗慈, 曾昭著, 邝荣雨等. 数学分析习作课讲义. 北京: 北京师范大学出版社, 1985
[59] 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 北京: 商务印书馆, 1955
[60] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 1983
[61] 杨宗磐. 数学分析入门. 北京: 科学出版社, 1958
[62] 张元德, 宋烈侠. 高等数学辅导三十讲. 北京: 清华大学出版社, 1988
[63] 张志军. 数学分析中的一些新思想与新方法. 兰州: 兰州大学出版社, 1998
[64] 张筑生. 数学分析新讲. 北京: 北京大学出版社, 1990
[65] 赵显曾. 高等微积分. 北京: 高等教育出版社, 1991
[66] 郑英元, 毛羽辉, 宋国栋. 数学分析习题课教程. 北京: 高等教育出版社, 1991
[67] 周家云, 刘一鸣, 解际太. 数学分析的方法. 济南: 山东教育出版社, 1991
[68] 卓里奇. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1987
[69] 邹应. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1995
[70] 邹应. 数学分析习题及其解答. 武汉: 武汉大学出版社, 2001

中文名词索引 (汉语拼音字母序)

外文名词索引 (拉丁字母序)

数学分析习题课讲义

（下册）

谢惠民　恽自求
易法槐　钱定边　编

高等教育出版社


ISBN 7-04-012941-8
9 787040 129410 >
定价 30.00 元

数学分析习题课讲义

（下　册）

谢惠民 恽自求
易法槐 钱定边　编



内容简介

本书是教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”的研究成果，其目的是为数学分析的习题课教学提供一套具有创新特色的教材和参考书.

本书以编著者们近20年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础，吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果，非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸，在例题的讲题中强调启发式和逐步深入，在习题的选取中致力于对传统内容的更新、补充与层次化.

本书分上、下两册出版.上册内容为极限理论和一元微积分，下册内容为无穷级数和多元微积分.

本书可作为高等院校理工科教师和学生在数学分析习题课方面的教材或参考书，也可以作为研究生入学考试和其他人员的数学分析辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课讲义. 下册/谢惠民等编. —北京：高等教育出版社，2004.1

ISBN 7-04-012941-8

Ⅰ.数… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第113175号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年1月第1版
印　　张	26.25	印　　次	2004年7月第2次印刷
字　　数	490 000	定　　价	30.00元

策划编辑　王　瑜
责任编辑　薛春玲
封面设计　于　涛
责任印制　宋克学

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089　64054601　64054588

附: 下册内容简介

下册的前四章为无穷级数, 后十章为多元微积分. 下面将介绍各章的部分内容. 还请使用书末的两个索引, 从中可查到在目录中不易找到的许多材料.

第十三章为数项级数. 从数学史上的 4 个例子引进无穷级数. 在正项级数中介绍了用级数来判定单调数列是否收敛于 0 的 Sapagof 判别法. 研究了二项式系数 $\binom{\alpha}{n}$ 的渐近性态. 利用无穷乘积证明了正弦函数的无穷乘积展开式, 引进 Γ 函数的无穷乘积定义.

第十四章为函数项级数和幂级数. 对三分法作了详细分析. 介绍了准一致收敛性和 Arzela 控制收敛定理的 Lewin 证明. 证明了每个幂级数一定是 Taylor 级数, 还介绍了正弦和余弦函数之外的基本三角函数的幂级数展开式.

第十五章为 Fourier 级数. §15.1 节为系数的性质. §15.2 节为 Fourier 级数的各种收敛性, 其中包括点收敛、在 Cesàro 意义下的收敛、平方平均收敛与一致收敛, 讨论了 Gibbs 现象, 以及系数单调的正弦级数为 Fourier 级数的充要条件.

第十六章介绍无穷级数的几个应用. 前两节是在积分计算与级数求和中的应用, 其中求出 $\zeta(2n)$ 的值, 并得到 Bernoulli 数的几个性质. §16.3 节集中于 Weierstrass 逼近定理的证明方法及其应用. 介绍了奇异积分方法、Bernstein 证明和 Cohen 证明. §16.4 节是用无穷级数构造具有某些特殊性质的函数.

第十七章为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集与实数基本定理的推广. 特别介绍了连通和道路连通的概念, 证明了区域必是道路连通的. 在 §17.2 节介绍 $\mathbf{R}^n$ 中的基本定理, 其中把闭区间套定理推广成比较方便的闭集套定理的形式.

第十八章为多元函数的极限与连续. 除通常对重极限与累次极限的一些讨论外介绍了多元函数连续的若干充分条件, 以集合语言刻画连续性的命题, 紧集上的连续函数性质及其应用, 以及向量值函数的压缩映射原理. 还以参考题的形式介绍了 Peano 曲线和 Tietze 扩张定理.

第十九章为偏导数与全微分. §19.3 节是求多元函数偏导数的链式法则. 在 §19.4 节介绍向量值函数的有限增量公式和拟微分平均值定理.

第二十章为隐函数存在定理与隐函数求导. 在 §20.2 节用压缩映射原理证明了局部逆映射存在定理. 在 §20.3 节对变量代换问题作了系统的讨论. 在 §20.4 节介绍隐函数 (组) 的整体存在性, 包括整体同胚的一些充分条件和充要条件.

第二十一章为偏导数在各个方面的应用. 在 §21.3 节用向量与矩阵语言重新叙述了 Taylor 公式, 并讨论了梯度为零向量时函数的最快增长方向问题 (第二组参考题 1). 在 §21.4 节对条件最值的求解作了系统与详细的讨论, 并收集了丰富的习题. 在 §21.5 节介绍了高维的 Rolle 定理, 这个材料引自**美国数学月刊**上的

论文, 可以作为多元微分学应用的一个有趣的例子.

第二十二章为重积分. 在二重积分中引入了平面上零面积集和零测度集的概念, 给出了 Riemann 可积的充要条件. 在重积分的应用中着重介绍了微元法、带重积分的不等式和重积分在不等式证明中的应用.

第二十三章为含参变量积分. 对于如何证明含参变量广义积分一致收敛或不一致收敛给出了一个总结. 在 §23.3 节中介绍了重要的特殊函数: B 函数和 Γ 函数, 对于 Γ 函数还证明了 Bohr-Mollerup 定理和其他几个重要公式.

第二十四章为曲线积分 (含 Green 公式). 在 §24.2 节中介绍梯度曲线的方法, 以此改进了一道美国大学 Putnam 竞赛题的结果, 并证明高维中值定理. 在 §24.3 节中利用 Green 公式证明了著名的等周不等式. 在 §24.4 节中介绍了连续向量场的旋转度并用之证明 Brouwer 不动点定理与代数基本定理.

第二十五章为曲面积分 (含 Gauss 公式与 Stokes 公式). 在 §25.4 节中介绍了一些外微分的知识. §25.5 节是一个完整的习题课教案, 其中证明了第一型曲面积分在正交变换下的不变性; 分析了用参数方程计算第二型曲面积分时积分号前正负号的选取法则; 证明了在球面上曲面积分的关系式 (25.28).

第二十六章为场论初步. 引入散度、旋度和 Laplace 算子, 分析了各种场之间的关系. 对调和函数作了一点初步的介绍. 本章是多元积分的综合应用, 另一方面也为进一步学习数学物理方程等课程作一些数学分析方面的准备工作.

附: 书中常用记号

为读者方便起见, 将下册中常用记号列举如下 (参见上册 §1.2 节):

1. $\mathbf{N}_+$ 是所有正整数所成的集合.
2. $\mathbf{R}$ 是所有实数所成的集合, 同时也表示区间 $(-\infty,+\infty)$.
3. $\Longleftrightarrow$ 是等价关系的记号.
4. $[x]$ 是实数 x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数.
5. □ 表示一个证明或解的结束.
6. $\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
7. 记号 $\approx$ 表示近似值, 例如 $\pi \approx 3.141\,592$.
8. 复合函数 $f(g(x))$ 也写成 $(f\circ g)(x)$.
9. 若 A 和 B 为两个集合, 则用记号 $A-B$ 或 $A\setminus B$ 表示 A 与 B 的差集, 即集合 $\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.
10. 用 $O_\delta(a)$ 或 $U_\delta(a)$ 表示以 a 为中心, 以 $\delta>0$ 为半径的邻域. 在一维情况它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 如不必指出半径, 则可简记为 $O(a)$ 或 $U(a)$.

目　录

第十三章 数项级数

本章是无穷级数理论的第一章. 在 §13.1 节中从无限项求和、部分和数列和广义积分三个角度对无穷级数的基本概念作综述. 在 §13.2 节和 §13.3 节中讲述正项级数和一般项级数的判别法与性质. §13.4 节用于介绍无穷乘积. 最后一节是学习要点和参考题. (有关级数求和的问题将在 §16.2 节集中讨论.)

§13.1 无穷级数的基本概念

13.1.1 无穷级数的多种视角

可以从几个不同角度来理解无穷级数的概念.

一、首先, 无穷级数是有限项求和的直接推广. 下面是数学发展史上的几个重要例子, 其中都涉及无穷级数问题 (参见 [30]).

例题 13.1.1 我国古代重要典籍《庄子》(约公元前 300 年) 一书中有 "**一尺之棰, 日取其半, 万世不竭**". 从数学上看, 这与下列无穷项求和有密切联系:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

例题 13.1.2 古希腊伊利亚学派的 Zeno 提出过 4 个著名的悖论, 其中的 Achilles[①] 悖论是: Achilles 永远追不上在他前面的一只乌龟, 因为 Achilles 必须首先跑到乌龟的出发点, 而在这段时间中乌龟又已经向前爬过一段距离, 因此仍然在 Archilles 的前面, 这种情况会无休止地继续下去.

若将上面提到的时间记为 t_1, 并继续下去, 问题就变成了计算 $t_1 + t_2 + \cdots$ 的和. 这是一个无穷级数求和问题. 虽然谁都知道 Achilles 一定会赶上乌龟, 而且不难直接计算出所需要的时间, 但是为了驳倒 Zeno 的说法, 就需要有关于无穷级数的概念和工具, 这超出了当时希腊数学的水平 (见下一小节的思考题 1).

例题 13.1.3 古希腊数学家 Archimedes 求得抛物线弓形的面积是同底同高的三角形面积乘以因子 $\frac{4}{3}$. 如图 13.1 所示, 其中作出了经过点 A, B, C 的抛物线弓形和对应的三角形. 由于过抛物线上点 A 的切线平行于直线段 BC, 因此它们符合同底 (BC) 同高 (AD) 的条件. 从图中可以看出在抛物线弓形中去掉上述三角形之后又得到两个较小的抛物线弓形, 于是又可以作出与它们分别同底同

---

① Achilles (阿基里斯) 是荷马史诗《伊利亚特》中的希腊名将, 以快跑著称, 在文中被称为 The great runner. 用无穷级数工具来解决 Zeno 悖论的想法最早来自 Gregory (1647).

高的两个三角形. Archimedes 证明它们的面积之和是第一个三角形面积的 $\frac{1}{4}$，而且这个过程可以无限继续. 因此就出现了无穷级数的求和问题:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}. \tag{13.1}$$

由于当时没有无穷级数的概念和极限理论, Archimedes 在论证中只能使用 Eudoxus 的穷竭法, 否则证明可以简单得多.

例题 13.1.4 我国魏晋时代的数学家刘徽提出用“割圆术”来计算圆周率. 他的方法是从计算圆的内接正六边形的面积出发, 然后将内接正多边形的边数成倍增加, 将每次增加的小三角形的面积累加, 以得到越来越精确的圆面积值, 从而求出圆周率 π 的近似值. 刘徽提出: “**割之弥细, 所失弥少, 割之又割以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣.**” 这就是说圆面积是一个无穷级数之和 (本题的分析将在本小节末完成).

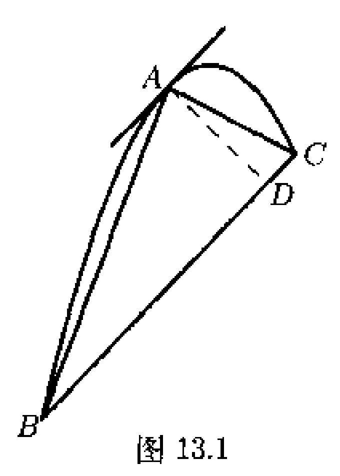


图 13.1

二、其次, 对数列的研究就会导致无穷级数. 在上册中我们已经有意识地这样做了. 在 2.2.3 小节末的注解中 (上册 24～25 页) 引入了**无穷级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{13.2}$$

的基本概念, 其中包括**通项** a_n, **部分和数列** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $n=1,2,\cdots$. 当部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛时, 称无穷级数 (13.2) **收敛**, 否则称 (13.2) **发散**. 当无穷级数 (13.2) 收敛时, 称极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为无穷级数 (13.2) 的**和**, 并记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=S.$$

此外, 对于 S 为无穷大量, 即部分和数列 $\{S_n\}$ 有广义极限的情况, 也写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. 为简明起见, 常将无穷级数简称为**级数**, 有时还将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 简记为 $\sum a_n$.

对收敛级数来说, 还需要有余项概念. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 对每个 n 均收敛. 将它的和 R_n 称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个**余项**. 若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列记为 $\{S_n\}$, 记级数的和为 S, 则就有 $R_n=S-S_n$, 因此作为数列的余项 $\{R_n\}$ 一定是无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

由级数的定义可见, 从给定的数列 $\{a_n\}$ 出发可以构造一个级数

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n), \tag{13.3}$$

使得二者同时收敛或发散. 当它们收敛时, 级数 (13.3) 的和 S 就等于数列的极限: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$. 今后将会看到, 对于给定的数列构造级数 (13.3) 是研究数列以及计算其极限的一种有用方法.

由于级数与数列的上述联系, 关于级数的不少性质可以从数列的性质直接推出. 首先是级数收敛的必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛 } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{13.4}$$

其证明见例题 2.2.9. 同时在那里已经指出, 这不是级数收敛的充分条件.

由数列的 Cauchy 收敛准则 (见 §3.4) 就得到**级数的 Cauchy 收敛准则**: 级数 $\sum a_n$ 收敛的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对满足条件 $n > N$ 的正整数和每个正整数 p, 成立不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{13.5}$$

注意: 若于 (13.5) 中令 $p = 1$, 就得到收敛级数的必要条件 (13.4). 此外, 例题 3.4.1 和 3.4.2 就是这个收敛准则在无穷级数上的应用.

若级数 $\sum a_n$ 的每一项同号, 则称该级数为**同号级数**. 习惯上称非负项级数为**正项级数**. 显然对同号级数只需研究正项级数就够了. 对于正项级数, 其部分和数列为单调增加数列, 因此就知道: **正项级数收敛的充分必要条件**是其部分和数列有上界.

在上册的内容中已经介绍了几个重要的正项级数. 例如, 已经用多种方法证明**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散 (见例题 2.2.6, 3.4.2), 关于 p 次幂的调和级数 (简称为 **p 级数**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性结论: 当 $p \leqslant 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛 (见 2.2.4 小节的题 10 和 2.3.2 小节的题 6). 在命题 2.5.2 中得到了自然对数的底 e 的无穷级数表示 (命题 2.5.2), 并将它用于 e 的近似计算与无理性证明中.

三、对无穷级数的第三个视角是将它与第十二章的广义积分作比较. 例如, 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷限广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的基本概念之间, 存在**离散** $\leftrightarrow$ **连续**的对应关系: $n \leftrightarrow x$, $a_n \leftrightarrow f(x)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leftrightarrow \displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \leftrightarrow \displaystyle\int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

在敛散性判别方面级数理论为广义积分提供了以下两个工具:

命题 13.1.1 设 f 于 $[a, +\infty)$ 上内闭可积, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于发散于正无穷大的每个数列 $\{A_n\} \subset [a, +\infty)$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0=a$.

命题 13.1.2 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积且不变号, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 存在发散于正无穷大的严格单调增加数列 $\{A_n\}\subset[a,+\infty)$, 使同号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0=a$.

注 在例题 12.2.5 中实际上已经用了这个命题. 又已在 12.4.1 小节中指出, 无穷级数的性质 (13.4) 在广义积分中没有简单的平行结果.

现在用级数概念来完成对刘徽割圆术的分析.

例题 13.1.4 (**续**) 考虑刘徽对半径为 1 的圆面积计算. 从内接正 6 边形开始, 每次边数加倍, 第 n 次的正多边形边数为 $6\cdot 2^{n-1}$, 其面积为

$$S_n=3\cdot 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

从 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$ 可见

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pi.$$

以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的无穷级数是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n=S_n-S_{n-1}$ (设 $S_0=0$). 刘徽的方法就是将 a_n 累加以得到级数和 π 的近似值. 在图 13.2 中的正六边形的面积为 $S_1=a_1$, 而在其每条边上的 6 个小三角形面积之和就是 $a_2=S_2-S_1$.

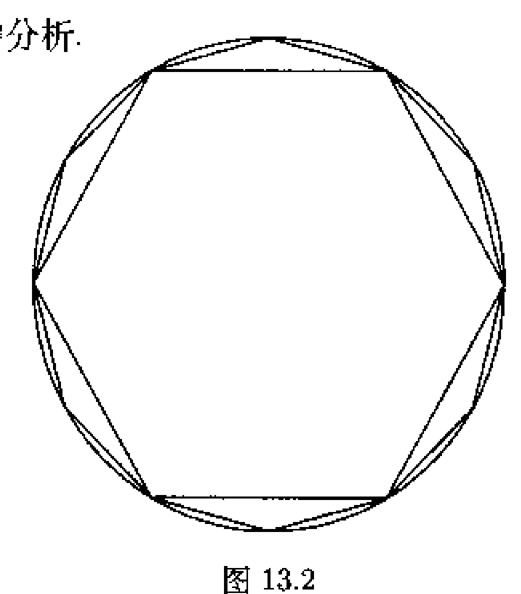


图 13.2

现在分析级数通项的渐近性态: 为方便起见令 $x_n=3\cdot 2^{n-1}$, 则有

$$\begin{aligned}a_n=S_n-S_{n-1}&=x_n\left(\sin\frac{\pi}{x_n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x_n}\right)\\&=x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\left(1-\cos\frac{\pi}{x_n}\right)\\&\sim\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{1}{x_n^2}=\frac{2\pi^3}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n,\end{aligned}\tag{13.6}$$

因此刘徽的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在渐近性态上相当于公比为 $\frac{1}{4}$ 的几何级数.

类似地可以分析每次计算后的误差, 这就是级数的余项:

$$\varepsilon_n=S-S_n=\pi\left(1-\frac{\sin\frac{\pi}{x_n}}{\frac{\pi}{x_n}}\right)\sim\frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{x_n^2}.\tag{13.7}$$

由这些分析已可得到有用的结论. 首先, 从 (13.7) 知道 $\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{4}\varepsilon_n$, 这与上册 265~266 页的分析可谓异曲同工. 其次, 比较 (13.6) 和 (13.7) 可以知道

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{3}a_n. \tag{13.8}$$

从而就可以建立外推公式

$$\pi \approx S_n + \frac{1}{3}(S_n - S_{n-1}) = S_{n-1} + \frac{4}{3}(S_n - S_{n-1}). \tag{13.9}$$

例如根据参考文献 [4] 中的第 48 页, 仿照刘徽计算出 96 边形和 192 边形的面积:

$$S_5 \approx 3.139\,350\,203,\ S_6 \approx 3.141\,031\,951,$$

然后用 (13.9) 就可以得到有显著改进的结果:

$$\pi \approx S_6 + \frac{1}{3}(S_6 - S_5) \approx 3.141\,592\,534.$$

从 [4] 还知道, 刘徽在这一步也用了某种外推法, 但究竟是什么方法则仍是中国数学史上的一个悬案 ① (关于外推法可以参看 [13]). □

13.1.2 思考题

这一小节的思考题主要用于对级数定义进行复习, 对于其中的是非题, 若回答 "是", 则要作出证明, 若回答 "不是", 则要举出反例.

1. (例题 13.1.2 之续) 设比赛开始时, 乌龟在 Archilles 之前 1 000 m, Archilles 的速度为 10 m/s, 乌龟的爬行速度为 0.1 m/s. 试将 Zeno 悖论中的论点转化为无穷级数求和问题, 并计算出 Archilles 赶上乌龟所需要的时间. (本题说明, 有了无穷级数的工具之后, Zeno 的这个悖论就不再是悖论了.)
2. 设级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛 (或发散), 讨论以下级数的敛散性:
$$\sum(a_n \pm b_n),\ \sum a_nb_n,\ \sum \frac{a_n}{b_n}(b_n \neq 0),$$
又对于 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均为正项级数情况讨论同样的问题.
3. 对于级数 $\sum \max\{a_n, b_n\}$, $\sum \min\{a_n, b_n\}$ 继续上题的讨论.
4. 如果级数 $\sum(a_n + a_{n+1})$ 收敛, 是否必可推出 $\sum a_n$ 收敛? 又在 $\sum a_n$ 是正项级数时, 答案又是什么?
5. 记 $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, 并作以下计算:
$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S \Longrightarrow S = \frac{1}{2},$$
问: 其中有何错误? 又请阅读第二组参考题 18 后再做此题.
6. 讨论级数 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + \cdots$ 的敛散性.

---

① 根据 [4] 的第 48 页, 刘徽计算的是 100π 的近似值. 他得到的 $S_5 = 313\frac{584}{625}$, $S_6 = 314\frac{64}{625}$, $S_6 - S_5 = \frac{105}{625}$, 因此按照 (13.8) 的修正量为 $\frac{35}{625}$, 而刘徽实际所用的修正量为 $\frac{36}{625}$, 从而得到 $100\pi \approx 314\frac{100}{625} = 314.16$.

7. 如果对每个正整数 p, 均成立

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

问: 是否能由此推出级数 $\sum a_n$ 一定收敛?

8. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 若已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛 (或发散), 问: 能否推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛 (或发散)? 并请将你的结论与数列的夹逼定理 (见上册 20 页) 作比较.

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于和 S, 若对于每个 n, 将 a_{2n-1} 和 a_{2n} 两项作交换, 证明所得的新级数收敛, 并求其和.

10. 设有收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 且对于每个正整数 n 成立 $a_n\leqslant a_nR_n$, 其中 R_n 为第 n 个余项, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 实际上是有限和.

§13.2 正项级数

从本节开始我们将主要关注级数的敛散性判别法. 如果能够判定一个级数收敛, 则原则上至少可以用数值方法来计算级数和的近似值. 关于级数求和的内容则在 §16.2 节中讨论.

正项级数的敛散性一般只需要从其部分和数列是否有界就可以解决, 在这方面已经得到了许多丰富的成果. 以下的前两个小节分别介绍比较判别法的一般形式和特殊形式, 然后在 13.2.3 小节介绍 Cauchy 积分判别法、Cauchy 凝聚判别法、Sapagof 判别法和 Kummer 判别法.

13.2.1 比较判别法的一般形式

首先列出比较判别法的几种常用形式, 它们的证明见教科书.

比较判别法的基本形式: 设正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的通项之间满足条件 $a_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 则就有以下结论:

$$(1)\quad \sum b_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum a_n \text{ 收敛}; \tag{13.10}$$

$$(2)\quad \sum a_n \text{ 发散} \Longrightarrow \sum b_n \text{ 发散}. \tag{13.11}$$

注意其中关于两个级数通项之间的不等式关系只需要对充分大的 n 成立即可.

我们称 (13.10) 中的 $\sum b_n$ 与 (13.11) 中的 $\sum a_n$ 为**比较级数**. 一般常用的比较级数如

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$$

等等. 在使用比较判别法时经常需要知道以下 "级别" 关系 (参见 2.7.1 小节):

$$\ln n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

比较判别法的极限形式: 若对于正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 存在 (广义) 极限

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}, \tag{13.12}$$

则当 $0<c<+\infty$ 时正项级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同敛散, 当 $c=0$ 时可以从 $\sum a_n$ 收敛推出 $\sum b_n$ 收敛, 或从 $\sum b_n$ 发散推出 $\sum a_n$ 发散, 当 $c=+\infty$ 时有相反的结论.

比较判别法的极限形式表明, 研究级数 $\sum a_n$ 的通项所成的数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的渐近性态往往是值得做的分析工作, 其中包括通项 $\{a_n\}$ 是否是无穷小量的初步观察, 如果不是, 则已经可以断定该级数发散. 对于上面 $0<c<+\infty$ 的情况, 可以称为**等价量判别法**.

比较判别法的比值形式: 设对于正项级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 的通项当 n 充分大时成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{13.13}$$

则结论 (13.10) 与 (13.11) 成立.

在下一小节会看到, 从 d'Alembert 判别法开始的许多判别法都是在取定某个 $\sum b_n$ 之后从 (13.13) 导出的比较判别法的特殊形式.

13.2.2 比较判别法的特殊形式

上一小节中的比较判别法有一个共同点, 就是都需要有比较级数. 如何对于给定的级数去寻找合适的比较级数往往是一个难题[①].

一种新的思维方法是 "守株待兔": 取定比较级数以导出简单易用的判别法. 例如, 一般教科书中的 Cauchy 根值判别法和 d'Alembert 比值判别法就是如此. 它们都是用几何级数作为比较级数. 区别在于, Cauchy 根值判别法是从 (13.10) 和 (13.11) 出发两边开 n 次根得到, 而 d'Alembert 比值判别法则从比值形式 (13.13) 推出. 由于教科书中都有它们的介绍和比较, 此处从略.

不难看出, 这样得到的每一种判别法的能力必定有限, 其适用范围为所取的比较级数所限定. 例如, p 级数的敛散性就不可能用 Cauchy 根值判别法或 d'Alember 比值判别法来进行判定. 利用数列收敛和发散的快慢概念, 就很容易理解这种现象. (参见 2.7.1 小节关于无穷大量的 "级别" 概念, §4.4 中关于无穷小量和无穷大量的比较, 以及 8.7.1 小节中关于收敛速度的讨论.)

① 这里的第一个困难在于, 由于事先不知道一个级数究竟是收敛还是发散, 因此事先不知道是按照 (13.10) 还是 (13.11) 去寻找比较级数. 这在原则上只能通过尝试和摸索来解决.

具体来说, 采用 p 级数作为比较级数就得到 Raabe 判别法, 采用 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$ 作为比较级数就得到 Bertrand 判别法和 Gauss 判别法. 它们的证明都可以从 [19] 等书中找到, 此外还有许多更为细致的讨论和发展可以参考 [52] 和其中的文献.

现在我们将上述几种判别法的使用方法列表如下. 这里要注意, 每种判别法都有多种不同形式, 为简明起见, 这里只列出较易使用的形式. 以下设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 表中第一列为判别法名称, 第二列为计算量, 第三列为用法.

Cauchy 根值判别法:	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=c$,	$c<1$ 时级数收敛, $c>1$ 时级数发散;
d'Alembert 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=d$,	$d<1$ 时级数收敛, $d>1$ 时级数发散;
Raabe 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$,	$r>1$ 时级数收敛, $r<1$ 时级数发散;
Bertrand 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=b$,	$b>1$ 时级数收敛, $b<1$ 时级数发散;
Gauss 判别法:	$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{\mu}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\varepsilon>0$,	$\mu>1$ 时级数收敛, $\mu\leqslant 1$ 时级数发散.

注 1 表中除 Cauchy 根值判别法外, 所列出的判别法都基于对比值 a_{n+1}/a_n (或 a_n/a_{n+1}) 的分析, 因此都可以称为**比值判别法**. 在 Gauss 判别法中的 $\mu=1$ 时级数发散的结论可从 Bertrand 判别法得到. 此外, 若再考虑

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p},\ \sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n(\ln\ln\ln n)^p},\cdots \tag{13.14}$$

等比较级数, 就可以得到更为精细的判别法, 统称为 Bertrand 判别法 (见 [62]).

注 2 容易发现本小节列举的所有判别法中, 除了 Cauchy 根值判别法之外, 都只能用于 $\{a_n\}$ 为单调的情况, 至少当 n 充分大时必须单调, 否则就不可能成功. 在这个意义上可以说, 它们都是**通项单调减少的正项级数判别法**. 正因为如此, 虽然 Cauchy 根值判别法只是以几何级数为比较级数得到的判别法, 能力有限, 但是它的适用范围不能为表中任何其他判别法所完全覆盖. 一个典型例子是以 $a_n=2^{-n-(-1)^n}$ 为通项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数}, \\ 2, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ 知可用 Cauchy 根值判别法, 但比值判别法都不行.

注 3 在这方面还应当提到各种形式的**对数判别法**. 这里只举出两种对数判别法的极限形式 (此外还有非极限形式和上、下极限形式):

1. 若对正项级数 $\sum a_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = r', \tag{13.15}$$

则当 $r' > 1$ 时级数收敛, 而当 $r' < 1$ 时级数发散.

2. 若对正项级数 $\sum a_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/(na_n))}{\ln\ln n} = b', \tag{13.16}$$

则当 $b' > 1$ 时级数收敛, 而当 $b' < 1$ 时级数发散.

这两种判别法与 Raabe 判别法和 Bertrand 判别法的关系恰如 Cauchy 根值判别法与 d'Alembert 判别法那样, 即当后者有效时前者一定有效 (见本节练习题 12), 但反之不成立 (参见 [52]). 与根值判别法相同的是, 对数判别法不依赖于级数中的比值 a_{n+1}/a_n, 因此对于通项不是单调的正项级数仍然可能有效.

13.2.3 其他判别法

对正项级数来说, 除了上面介绍的几个判别法之外, 其他判别法还有很多. 本小节中只列举其中的几种判别法, 它们都含有新的思想. 此外, 最后还讨论了比较级数中的一个理论问题.

首先应当指出, 建立在广义积分基础上的 Cauchy 积分判别法是非常有用的. 它不依赖于比较级数. 例如在 (13.14) 中的级数的敛散性都可以用它得到解决, 但是不能用前面的那些判别法来判定.

命题 13.2.1 (Cauchy 积分判别法) 设 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷限广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

注 积分判别法只是面积原理的一个应用 (见上册 371 页), 证明从略. 希望初学者要学习这种面积比较方法, 它可以解决不少问题.

命题 13.2.2 (Cauchy 凝聚判别法) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数散列, 则正项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: 凝聚项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

收敛.

证 由于该正项级数的通项单调减少, 因此不等式

$$2^{k-1}a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k} \leqslant 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$$

对 $k \geqslant 1$ 成立. 注意不等式中间部分恰有 2^{k-1} 项. 取 k 从 1 到 n 并相加, 即可得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \leqslant a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k},$$

可见原来的级数的部分和与凝聚项级数的部分和同时有界或无界. □

注 这里也不需要比较级数, 建议读者对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$ 和 (13.14) 中的级数用 Cauchy 凝聚判别法一试.

讨论一个数列 $\{a_n\}$ 是否收敛于 0 是数学分析中的基本问题之一, 具有多方面的应用. 无穷级数已经为此提供了一种方法, 这就是研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛, 若级数收敛, 则就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 容易理解这个方法不会很有效, 若级数发散就不能作出任何结论. 但是对于单调数列, 则有下面好得多的结果 (参见美国数学月刊 95 卷 (1988) 942 页).

命题 13.2.3 (Sapagof 判别法) 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证 将题中的级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 其中 $b_n = 1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$.

由于正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 因此有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 若 $a > 0$, 则 $b_n \leqslant \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 - a_n) = a_1 - a$, 可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 若 $a = 0$, 则有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}}.$$

对任意给定的 n, 利用 $a_n \to 0$ 的条件, 总可以取到充分大的 p, 使上式大于 $\dfrac{1}{2}$, 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

注 1 本命题有几种等价形式 (见 [19] 卷 2 的第 365 小节之 5)):

(1) 设 $\{a_n\}$ 为单调增加的正数数列, 则该数列与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散 (这种形式在各种教科书中出现最多);

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

注 2 应当指出, 在下一节的变号级数敛散性判别法中, 往往需要证明某个单调数列收敛于 0. 这时命题 13.2.3 就是一个有用的工具. 这样就可能将变号级数的敛散性判别问题归结为某个正项级数的敛散性判别问题, 而关于后者的方法要丰富得多. 此外, 还可以看出, 如数列极限理论中的例题 2.3.3 (上册 28 页) 这类经典性结果都可以看成为命题 13.2.3 的特例.

命题 13.2.4 (Kummer 判别法) (1) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是存在正数数列 $\{b_n\}$ 和正数 δ, 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant \delta > 0; \tag{13.17}$$

(2) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充分必要条件是存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$, 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0. \tag{13.18}$$

证 (1) 先证充分性. 不妨设条件 (13.17) 已对于 $n \geqslant 1$ 成立. 将它改写为 $0 < \delta a_{n+1} \leqslant b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1}$, 可见正数数列 $\{b_n a_n\}$ 单调减少, 因此有估计:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1}) \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \cdot b_1 a_1,$$

从而知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

再证必要性. 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时记其余项为 $R_n, n \geqslant 1$. 令 $b_n = \frac{R_n}{a_n}$, 则就有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

因此取 $\delta = 1$ 即可.

(2) 这时的充分性就是比较判别法的比值形式 (见 (13.13)). **再证必要性**. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 取 $b_n = \frac{S_n}{a_n}$, 其中 S_n 为级数的第 n 个部分和. 这时 (13.18) 满足:

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0.$$

从 $\frac{1}{b_n} = \frac{a_n}{S_n}$, 和命题 13.2.3 (注 1 之 (2)) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散. □

注 1 值得注意: Kummer 判别法中的 (1) 来自于正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列有上界, 而与比较判别法没有直接联系. (参见美国数学月刊 102 卷 (1995) 817～818 页中的历史观点.)

注 2 采取不同的 $\{b_n\}$, 就可以从 Kummer 判别法得到上一小节的各种比值判别法 (见 [19] 卷 2 的 362 小节). 关于 Kummer 判别法的必要性结果取自美国数学月刊 101 卷 (1994) 450～452 页.

在上一小节中已经提到, 由于存在收敛 (发散) 速度不同的正项级数, 因此用特定的比较级数得到的比较判别法的能力总是有限制的. 现在我们证明, 对于比较判别法而言, 不论是为了判定级数收敛, 还是发散, 都不可能存在什么**万能**的比较级数.

命题 13.2.5 (1) **(du Bois Reymond 定理)** 对于一个给定的收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个收敛正项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$;

(2) **(Abel 定理)** 对于一个给定的发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$.

证 (1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知, 余项 R_n 单调减少收敛于 0. 令 $b_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$[①], 其中记 $R_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 从

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \to 0$$

和 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_k} \leqslant \sqrt{R_0}$ 可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为满足要求的收敛级数.

(2) 令 $b_n = \dfrac{a_n}{S_n}$, 然后引用命题 13.2.3 (注 1 之 (2)) 即可. □

注 利用 §2.4 的 Stolz 定理, 可以如下解释本题的结果. 对于 (1), 分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的余项为 R_n 和 R'_n, $n = 1, 2, \cdots$, 则它们都是单调减少的无穷小量. 由条件 $b_n > 0$ 还知 $\{R'_n\}$ 严格单调减少. 利用命题 2.4.2 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理), 可见有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n - R_{n+1}}{R'_n - R'_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

从而 $R_n = o(R'_n)$. 这就是收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛速度比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收敛速度慢的严格表述.

对于 (2), 若分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和为 S_n 和 S'_n, $n = 1, 2, \cdots$, 则它们都是单调增加的正无穷大量, 而且 $\{S_n\}$ 还是严格单调增加的. 用命题 2.4.3 ($\dfrac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理) 就得到

$$S_n = o(S'_n), \text{ 也就是 } S'_n \ll S_n.$$

这就是作为正无穷大量的 S'_n 的发散速度慢于 S_n 的严格表述.

---

① 若 $\{R_n\}$ 从某项起为 0, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为有限和, 任何收敛正项级数都可以作为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 只要每个 $b_n > 0$.

13.2.4 例题

先介绍对 p 级数的敛散性证明, 它们与上册已有的证明不同. 其中第一个证明在方法论上很有价值.

例题 13.2.1 讨论 p 级数的敛散性.

证 1 对于 $p \leqslant 1$ 只需讨论 $p=1$, 即调和级数. 利用微分中值定理, 有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}<\frac{1}{n},$$

其中 $0<\theta<1$, 因此对调和级数的部分和有估计 (参见上册 43 页):

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(N+1)-\ln N)=\ln(N+1),$$

可见级数发散. 对于 $p>1$ 同样有

$$\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}=\frac{p-1}{(n+\theta)^p}>\frac{p-1}{(n+1)^p},$$

其中 $0<\theta<1$, 因此有估计

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}&<1+\frac{1}{p-1}\left[\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(N-1)^{p-1}}-\frac{1}{N^{p-1}}\right)\right]\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{N^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1},\end{aligned}$$

可见级数收敛. □

证 2 对于 $p \leqslant 1$ 只需证明 $p=1$ 时调和级数发散. 用反证法. 若调和级数收敛, 其和为 S, 则

$$\begin{aligned}S&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\frac{S}{2},\end{aligned}$$

因此得到

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots.$$

但从 $1>\frac{1}{2},\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n},\cdots$, 可见这不可能成立.

再讨论 $p>1$, 这时级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 满足条件 $S_{2N}<S_{2N+1}$ 以及

$$\begin{aligned}S_{2N+1}&=1+\left(\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2N)^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2N+1)^p}\right)\\&<1+2\left(\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2N)^p}\right)=1+2^{1-p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{N^p}\right)\\&<1+2^{1-p}S_{2N+1},\end{aligned}$$

因此部分和数列 $\{S_n\}$ 以 $1/(1-2^{1-p})$ 为上界, 可见级数收敛. □

注 证 2 见 Math. Magazine, 52 卷 (1979) 178 页.

下面是利用 p 级数为比较级数的几个例题.

例题 13.2.2 讨论下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}};\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};\qquad (3)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}.$$

解 只要知道对于任何两个正数 $a,b>0$ 均成立

$$a^{\ln b}=(\mathrm{e}^{\ln a})^{\ln b}=\mathrm{e}^{\ln a\ln b}=(\mathrm{e}^{\ln b})^{\ln a}=b^{\ln a},$$

就不难解决前两题. 在题 (1) 中, 利用 $3^{\ln n}=n^{\ln 3}$ 和 $\ln 3>1$, 可见这个级数本身就是 $p>1$ 的 p 级数, 因此收敛. 对于题 (2), 利用 $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\ln n}$ 和当 n 充分大时有 $n^{\ln\ln n}>n^2$, 就可用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 为比较级数而知其收敛. 类似地可以在题 (3) 中有 $(\ln n)^{\ln\ln n}=\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}<\mathrm{e}^{\ln n}=n$, 因此可从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的发散性知其发散. □

在下面的例子中用等价量判别法 (当然也可用其他比较判别法):

例题 13.2.3 讨论下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^k;\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{a}{n}\right)^n\ (a>0);\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

解 (1) 利用关于阶乘的 Wallis 公式知道有 $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}$ (即公式 (11.29)), 因此该级数的通项 a_n 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\pi n)^{k/2}}$ 的通项为等价无穷小量. 从而知道级数当 $k\leqslant 2$ 时发散, 而当 $k>2$ 时收敛.

(2) 根据 Stirling 公式 (11.32), 可见成立

$$a_n=n!\left(\frac{a}{n}\right)^n\sim\left(\frac{a}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}=b_n.$$

若 $a\geqslant\mathrm{e}$, 则可看出数列 $\{b_n\}$ 不是无穷小量, 因此级数 $\sum b_n$ 以及 $\sum a_n$ 均发散. 否则, 可以取 $r\in\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1\right)$, 并看出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=0,$$

因此从几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\ (0<r<1)$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) 利用 Taylor 公式即可得到

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(见上册 230 页例题 8.1.4 之解 2), 因此知级数发散. □

下面是应用 Sapagof 判别法的一个典型例题.

例题 13.2.4 问: 在什么条件下数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 其中

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ n = 1, 2, \cdots.$$

证 从定义可见, 若参数 α 为非负整数, 则数列至多只有前有限项不等于 0, 因此是无穷小量. 否则, 只需讨论 $\{|a_n|\}$. 从

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

可见当 $\alpha \leqslant -1$ 时有 $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$, 因此数列不可能趋于 0.

当 $\alpha > -1$ 时 $\{|a_n|\}$ 当 n 充分大时单调减少. 利用命题 13.2.3, 从

$$1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha+1}{n+1} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{n+1}$$

发散可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

下面是在例题 13.2.1 中引进的微分中值定理方法的又一个应用.

例题 13.2.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $\{S_n\}$ 为其部分和数列, $p > 1$, 证明: 无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与否, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^p}$ 总是收敛的.

证 这里的出发点是 $\dfrac{a_n}{S_n^p} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p}$. 设 $0 < a < b$, 对函数 x^{1-p} 在区间 $[a, b]$ 上用 Lagrange 微分中值定理, 可知存在 $a < \xi < b$, 值成立

$$\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1}} = \frac{(p-1)}{\xi^p} \cdot (b-a) > (p-1) \cdot \frac{b-a}{b^p}.$$

用 $a = S_{n-1}, b = S_n$ 代入, 得到不等式

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right).$$

由此可以作出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^p}$ 的部分和数列的上界估计:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} &= \frac{1}{a_1^{p-1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} < \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{S_{k-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_k^{p-1}}\right) \\ &< \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{a_1^{p-1}} = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{1}{a_1^{p-1}},\end{aligned}$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. □

注 以上证明对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛和发散情况都有数, 但可以看出, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记和为 S, 则 $\dfrac{a_n}{S_n^p} \sim \dfrac{a_n}{S^p}$, 因此本题的结论是平凡的.

下一个例题也很有意义.

例题 13.2.6 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也收敛.

证 从条件可见正数数列 $\{a_n\}$ 为正无穷大量. 以下分两步来做.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 则有

$$a_1+\cdots+a_{2n-1}\geqslant a_n+\cdots+a_{2n-1}\geqslant na_n,$$

因此有不等式:

$$\frac{2n-1}{a_1+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n},$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 的部分和数列有上界, 因此收敛. 同时还得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}. \tag{13.19}$$

(2) 对于一般情况, 将数列 $\{a_n\}$ 按照从小到大重排[①], 并将重排后的数列记为 $\{b_n\}$. 根据收敛的正项级数在重排后仍收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 收敛. 利用 (1) 知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 收敛. 同时容易看出对每个 n 成立不等式[②]

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n, \tag{13.20}$$

因此就有

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

于是从比较判别法就知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛. □

注 我们不知道不等式 (13.19) 右边的系数 4 是否可以减少, 若可以的话, 其最优值又是多少 (参见下一个例题).

可以看出上题中第二个级数的第 n 项是第一个级数的前 n 项的调和平均值. 根据调和平均值-几何平均值不等式 (见上册第 8 页 1.3.2 小节题 3), 可见本题是以下著名不等式的一个推论.

例题 13.2.7 (Carleman 不等式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数, 则成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

其中右边的系数 e 不能再改进.

① 为了实现这样的重排需要反复利用一个初等结论: 若数列为正无穷大量, 则数列中必有最小数. 这就是 2.2.4 小节中的练习题 6. 其证明可以参考上册 18 页例题 2.2.1.

② 由于 $b_1,\cdots,b_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 中按照从小到大的顺序重新排列的前 n 项, 因此它们的和不会大于任何其他 n 项之和, 其中包括 $a_1+\cdots+a_n$.

证 对部分和估计如下 (其中利用的不等式 $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n!$ 见上册 46 页):

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt[n]{(a_1)(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n\sqrt[n]{n!}}$$

$$\leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\mathrm{e}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

$$=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}ka_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)$$

$$\leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}a_k,$$

然后令 $N\to\infty$ 即可得到 Carleman 不等式. 最后, 对于每个 N 构造一个数列: $a_n=1/n,\ n=1,2,\cdots,N$, 而 $a_n=0\ \forall n>N$, 然后作出由 $\{a_n\}$ 得到的两个级数和之比, 令 $N\to\infty$, 且用 Stolz 定理 (即命题 2.4.3), 就有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N}a_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\sqrt[N]{N!}}=\mathrm{e}.$$

这表明不等式右边的系数 e 不能再改进. □

注 1 这里的 Carleman 不等式的证明来自 [27]. 此外还可以参见 [23, 39]. 在上述证明中的二重求和的顺序交换也可以利用裂项法改写为

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}ka_k+a_{n+1},$$

并对于 $n=1,2,\cdots,N$ 相加, 就得到同样的结果:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant a_1+\cdots+a_N.$$

注 2 与此有关的还有 Hardy 不等式, 其中当 $p>1$ 时为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{1/p}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

令 $p\to+\infty$ 就导出 Carleman 不等式.

13.2.5 练习题

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的通项为等价量: $a_n\sim b_n$, 又记两个级数的部分和为 S_n 和 S'_n, 余项为 R_n 和 R'_n, $n=1,2,\cdots$, 证明:

   (1) 若两个级数均收敛, 则 $R_n\sim R'_n$;

(2) 若两个级数均发散, 则 $S_n \sim S'_n$.

2. 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 证明: 任意改变其中各项的顺序和加括号后得到的级数与原来的级数具有相同的敛散性, 且在收敛时级数的和不变. (这表明, 如果无限项求和时每项为非负数, 或至多只有有限项为负数, 则有限项求和时的**结合律**和**交换律**对无限项求和都依然成立.)

3. 讨论下列各级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \dfrac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a,b,c>0)$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$.

4. 从例题 13.2.6 和 13.2.7 知道, 若从收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 作出 $\{u_n\}$, 其中 u_n 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均值或几何平均值, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 但是若 u_n 为算术平均值, 则情况大不一样. 证明: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则除了一种特殊情况之外, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 必定发散.

5. 试用 Sapagof 判别法 (即命题 13.2.3) 证明以下数列收敛于 0:

(1) $\left\{\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right\}$; (2) $\left\{\dfrac{n^n}{e^n n!}\right\}$; (3) $\left\{\dfrac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\right\}$ $(x>1)$.

6. 举出一个收敛的正项级数 $\sum a_n$ 的例子, 使它满足条件 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, na_n = 1$.

7. 已知正项级数 $\sum a_n$ 收敛, $p>1$, 证明: 级数 $\sum a_n^p$ 一定收敛. 又若去掉 $\sum a_n$ 为正项级数的条件, 结论是否还成立?

8. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0, 且 $b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛.

9. 设对于每个正整数 n 都有 $0 < a_n < a_{2n} + a_{2n+1}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10. 设 $x>0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 收敛.

11. 设 $x>0$, 讨论级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$$
的敛散性.

12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 证明:

(1) 若在 Raabe 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 存在, 则在对数判别法 (13.15) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 也存在, 且极限值相同;

(2) 若在 Bertrand 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]$ 存在, 则在对数判别法 (13.16) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/(na_n))}{\ln\ln n}$ 也存在, 且极限值相同.

13. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, k 为一正整数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+k}}{a_n}=l$, 证明: $l<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; $l>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(本题如取 $k=1$, 就是 d'Alembert 判别法. 因此, 本题可看作为 d'Alembert 判别法的一个推广.)

14. (Dini) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 其余项为 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$, $n=0,1,\cdots$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散, 但对任意 $p>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}$ 收敛.

15. 设 $0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$, 然后用迭代公式 $a_n=\sin a_{n-1}$ 生成数列 $\{a_n\}$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 的敛散性 (参考上册 233 页的例题 8.1.10).

§13.3 一般项级数

本节研究一般项级数, 即在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中既有无限多个正项, 又有无限多个负项的情况, 称这样的级数为**变号级数**. 对于其他情况则可以归之于正项级数的范畴去解决.

这里需要强调指出绝对收敛级数与条件收敛级数的区别. 从敛散性来看, 前者的收敛性可以用正项级数的各种判别法来判定. 而后者则需要全新的判别法. 从级数的一系列性质来看, 二者均有极大的不同. 粗略地说, 前者与有限和相似, 而后者则完全不同.

13.3.1 一般项级数的敛散性判别法

称收敛级数 $\sum a_n$ 为**绝对收敛级数**, 若 $\sum |a_n|$ 也收敛; 否则就称为**条件收敛级数**. 用 Cauchy 收敛准则就可以得到这里的基本结论:

命题 13.3.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定收敛.

由此可知, 在研究变号级数 $\sum a_n$ 的敛散性时, 可以先分析对应的正项级数 $\sum |a_n|$ 的敛散性. 对后者来说可以用正项级数的各种判别法. 若 $\sum |a_n|$ 收敛, 则原来的级数 $\sum a_n$ 的收敛性就已经解决. 若 $\sum |a_n|$ 发散, 则 $\sum a_n$ 的敛散性有两种可能: 条件收敛或发散. 这时上一节中以比较判别法为基础的各种判别法都不能奏效. 其中的例外是导致发散结论的 Cauchy 根值判别法和 d'Alembert 判别法. 这就是说, 在对于 $\sum |a_n|$ 用这两种判别法时, 若有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, 则可以肯定原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 其原因在于这两种判别法背后的比较级数是 (正项) 几何级数, 它在公比大于 1 时的级数通项不收敛于 0, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是等价的, 因此它们的反面也等价.

变号级数中最基本的例子就是在上册 54 页例题 2.7.3 中的无穷级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \ln 2.$$

其求和计算见上册 45 页的例题 2.5.4 和 361 页的例题 11.4.1.

在一般项级数的敛散性判别法中除了 Cauchy 收敛准则仍然有效之外, 常用的其他判别法有:

1. **Leibniz 判别法** 若数列 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

注 满足 Leibniz 判别法中条件的级数称为 **Leibniz 型级数**, 它的各项符号交替取正号和负号. 我们将这样的级数称为**交错级数**. Leibniz 型级数就是通项单调收敛于 0 的交错级数. 初学者可能以为在变号级数中交错级数不会很多, 其实不然. 虽说一个级数加括号后收敛不能推出原来的级数也收敛, 然而利用级数收敛的定义或 Cauchy 收敛准则就可以得到下面的结果:

命题 13.3.2 若对级数 $\sum a_n$ 加括号后得到的级数收敛, 且在每个括号内各项的符号相同, 则级数 $\sum a_n$ 也收敛.

由此可知, 对于任何变号级数都可以采用加括号的方法使它成为一个交错级数, 而且两个级数的敛散性等价.

但是 Leibniz 判别法只是保证收敛性的一种充分条件, 而下面两个判别法都是级数收敛的充分必要条件. 又容易知道 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法的一个特例.

2. **Dirichlet 判别法** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界, 数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

3. **Abel 判别法** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 单调有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

注 1 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的基础是 **Abel 变换** (参见 [55] 的第一章). 这个变换在一系列问题中有用, 也是积分第二中值定理 (命题 10.2.2) 的基础. 其基本形式很简单. 设有两个有限数列 $\{a_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 和 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, 令 $A_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 1, \cdots, n$, 则

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ &= A_1b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n. \end{aligned} \tag{13.21}$$

由此可导出各种有用的估计式. 设 $|A_k| \leqslant M$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则当 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 为非负单调减少时, 容易得到

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant Mb_1, \tag{13.22}$$

又若只值定 $\{b_k\}$ 单调, 则有

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|). \tag{13.23}$$

注 2 与广义积分中的命题 12.2.1 和 12.2.2 (上册 380~381 页) 类似地可以证明, Dirichlet 判别法和 Abel 判别法中的条件也是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛的必要条件. 这方面的结论见数学通报 7 卷 (1983) 29~32 页和 9 卷 (1984) 22~23 页.

13.3.2 一般项级数的基本性质

区分绝对收敛级数和条件收敛级数的意义不仅是它们的判别方法不同, 更重要的是它们在一系列性质上完全不一样.

作为无限项求和来说, 绝对收敛级数与正项收敛级数都满足结合律和交换律, 而且其和不变 (参见 13.2.4 小节的练习题 2).

但对条件收敛级数来说, 情况大不相同. 为了指出这两类收敛级数的根本差异何在, 需要引进由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 导出的两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$:

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & 若\ a_n > 0, \\ 0, & 若\ a_n \leqslant 0, \end{cases} \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, & 若\ a_n < 0, \\ 0, & 若\ a_n \geqslant . \end{cases}$$

命题 13.3.3 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是由它导出的两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 同时收敛, (2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则该级数条件收敛的充分必要条件是这两个正项级数同时发散.

注 这就是说, 条件收敛级数中的正项之和为 $+\infty$, 而负项之和为 $-\infty$, 因此当 $n \to \infty$ 时其部分和数列 $\{S_n\}$ 必为 $\infty - \infty$ 型的不定式 (见上册 102 页的注). 由此可知条件收敛级数是依赖于正项和负项在求和过程 (即部分和数列当 $n \to \infty$ 的极限过程) 中相互抵消而收敛的.

由此出发, 就不难证明下列著名定理. 初看起来其结果似乎很惊人, 但其本质则不难理解.

命题 13.3.4 (Riemann 重排定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛, 则对于满足 $-\infty \leqslant A \leqslant B \leqslant +\infty$ 的任意一对 A, B, 可以改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项的顺序, 使得重排之后的级数的部分和数列 $\{S'_n\}$ 满足要求:

$$\varliminf_{n\to\infty} S'_n = A,\ \varlimsup_{n\to\infty} S'_n = B\ ①.$$

特别是当 $A = B$ 时, 重排级数的和可以是任何有限数或带确定符号的无穷大.

绝对收敛级数和条件收敛级数的另一个差异表现在级数的乘积问题中.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的**乘积**是有限和与有限和的乘积的推广. 如果将上述两个无穷级数换为有限和, 则它们的乘积就等于所有形式为 a_ib_j 的项之和. 对于无穷级数的乘积, 这类项有无限多个, 因此首先就是按什么顺序相加, 其次作为无限项求和当然还有敛散性问题.

为简明起见, 本书只考虑无穷级数的 Cauchy **乘积**, 又称**对角线乘积**. 这就是定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘积为无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n,\ \text{其中}\ c_n = \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

这里的基本结果如下:

命题 13.3.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 它们的和分别为 A 和 B, 则它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛, 且其和为 $A \cdot B$.

上述结果还可以改进为:

① 由于此时 $a_n \to 0$, 从上册 96 页最后一题知, 若 $A \neq B$, 则部分和数列 $\{S'_n\}$ 的极限点集为闭区间 $[A, B]$. 这个结果对于 A, B 为非有限数的情况也成立.

命题 13.3.6 (Mertens 定理) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, 且其中至少有一个级数绝对收敛, 则就有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$.

以上两个基本结果的证明见 [19] 等教科书. 此外, 还有一个补充结果, 它的证明用幂级数理论很容易得到:

命题 13.3.7 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且分别以 A, B, C 为和, 则 $C = A \cdot B$.

13.3.3 例题

注意: 在一般项级数的敛散性讨论中, 若级数收敛, 则还需进一步讨论它是绝对收敛还是条件收敛.

下面的第一个例题的目的是强调: 对于变号级数来说, 将通项换为等价无穷小量的方法是没有根据的. 这表明 (在正项级数中非常有用的) **等价量判别法在变号级数中不能成立** (见比较判别法的极限形式 (13.12) 和**例**题 13.2.2).

例题 13.3.1 问: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是否同敛散?

解 第一个级数是典型的 Leibniz 型级数, 因此收敛. 但第二个级数是发散的. 虽然它是交错级数, 同时它的通项与第一个级数的通项是等价无穷小量, 但并不满足通项绝对值单调的条件, 因此不能用 Leibniz 判别法.

证明第二个级数发散的方法很多. 例如研究由两个级数通项之差构成的第三个级数: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$, 其中

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} \sim \frac{1}{n},$$

可见这个级数是发散的正项级数, 因此第二个级数一定发散. □

注 1 试用其他方法证明题中第二个级数发散. 例如从第一项开始对相邻两项加括号, 证明所得的级数发散, 从而可推出原来的级数一定发散.

注 2 在变号级数中不能随意将通项用等价无穷小量来替换的根本原因也是由条件收敛所引起的. 初学者需要在这里回顾命题 13.3.3 及其注. 从本质上说, 这里的问题与 4.4.3 小节中对于等价量代换法中的错误分析是一样的.

注 3 这里要注意, 对于变号级数, 分析通项的等价量还是经常有用的. 若级数绝对收敛, 当然就可以用等价量判别法. 对于条件收敛情况, 能够知道通项的渐近性态也可能是有用的. 下面就是一个例子.

例题 13.3.2 分析数列 $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ 的渐近性态, 并用于讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 的敛散性, 其中 α 不是非负整数, $\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n=1,2,\cdots$.

解 (从例题 13.2.4 已知当 $\alpha>-1$ 时该数列为无穷小量.) 对于给定的 α, 取 $m>|\alpha+1|$, 则对于 $n>m$ 可分析如下, 其中出现的 C_1 等均为常数:

$$\begin{aligned}\left|\binom{\alpha}{n}\right| &= C_1\frac{[m-(\alpha+1)]\cdots[n-(\alpha+1)]}{m\cdots n}=C_1\prod_{k=m}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)\\ &=\exp\left[C_2+\sum_{k=m}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)\right]\\ &=\exp\left[C_2-(\alpha+1)\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=m}^{n}O(\frac{1}{k^2})\right] ①\\ &=\exp[C_3-(\alpha+1)\ln n+o(1)]\\ &\sim\frac{C}{n^{\alpha+1}},\end{aligned} \tag{13.24}$$

其中利用了关于调和级数前 n 项的渐近性态 (上册 43 页) 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛的知识. 最后出现的正常数 C 将在后面用其他方法确定 (见 (13.41)).

将此结果用于级数, 就可知 $\alpha>0$ 是级数绝对收敛的充分必要条件, 而当 $\alpha\leqslant-1$ 时级数通项不趋于 0, 因此级数发散. 当 $-1<\alpha<0$ 时在例题 13.2.4 中已知级数为 Leibniz 型的交错级数, 因此为条件收敛. □

注 渐近性态 (13.24) 见 [36] 等, 这里的证明是沐定夷提供的. 对于本题的传统方法是用 Raabe 判别法, Leibniz 判别法和例题 13.2.4 的结论.

例题 13.3.3 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 当 $x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时条件收敛.

证 只需讨论 $0<x<\pi$. 由 Dirichlet 判别法, 只需要证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和数列有界. 事实上, 对任意正整数 n, 利用三角恒等式

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2},$$

就可得到估计

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

---

① 当 $k\geqslant m$ 时, $\dfrac{|\alpha+1|}{k}\leqslant\dfrac{|\alpha+1|}{m}$. 利用 $\ln(1-t)+t\sim-\dfrac{t^2}{2}$ $(t\to0)$, 可见这里的 $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 对于 $\frac{1}{k^2}$ 之比是一个与 k 无关的有界量.

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的部分和数列有界, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛.

另一方面, 利用 $|a_n \sin nx| \geqslant a_n \sin^2 nx = \frac{1}{2}(a_n - a_n \cos 2nx)$, 仿上可以证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$ 收敛, 因而由题设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - a_n \cos 2nx)$ 发散, 因此由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ 发散, 这就证明了原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 条件收敛. □

注 后半题和广义积分的例题 12.2.3 中当 $p=1$ 时 (见上册 384 页) 相同.

例题 13.3.4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

解 将级数中相邻的同号项合并, 从而组成一个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, 其中

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{1+k/n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2n} \left[1 - \frac{k}{n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[(2n+1) - \frac{2n+1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}
$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 且至少当 n 充分大时单调减少:

$$
a_n - a_{n+1} = \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
$$

这表明原级数加括号后得到的级数收敛. 由于括号中的项符号相同, 所以可推知原级数收敛 (见命题 13.3.2). □

注 以上证明是沐定夷提供的. 一般教科书中的方法是将 a_n 的和式中的 $2n+1$ 项分拆为前 n 项和后 $n+1$ 项两部分, 然后分别证明这两个和式之值都在区间 $(1/(n+1), 1/n)$ 之内, 因此 $a_n > a_{n+1}$.

下一个例题是对于一个具体的变号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 来验证 Riemann 定理 (即命题 13.3.4) 中的部分结论.

例题 13.3.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的一个重排, 其中 $\{a_n\}$ 中正项之间的顺序以及负项之间的顺序与重排之前相同, 又设在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项中有 p_n 个正项, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{n} = p$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{p}{1-p}\right)$ (当 $p = 0, 1$ 时将右边的表达式理解为它在 $(0,1)$ 两端的广义极限 $-\infty$ 和 $+\infty$).

证 直接计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列如下:

$$S_n = \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p_n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-p_n)}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p_n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-p_n}\right),$$

然后利用上册 43 页末的渐近等式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),$$

其中 γ 为 Euler 常数, 就可得到

$$S_n=[\ln(2p_n)+\gamma+o(1)]-\frac{1}{2}[\ln p_n+\gamma+o(1)]-\frac{1}{2}[\ln(n-p_n)+\gamma+o(1)]$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)+o(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n/n}{1-p_n/n}\right)+o(1),$$

令 $n\to\infty$ 可见结论为真. □

13.3.4 练习题

1. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin nx}{n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin n}{n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$; (10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln n})$; (12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$.

2. 将调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的各项改变符号, 其规则是每 p 个正项后为 q 个负项, 然后再如此重复, 但不改变各项原有的顺序. 证明: 所得级数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

3. 设 $0<\alpha<1$, 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ 按照每 p 个正项后为 q 个负项的规则进行重排, 但保持正项之间和负项之间的原有顺序, 证明: 重排后的级数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

4. 设 $p, q>0$, 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $1-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}+\cdots$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$.

5. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+nx^n}$ (若分母为零则去掉该项) 的条件收敛性和绝对收敛性.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少且趋于零, 证明下列级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

7. 证明下列级数收敛:

$$1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots.$$

8. (du Bois Reymond 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

9. (Dedekind 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

10. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ 也发散.

11. 证明: 当 $|q|<1$ 时, 成立 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$.

12. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 与自身的 Cauchy 乘积是收敛级数.

13. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}, C(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$, 证明

$$2S(x)C(x)=S(2x).$$

14. 设级数 $\sum\dfrac{a_n}{b_n}, \sum\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$ 均收敛, 又对每个 n 有 $b_n(a_n+b_n)\neq 0$, 证明: 级数 $\sum\dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ 收敛.

15. 两个发散级数的 Cauchy 乘积可以是收敛的. 试验证以下两个发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的 Cauchy 乘积是绝对收敛级数.

16. (1) 举例说明收敛级数与发散级数的乘积既可能收敛, 也可能发散. (2) 证明: 对于正项收敛级数和正项发散级数的乘积, 其乘积一定发散 (假定其中的正项收敛级数的和大于 0).

§13.4 无穷乘积

正如研究数列的前后项之差导致无穷级数的研究, 研究数列的前后项之比就引向无穷乘积的研究. 本节利用无穷级数方面的已有工具, 对无穷乘积的基本内容和例题作一个简单介绍.

13.4.1 基本内容

无穷乘积的记号为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = p_1p_2\cdots p_n\cdots$, 其中假定**通项** $p_n \neq 0$, $n = 1,2,\cdots$[①]. 称 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ 为它的第 n 个**部分乘积**, $n = 1,2,\cdots$. 如果部分乘积数列 $\{P_n\}$ 有非零极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, 则称这个无穷乘积**收敛**, 并记 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P$; 如果数列 $\{P_n\}$ 发散或者 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, 则称这个无穷乘积**发散**. 我们也采用简化记号 $\prod p_n$.

这里要指出, 将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的情况称为无穷乘积发散 (于 0) 完全是为了便于和无穷级数的结果对应起来, 而并不是这种情况没有价值或没有意义. 采取这个做法的好处从下面的必要条件已可看出.

与无穷级数的通项趋于 0 是收敛的必要条件一样, 当无穷乘积 $\prod p_n$ 收敛时, 其通项必收敛于 1[②]:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}} = 1.$$

因此, 总可以假设从某个 n 起 $p_n > 0$. 为方便起见, 在下面将 p_n 改记为 $1 + \alpha_n$, 将无穷乘积 $\prod p_n$ 改记为 $\prod(1 + \alpha_n)$, 并假设 $|\alpha_n| < 1$, $n = 1,2,\cdots$.

与上面关于通项的讨论完全类似, 可以引进收敛无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的**余项** $Q_n = \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k$, 并证明一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 1$.

通过取对数将部分乘积变为和式, 就不难建立以下结果:

1. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 收敛.

---

① 这是研究无穷乘积的基本前提, 否则已不必讨论.

② 在证明中已经利用了 $\{P_n\}$ 的极限非零的条件. 又容易看出: 若无穷乘积发散于 0, 则其通项不一定收敛于 1. 例如通项 $p_n = \frac{1}{2}\ \forall n$ 的无穷乘积就是如此.

2. 若从某个 n 起 $\alpha_n \geqslant 0$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛. (若该级数发散, 则无穷乘积为 $+\infty$.)

3. 若从某个 n 起 $\alpha_n \leqslant 0$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛. (若该级数发散, 则无穷乘积发散于 0.)

4. 若 $\{\alpha_n\}$ 变号, 但已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 则 (1) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 收敛时无穷乘积收敛, (2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 发散时无穷乘积发散于 0 (这里要利用等价关系 $\ln(1+x)-x \sim -\dfrac{x^2}{2}\ (x\to 0)$).

5. 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|\alpha_n|)$ 收敛, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 绝对收敛. 不难证明绝对收敛的无穷乘积一定收敛, 反之未必成立. 由此又可建立无穷乘积条件收敛等等与无穷级数类似的概念和结果.

13.4.2 例题

历史上第一个得到严格证明的无穷乘积是 Viète 在 1593 年发表的关于圆周率的 **Viète 公式**:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots. \tag{13.25}$$

实际上这就是

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{13.26}$$

Viète 公式是在微积分出现之前在分析方面的重要结果, 它在人类对于圆周率的认识上也是一个突破, 具有重要的历史意义 (参见上册 114 页题 5).

在上册 362～363 页中建立的 **Wallis 公式**是历史上较早出现的另一个重要的无穷乘积, 而且也是关于圆周率的结果. 除了已经在那里介绍的几种常用形式 (如 (11.27), (11.29), (11.30)) 外, 还可写成以下形式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4},\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}. \tag{13.27}$$

不难验证以上两个无穷乘积的收敛性和等式成立 (作为练习).

在上册 25 页的 2.2.4 小节和 30 页的 2.3.2 小节中已有不少无穷乘积的练习题, 当然在那里都以数列的形式出现 (还可以注意上册 369 页的题 10).

下面是用无穷乘积理论研究数列的一些例题. 首先简要地叙述关于 (13.24) 的另一个证明.

例题 13.4.1 若 α 不是非负整数, 则存在非零常数 C, 使得

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$

证 引入记号

$$a_n = \left|\binom{\alpha}{n}\right| \cdot n^{1+\alpha},$$

则只要证明 $\{a_n\}$ 有非零极限. 注意关于 α 的条件使得 $a_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots$.

恰如数列与无穷级数的联系一样, 对于任意给定的一个非零数列 $\{a_n\}$, 不难写出一个无穷乘积, 使得它的部分乘积数列就是 $\{a_n\}$, 从而就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{13.28}$$

于是问题就变为证明右边的无穷乘积收敛 (但无需计算出它的值). 本题的以下部分已经没有困难, 留作为练习题. □

下面是对于命题 13.2.3 的新证明, 它来自美国数学月刊 95 卷 (1988) 942 页. 为读者方便起见, 将该命题内容重新写出如下.

例题 13.4.2 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证 将题中的级数通项记为 b_n. 从条件知 $0 < 1 - b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 与上题一样将数列 $\{a_n\}$ 的极限与一个无穷乘积联系起来:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - b_n).$$

但是要注意: 目前关心的是右边的无穷乘积是否**发散**于 0. 易见有等价关系:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \prod_{n=1}^{\infty}(1 - b_n) \text{ 发散于 } 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1 - b_n)] = +\infty.$$

现在只需要证明以下两个正项级数同时**发散**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1 - b_n)] = +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty. \tag{13.29}$$

分两种情况讨论. (1) 若 $\{b_n\}$ 不是无穷小量, 则两个级数的通项都不趋于 0, 因此 (13.29) 成立; (2) 若 $\{b_n\}$ 是无穷小量, 则从 $\ln(1 - x) \sim -x\ (x \to 0)$ 和比较判别法的极限形式 (13.12), 可见 (13.29) 也成立. □

下面是分析中的重要结果, 它是 Euler 首先用类比方法猜测出来的. 我们将主要根据 [19] 卷 2 的 359 小节给出证明.

例题 13.4.3 (Euler) 对所有 x 值成立

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{13.30}$$

证 可以看出当 x 为 π 的整倍数时两边为 0. 以下只需要讨论 x 不是 π 的整倍数的情况, 这时容易验证右边的无穷乘积收敛.

不难发现 $\sin(2n+1)\varphi$ 可展开为 $\sin\varphi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此可写成①

$$\sin(2n+1)\varphi = \sin\varphi\, P(\sin^2\varphi), \tag{13.31}$$

其中 $P(u)$ 为 u 的 n 次多项式. 将右边的 $\sin\varphi$ 除到左边并令 $\varphi\to 0$, 就可以定出 $P(0)=2n+1$. 又利用 $\varphi_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 使 (13.31) 左边为 0, 因此 $\sin^2\varphi_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 恰好是多项式 $P(u)$ 的所有根, 这样就完全确定了多项式 $P(u)$. 将所得表达式代入 (13.31) 的右边, 并令 $x=(2n+1)\varphi$, 得到

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{13.32}$$

以下采用与命题 2.5.2 (上册 40 页) 中完全类似的方法. (差别只在于那里是级数, 而这里是乘积.) 固定 m, 令 $n>m$, 并将上式右边分解为

$$\sin x = U_m\cdot V_m, \tag{13.33}$$

其中

$$U_m = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right), \tag{13.34}$$

$$V_m = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{13.35}$$

在 (13.33) 中令 $n\to\infty$, 这时左边与 n 无关, 从 (13.34) 得到

$$\lim_{n\to\infty} U_m = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \tag{13.36}$$

因此第二个因子 V_m 的极限也存在. 但这里重要的是对这个极限的估计. 利用 (13.35), $|\sin x|\leqslant|x|$ 以及 Jordan 不等式 (见上册 253 页例题8.5.6) 可以得到

$$\sin^2\frac{x}{2n+1}\leqslant\frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\geqslant\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2},\ k=1,2,\cdots,n,$$

① 例如用 de Moivre 公式 $\cos(2n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(2n+1)\varphi=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{2n+1}$ 或者数学归纳法即可.

从而有对于 V_m 的估计:

$$1 > \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right) \geqslant \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right).$$

这样就得到对于极限 $\lim\limits_{n\to\infty} V_m$ 的估计:

$$1 \geqslant \lim_{n\to\infty} V_m = \frac{\sin x}{\lim\limits_{n\to\infty} U_m} = \frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \geqslant \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right).$$

最后, 利用上式右边是一个收敛无穷乘积的余项, 因此当 $m\to\infty$ 时极限为 1, 这样就从数列极限的夹逼定理得到所要的展开式. □

注 1 在展开式 (13.30) 中令 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 就得到 Wallis 公式 (13.27) 中的第二个公式. 可见 Euler 的展开式是非常有力的结果.

注 2 关于展开式 (13.30) 的证明方法很多, 可以参看美国数学月刊 89 卷 (1982) 225~230 页的一个综述.

注 3 值得回顾 Euler 发现这个展开式的思维过程. 他的出发点是将 $\sin x$ 与多项式作类比, 由于 $\sin x$ 以所有 $k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 为零点, 因此他猜测 (13.30) 会成立. 他又将该式两边展开为 x 的幂级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

等一系列重要结果. 其中第一个级数的求和问题即所谓 **Basel 问题**, 在 Euler 之前已有近百年的历史. 包括 Bernoulli 兄弟在内的许多数学家都作过努力而没有成功. 同时谁也想不到在它的答案中会出现圆周率 π. 这是数学史上最精彩的故事之一, 有着多方面的教育意义. 详细内容请看 [39] 的第二章和 [18] 的第九章. 在第十六章还会回到这个问题上来, 并推导出 p 为偶数时的 p 级数和 $\zeta(p)$ 的计算公式.

在上册 401 页已经引进特殊函数 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ x>0$. 它是阶乘 $n!$ 的连续化. 现在我们介绍 Γ 函数的无穷乘积定义, 但是这里的定义域不局限于 $x>0$. 关于在 $x>0$ 时两个定义的等价性证明见后面的例题 16.1.4.

例题 13.4.4 对于 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$, 定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}{1+\dfrac{x}{n}}. \tag{13.37}$$

从 $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}{1+\dfrac{x}{n}}=1+\dfrac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ 可知定义中的无穷乘积绝对收敛, 因此 Γ 函数的上述定义是有意义的.

写出上述无穷乘积的部分乘积

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

即有 **Euler-Gauss 公式**

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{13.38}$$

由此就有

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+n+1} = x,$$

即 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. 从 $\Gamma(1) = 1$ 可见有 $\Gamma(n+1) = n!$. 利用在上册 43 页处引进的 Euler 常数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(1+n)\right).$$

可见有

$$e^{\gamma x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}.$$

将它与 Γ 函数的乘积定义结合, 就得到 Γ 函数的 **Weierstrass 公式**

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \tag{13.39}$$

又利用

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}},$$

与 (13.37) 一起就得到 Γ 函数的**余元公式**:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{13.40}$$

这里利用了正弦函数的无穷乘积公式 (13.30), 并在其中将 x 换为 πx. 若令 $x = \frac{1}{2}$ 代入, 就得到 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (这也可从 Euler-Gauss 公式 (13.38) 和 Wallis 公式 (11.29) 得到).

注 将 Euler-Gauss 公式 (13.38) 与 $\binom{\alpha}{n}$ 比较就得到公式 (13.24) 的第三个证明, 而且这一次还得到了其中的非零常数:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| \sim \frac{1}{|\Gamma(-\alpha)|} \cdot \frac{1}{n^{1+\alpha}}. \tag{13.41}$$

例如, 对于 $\alpha = -1/2$, 上式就是熟知的结果:

$$\left|\binom{-1/2}{n}\right| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\Gamma(1/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

13.4.3　练习题

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$;　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n+1})$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;　　(4) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$;

(5) $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+(-1)^n\frac{1}{n}\right]$;　　(6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ ①.

2. 设 $a,b>0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足条件 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛的充分必要条件是无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛.

4. 如果对正数数列 $\{a_n\}$ 存在极限 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. (可利用例题 13.4.2.)

5. 讨论无穷乘积 $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的敛散性, 其中 α,β,γ 为参数, 且设 n_0 已足够大, 使得乘积中出现的所有因子均大于 0.

6. (Euler) 对于 $0<x<1$, 证明:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

7. (Stirling) 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$ 于某个 x 值时收敛, 则级数对任何 x 值都收敛.

8. (Landau) 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}\ (x\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

与 Dirichlet级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 对同样的 x 值收敛.

9. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O(b_n)$, 并已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. (可参考第 8 页的 Gauss 判别法.)

10. (Stirling 公式的又一证明) 用无穷乘积方法证明: 数列 $\{n!\mathrm{e}^n/n^{n+\frac{1}{2}}\}$ 有非零极限, 并求出此极限.

---

① 此题对于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}=0$ 又提供了一个证明.

§13.5 对于教学的建议

13.5.1 学习要点

1. 正如本章开头所指出的那样, 数项级数与上册第二章的数列极限有密切联系. 建议在学习本章时能经常将级数内容与数列的相应内容加以比较.

2. 无穷级数在一系列概念和方法上又与上一章的广义积分非常相似. 虽然各种教材在这两部分内容的安排次序上并不一致, 但若能沟通两者之间的联系, 则对于学习是很有帮助的.

3. "$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要而非充分的条件" 是体现无穷级数收敛特点的一条基本性质.

4. 需要重点关心的一些级数是几何级数, p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^p}$. 关于数项级数的绝大部分知识点可以通过对这些级数的讨论而得到展开.

5. 比较判别法是正项级数收敛性判别法的基本出发点. 要注意比较判别法对一般项级数来说, 只有绝对收敛情况才有效. 很能说明问题的例子是例题 13.3.1. 必须明白: 等价量判别法就是一种特殊的比较判别法. 而对于变号级数来说, 比较判别法在原则上是不成立的.

6. 如上册 75 页之 (4) 所说, 在实数系的许多等价的基本定理中, Cauchy 收敛准则将在积分和级数中起主要作用. 初学者不容易掌握它的意义和用法是很自然的. 本章的习题课应当有一部分时间用于围绕 Cauchy 收敛准则组织一些比较具体的例题, 多角度地应用 Cauchy 收敛准则, 以帮助学生学习这一基本工具.

7. Abel 变换是估计乘积项之和 $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$ 的重要方法, 它与分部积分公式、积分第二中值定理都有联系. 程度好的学生应能学会用公式 (13.21)~(13.23) 来处理类似的问题.

8. 证明一个级数发散有时比证明级数收敛更使学生感到困难. 证明级数发散常用的方法有:
   (1) 证明级数的通项不趋于零;
   (2) 利用 Cauchy 收敛准则;
   (3) 证明按某种方式加括号后所得的级数发散;
   (4) 对正项级数, 证明部分和数列无上界;
   (5) 对正项级数, 利用 § 13.2 节中的各种判别法;
   (6) 把级数通项分解为一个收敛级数的通项与一个发散级数的通项之和.

13.5.2 参考题

第一组参考题

1. 试用两种方法证明: 对于正数数列 $\{a_n\}$, 必有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=0.$$

2. (Abel-Pringsheim 定理) 设正项级数 $\sum a_n$ 的通项单调减少, 且已知级数收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 又已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 同敛散, 且在收敛时具有相同的和. 又对于通项不是单调减少的情况, 试举例说明 "同敛散" 的结论不再成立.

5. 由于数列 $\{a_n\}$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 具有相同的敛散性, 试用级数理论讨论下列数列的敛散性:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n,\ n=1,2,\cdots;$

(2) $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n},\ n=1,2,\cdots;$

(3) $a_n=\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\ln n}-\ln\ln n,\ n=2,3,\cdots.$

(题 (1) 即上册 43 页命题 2.5.6, 题 (2) 见上册 56 页参考题 14. 又可以与上册 371 页参考题 10 作比较.)

6. 证明: (1) 若 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负单调减少函数, 则存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)=A,$$

且 $0\leqslant A\leqslant f(1)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 若函数 f 在 $[-1,1]$ 上定义, 且存在 $f''(0)$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛的充分必要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.

8. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加且有极限 $f(+\infty)=A$. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和;

(2) 又若 f 在 $[1,+\infty)$ 上二次可微, 且 $f''(x)<0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 也收敛.

9. (**二重正项级数的求和顺序交换定理**) 设对每个正整数 n, 正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ 收敛, 且其和为 a_n. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

10. 对正整数 $m \geqslant 2$, 用 s_m 表示级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^m}$ 的和, 证明: $\sum\limits_{m=2}^{\infty} s_m = 1$.

11. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少趋于 0, 且已知数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_n)\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

12. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格单调减少, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{na_n\}$ 单调, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

14. 设 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. (Fibonacci **数**列的倒数所成级数收敛.)

15. 设 $0 < p < 1$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n^p}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

16. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对于 $p > \dfrac{1}{2}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛. 举例说明 $p = \dfrac{1}{2}$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}}$ 可能发散.

17. 证明下列两个级数发散: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

18. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 讨论以下级数的敛散性: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + n^2 a_n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + na_n}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$.

19. 设有收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$, (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和也是 S.

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 为条件收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排. 若 $t \neq s$, 证明: 对于任意 N, 存在 n, 使 $|n - f(n)| > N$.

(这表明, 对于条件收敛级数作重排时, 如果每一项的新位置与原有位置之差不超过某个界限的话, 则级数的和不会改变.)

第二组参考题

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$ 收敛.

2. 设 $a>0, a_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(a+a_1+\cdots+a_n)^{3/2}}$ 收敛, 且其和 $S\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且存在 $M>0$, 使对每个正整数 n 成立
$$a_k\leqslant Ma_n,\ n\leqslant k\leqslant 2n,$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

4. 试构造两个发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 它们的通项都单调减少, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 收敛.

5. (Frink 判别法) 设对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lambda$, 则当 $\lambda<\mathrm{e}^{-1}$ 时级数收敛, 而当 $\lambda>\mathrm{e}^{-1}$ 时级数发散.

6. (Ermakof 判别法) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少且大于 0, 又知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=p$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 当 $p<1$ 时收敛, 而当 $p>1$ 时发散.

7. (Lobatchevski 判别法) 通项单调趋于 0 的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n 2^{-n}$ 同敛散, 其中 $b_n=\max\{k \mid a_k\geqslant 2^{-n}\}$.

8. 证明: 以下两个无穷乘积收敛于自然对数的底 e:

   (1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$, 其中 $a_1=1,\ a_n=n(a_{n-1}+1)\ \forall\, n\geqslant 2$;

   (2) $2\left(\dfrac{2}{1}\right)^{1/2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots\cdot$.

   (题 (2) 来自美国数学月刊 87 卷 (1980) 391 页.)

9. 证明: 若 $p\leqslant 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 发散.

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛, 证明: (1) 对任一正整数 k, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}=0$.

11. 若对每一个满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 的数列 $\{b_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

12. 若对每一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 收敛.

13. 举出一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

14. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上连续可微, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同敛散.

15. 设 $p>0$, 证明: 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的和 S 满足估计 $\dfrac{1}{2} < S < 1$.

16. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 又知 $\{b_n\}$ 单调减少收敛于 0, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_n = 0.$$

(第一组参考题 19 之 (1) 为本题之特例.)

17. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛, 其中 $p>0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^p} = 0$.

18. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 并令 $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. **定义**: 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **可以 Cesàro 求和** (或称级数在 Cesàro 意义下可求和), 并将极限值 σ 称为级数的 **Cesàro 和**. 证明: 收敛级数一定可以 Cesàro 求和, 且其 Cesàro 和与收敛级数在通常意义下的和相等. 但反之不真.

19. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

(这个条件比通常意义下级数 $\sum a_n$ 收敛时通项必须为无穷小量的必要条件弱得多.)

20. 下列级数是否可以 Cesàro 求和? 如果可以, 试求出它们的 Cesàro 和.

(1) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$;　(2) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$;

(3) $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots$;　(4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots$.

21. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是级数可以 Cesàro 求和.

22. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n} = 0$.

第十四章　函数项级数与幂级数

无穷级数为研究函数提供了全新的有力工具, 如果说数项级数是无穷级数的基础, 则函数项级数就是无穷级数的理论核心.

本章共分五节, 前两节是函数项级数的一般理论. 在 §14.1 节中, 我们讨论函数项级数与函数列的一致收敛性; §14.2 节是和函数与极限函数性质的讨论. 接下来的两节用于讨论最重要的一类函数项级数——幂级数. §14.3 为其一般理论, §14.4 为 Taylor 级数展开, 最后一节是学习要点和参考题.

§14.1　一致收敛性及其判别法

函数是数学分析的主要研究对象. 将函数展开为函数项级数, 使得级数的通项是比较简单的函数, 这样就为函数的研究和计算提供了新工具. 对于以函数项级数的和函数形式出现的大量非初等函数, 如何利用级数来研究它们的基本性质, 如连续性、可微性、可积性以及如何计算它们的导数和积分就成为需要解决的基本理论问题. 为此我们需要引进新的概念, 这就是一致收敛性.

14.1.1　基本内容

下面先列出函数项级数的一致收敛概念的要点.

1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在某个数集 E 上的收敛性以及在收敛时的和函数是逐点定义的, 一般称为 "点收敛"、"逐点收敛" 或 "点态收数" 等. 这在上一章都已见过, 在讨论时与常数项级数没有区别. 但为了研究函数项级数的和函数, 则需要有比点收敛更强的条件, 这就是**一致收敛性**. 在 [31] 的第六章中有这方面发展的历史性材料.
2. 函数项级数在数集 E 上的一致收敛性是一种**整体性质**. 这类**整体**性质在数学分析中多次出现. 例如函数在某个区间上的有界性、一致连续性和 Riemann 可积性等. 与此相反, 函数的连续性、可微性和函数项级数的点收敛性则是局部性质 (可参考上册 137, 140 页).
3. 称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ **在数集 E 上一致收敛**, 如果该级数的部分和函数列 $\{S_n\}$ 在 E 上一致收敛.
4. 设一个函数列 $\{S_n\}$ 在数集 E 上收敛于其极限函数 $S(x)$. 称 $\{S_n\}$ 于 E 上一致收敛, 如果对于每个正数 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对每个正整数 $n > N$, 和每个 $x \in E$, 均成立 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

容易看出，这与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ 在所有 $x\in E$ 成立的不同之处是目前的 N 只与 ε 有关，它对于所有 $x\in E$ 同时适用. 这就是收敛的"一致性".

5. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在开区间 (或其他数集) I 中的每个有限闭区间上一致收敛，则称该级数在 I 中**内闭一致收敛**. 与有界性、一致连续性和可积性等整体性质一样，若函数项级数在 I 上一致收敛，则一定在 I 中内闭一致收敛，但反之不一定成立.
6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 于数集 E 上一致收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 于 E 上**绝对一致收敛**. 在 E 上绝对一致收敛的函数项级数必在 E 上一致收敛，但反之不真.

一致收敛性有明显的几何意义. 下面是三个例子及其几何图像.

例题 14.1.1 非负连续函数列 (1) $\{x\mathrm{e}^{-nx}\}$, (2) $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$, (3) $\{n^2x\mathrm{e}^{-nx}\}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛于同一个极限函数 $S(x)\equiv 0$. 从图 14.1 上可以看出它们在 $[0,1]$ 上的收敛情况大不相同. (1) 是一致收敛的, (2) 不一致收敛，但还是一致有界的, (3) 不一致收敛，而且不一致有界. (图中对 (3) 只作出 $0\leqslant x\leqslant 0.1$ 的部分.)

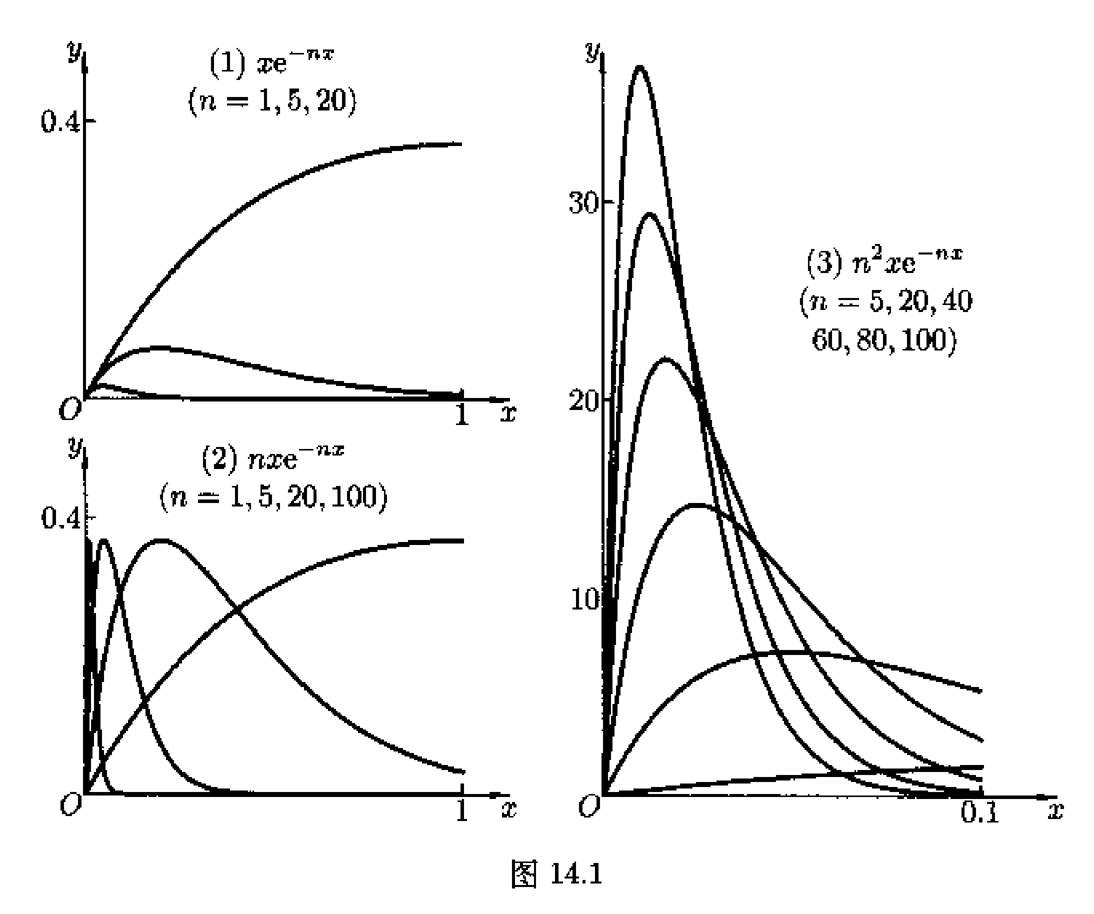


图 14.1

容易看出三个函数列中的第 n 个函数都在点 $x=1/n$ 处达到最大值. 这些最大值分别为 $1/(n\mathrm{e})$, $1/\mathrm{e}$ 和 n/e. 又不难计算出，对这三个函数列都存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 极限值分别为 0, 0 和 1.

其次是一致收敛性的判别方法.

1. 对于函数项级数来说, 主要的一致收敛性判别法有: Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法 (也称为 M-判别法、强级数判别法和优级数判别法等), 以及通过 Abel 变换得到的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.
2. Cauchy 一致收敛准则是充分必要条件, 但应用时往往需要较复杂的技巧;
3. Weierstrass 判别法只对绝对一致收敛的情况有效; 而且可以举例说明, 存在绝对一致收敛的函数项级数的例子, 使得 Weierstrass 判别法失效. 但由于它将问题归结为正项级数的收敛性判别, 使用方便, 因此有广泛的应用.
4. Abel 判别法和 Dirichlet 判别法都是函数项级数一致收敛的充分必要条件, 其证明与广义积分和数项级数的同名判别法类似.
5. 在数项级数中没有对应物的是基于 Dini 定理的 Dini 判别法:

   Dini 定理 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 (或 n 充分大后的项) 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 又已知级数的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 则级数在 $[a,b]$ 上一致收敛①.

   当然 Dini 判别法对条件的要求较高, 但它仍在许多问题中有效. 此外, 如果关心的区间不是有界闭区间, 则还有可能得到内闭一数收敛性的结论.
6. 在讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛性时比较容易的一类情况是能够得到其部分和函数列 $\{S_n\}$ 的紧凑表达式, 这时问题就转化为**函数列的一致收敛性问题** (不难看出可以将已经列举的各种判别法改述为关于函数列的一致收敛性判别法). 如果同时还能得到级数的和函数, 即函数列 $\{S_n\}$ 的极限函数 $S(x)$ 的表达式, 则就有**上确界判别法**: 函数列 $\{S_n\}$ 在数集 E 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是

   $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\{|S_n(x)-S(x)|\}=0.$$

   对于具体问题来说, 则往往有可能用微分法求 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 E 上的最大值或上确界, 又若能估计出它的上界 a_n 使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则也可以得到一致收敛的结论. 这也可称为**优势判别法**.

   这里需要指出几点:

   (1) 请初学者注意: 这个上确界判别法 (即优势判别法) 与函数项级数的 Weierstrass 判别法不一样, 并无直接关系, 前者是充分必要条件, 后者只是充分条件.

① Dini 定理对于非有界闭区间不成立, 例如对于函数列来说, 在 $[0,1)$ 上的函数列 $\{x^n\}$ 处处单调收敛于 0, 但不一致收敛.

(2) 由于上确界判别法是充分必要条件, 因此往往能解决不一致收敛的判别问题. 特别是还能得到以下的**对角线判别法**: 如果存在数列 $\{x_n\} \subset E$, 使得条件

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = 0$$

不满足, 则 $\{S_n\}$ 在 E 上**不一致收敛**于 $S(x)$.

(3) 为了便于掌握有关一致收敛的基本概念, 在教科书中均举出许多可以用上确界判别法得到解决的例题. 但是这并不表明这类方法可以用于许多函数项级数问题上去. 事实上求函数项级数的部分和函数列以及和函数的表达式一般是困难的或者根本做不到的事情.

7. 证明给定的函数项级数在某个数集 E 上不一致收敛的方法不很多. 如果不能将问题归结为函数列去研究的话, 则一般需要用 Cauchy 一数收敛准则. 此外, 在一数收敛条件下保证和函数或极限函数具有某种性质的一系列命题的逆否命题, 也往往可以用来判定非一致收敛性. 最常用的就是连续性命题的逆否命题: 若函数项级数 (或函数列) 的每一项于区间 I上处处连续, 又已知其和函数 (或极限函数) 在 I 上不是处处连续, 则级数 (或函数列) 于 I 上不一致收敛. 在下面例题 14.1.3 中还会介绍它的一种变形.

14.1.2 例题

由于在一般教科书中已有大量关于函数列的例题, 本节不拟收入这方面的很多材料. 下面首先是几个涉及判别方法的例题.

例题 14.1.2 绝对一致收敛的函数项级数的一致收敛性不一定能够用 Weierstrass 判别法来判定: 观察非负函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 其中对 $n = 1, 2, \cdots$ 令

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \text{ 为区间 } [0,1] \text{ 中的其他值}. \end{cases}$$

容易看出, 对于区间 $[0,1]$ 中的每个 x, 在级数的无限项中至多只有一项不是 0, 因此级数处处收敛. 又可以看出对余项的估计 $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ 在 $[0,1]$ 上一致成立, 因此级数在 $[0,1]$ 上一致收敛. 但是从 $\sup\limits_{x\in[0,1]} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 和调和级数发散可知, 用 Weierstrass 判别法一定不成功. □

注 本题的构造方法可以推广为: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 区间 I 上的函数列 $\{u_n\}$ 满足条件 $|u_n(x)| \leqslant a_n\ \forall n$, $u_i(x)u_j(x) = 0\ \forall i \neq j$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上必一致收敛.

下一个例题中的结论可以作为一种**不一致收敛判别法**来使用.

例题 14.1.3 设对每个 n, 函数 $u_n(x)$ 在 $x=c$ 处左连续, 又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 证明: 对任意正数 $\delta>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必不一致收敛.

证 用反证法. 设有 $\delta>0$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上一致收敛, 这就是 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\, N>0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 对每个正整数 p 和每个 $x\in(c-\delta,c)$, 成立

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon. \tag{14.1}$$

由题设, $u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)$ 在 $x=c$ 左连续, 在 (14.1) 中令 $x\to c^-$, 得到

$$|u_{n+1}(c)+\cdots+u_{n+p}(c)|\leqslant\varepsilon.$$

由数项级数的 Cauchy 收敛准则知道, 这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散的条件相矛盾. □

注 1 可将本题与一致连续性理论中的例题 5.4.5 (上册 140 页) 作比较.

注 2 例如, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $x=0$ 时发散, 因此该级数在 $(0,+\infty)$ 上必定不一致收敛. 当然, 还可以进一步研究是否内闭一致收敛等可能性.

下一个例题是用导函数的性质来判定函数项级数的一致收敛性.

例题 14.1.4 (Bendixon 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数项级数, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 的部分和函数列在 $[a,b]$ 上一致有界, 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则必在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 由题设, 存在正常数 C, 使得对每个正整数 n 和每个 $x\in[a,b]$, 同时成立不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right|\leqslant C.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取区间 $[a,b]$ 的等距分划 $\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$, 其中 m 充分大, 使分划的细度 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{m}<\dfrac{\varepsilon}{4C}$.

由于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 处处收敛, 因此从 Cauchy 收敛准则知, 存在 N, 使 $n>N$ 时, 对任意正整数 p 和分划的每个分点 x_i, 同时成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ i=0,1,\cdots,m.$$

现在对于任意的 $x\in[a,b]$, 不妨设 $x\in[x_{i-1},x_i]$, 就可以作出估计:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i) + \sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x) - u_k(x_i))\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi_i)\right| \cdot |x - x_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2C|x - x_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

其中在 $[x, x_i]$ 上对 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) - u_k(x_i)]$ 用微分中值定理, $\xi_i \in (x, x_i)$. 这表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Cauchy 一致收敛准则, 从而在 $[a, b]$ 上一致收敛. □

例题 14.1.5 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛: 实际上每项取绝对值之后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ 的部分和函数列为 $\{x - x^{n+1}\}$, 因此在 $[0, 1]$ 上处处收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上不绝对一致收敛: 从 (1) 可见取绝对值后级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ 的和函数为 $S(x) = x$, $x \in [0, 1)$, $S(1) = 0$, 它在点 $x = 1$ 的左侧不连续, 而级数通项在 $[0, 1]$ 上连续, 因此该级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛: 直接计算出余项

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} (1-x)}{1+x},$$

因此有估计 (其中利用了算术平均值-几何平均值不等式):

$$\begin{aligned}|R_n(x)| \leqslant (1-x)x^{n+1} &= \frac{1}{n+1}[(n+1)(1-x)x^{n+1}] \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{1}{n+1} \to 0,\end{aligned}$$

可见级数于 $[0, 1]$ 上一致收敛. □

例题 14.1.6 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域, 并讨论其一致收敛性.

解 (1) 先求收敛域. 当 $x = 0$ 时级数显然收敛. 当 $x \neq 0$ 时, 观察通项的绝对值:

$$\left|n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| = n|x|^n \left|\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n\right| \sim n|x|^n e^{\frac{1}{x}},$$

因而原级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| \geqslant 1$ 时发散, 级数的收敛域是 $(-1, 1)$.

(2) 函数项级数一致收敛的一个必要条件是其通项一致收敛于 0. 但本题的级数通项不满足这个条件. 这用对角线判别法就可以知道: 对每个正整数 n, 取 $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (-1,1)$, 则就有

$$n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)^n = n \to +\infty.$$

因此所论级数在 $(-1,1)$ 上不一致收敛. □

注 这里也可用例题 14.1.3 提供的判别法. 由于当 $|x| = 1$ 时级数发散, 因此不可能在 $(-1,1)$ 上一致收敛. 但是容易证明级数在其中内闭一致收敛.

下一题在每种教科书中都有, 为了比较起见, 我们列入该题, 证明从略.

例题 14.1.7 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是该闭区间不含 2π 的整倍数点.

下面是用 Cauchy 一致收敛准则来判定函数项级数的经典性结果, 其中所用的分析方法具有新的特点, 值得学习 (参见 [50]).

例题 14.1.8 设 $\{b_n\}$ 为单调减少的非负数列, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

证 为方便起见引入下列记号, 其中 $n < p$:

$$S_{n,p} = b_n \sin nx + \cdots + b_p \sin px,$$

先证必要性. 此时只需考虑区间 $(0,1)$. 设级数在这个区间上一致收敛, 则对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于任意的 $p > n > N$, 不等式 $|S_{n,p}| < \varepsilon$ 对所有 $x \in (0,1)$ 同时成立.

取 $p = 2n-1$, $x = \frac{\pi}{4n}$, 这时在和式

$$S_{n,2n-1} = b_n \sin nx + \cdots + b_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

中的每个正弦函数的自变量都在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 中, 因此就有

$$b_{2n} n \sin\frac{\pi}{4} < b_{2n}[\sin nx + \cdots + \sin(2n-1)x] \leqslant S_{n,2n-1} < \varepsilon,$$

可见 $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 成立.

再证充分性. 显然只要证明级数在区间 $[0,\pi]$ 上一致收敛. 这时对 $S_{n,p}$ 的估计将随 x 取不同值而采用不同的方法, 但最后综合起来的估计则与 x 无关.

从非负无穷小量 $\{nb_n\}$ 可以合理地定义一个新的单调减少数列:

$$\mu_n = \max_{m \geqslant n}\{mb_m\},\ n = 1,2,\cdots,$$

且有 $\mu_n \to 0$. 以下分三种情况估计 $S_{n,p}$:

(1) 若 $x \leqslant \frac{\pi}{p}$, 则在 $S_{n,p}$ 中的每一个正弦函数的自变量都在 $[0,\pi]$ 内, 再利用 $\sin\theta \leqslant \theta\ \forall \theta \in [0,\pi]$, 就得到

$$|S_{n,p}| = S_{n,p} \leqslant b_n nx + \cdots b_p px \leqslant p\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

(2) 若 $x \geqslant \dfrac{\pi}{n}$, 则利用三角变换 (见例题 13.3.3), Jordan 不等式 $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta\,\forall\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ (例题 8.5.6) 和 $\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 可以对于任意 $r \geqslant n$ 估计出

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant n,$$

然后从 Abel 变换和 $\{b_n\}$ 的非负单调性 (见 (13.22)) 得到

$$|S_{n,p}| \leqslant \frac{\pi}{x} \cdot b_n \leqslant nb_n \leqslant \mu_n.$$

(3) 若 $\dfrac{\pi}{p} < x < \dfrac{\pi}{n}$, 则需同时使用以上两种方法. 分拆 $S_{n,p} = S_{n,k} + S_{k+1,p}$, 其中取 $k = [\pi/x]$ (使得 $n \leqslant k < p$), 并分别用前面的两种方法估计, 就得到

$$|S_{n,p}| \leqslant |S_{n,k}| + |S_{k+1,p}| \leqslant \pi\mu_n + \mu_{k+1} \leqslant \mu_n(\pi + 1),$$

其中利用了 $kx \leqslant \pi < (k+1)x$ 和 $\mu_{k+1} \leqslant \mu_n$.

合并 (1)–(3), 就得到估计式 $|S_{n,p}| \leqslant \mu_n(\pi + 1)$ 对于任意 $p > n$ 和 $x \in [0, \pi]$ 同时成立. 由于 $\mu_n \to 0$, 可见级数一致收敛. □

注 1 例题 14.1.7 中的级数显然不满足本题的条件.

注 2 用本题的方法 (或其他方法) 可以证明例题 14.1.7 中级数的部分和函数列在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致有界, 这样就得到比本题较弱的结论: 若 $\{nb_n\}$ 单调减少趋于 0, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

下一个例题为 §16.3 节中的 Weierstrass 逼近定理的证明提供了一个初等起点, 同时又可以看成是 §2.6 节中迭代生成数列方法在函数列中的延伸.

例题 14.1.9 (Visser 定理) 在区间 $[-1, 1]$ 上定义函数列 $\{a_n(x)\}$ 如下:

$$a_1(x) \equiv 0,\ a_{n+1}(x) = a_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2(x)),\ n = 1, 2, \cdots.$$

证明: $\{a_n(x)\}$ 是在区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 $|x|$ 的多项式序列.

分析 从对称性可见只需在区间 $[0, 1]$ 上讨论. 不难知道本题中由迭代得到的多项式序列 $\{a_n(x)\}$ 是在 $[0, 1]$ 上的严格单调增加的连续函数列, 且收敛于极限函数 $a(x) = x$. 因此用 Dini 定理就知道结论成立. 其中的具体细节请读者完成.

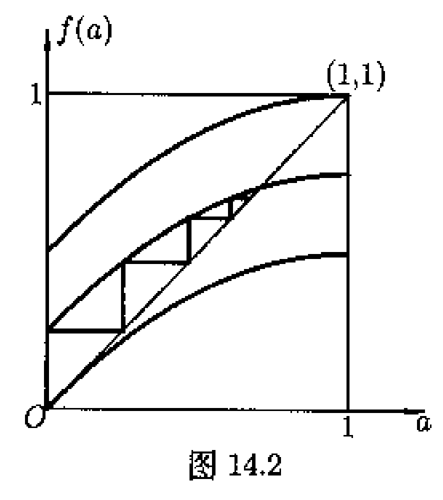


图 14.2

这里将从 §2.6 节的迭代生成数列的几何理论出发, 配合图 14.2 观察本题, 说明如何在分析论证之前就可以发现以上全部事实.

考虑 $[0, 1]$ 上的点收敛, 则从 a_n 到 a_{n+1} 的迭代方程是

$$f(a)=a+\frac{1}{2}(x^2-a^2), \tag{14.2}$$

其中 x 是参数. 初始值 $a_1=0$. 如图 14.2 所示, 其中作出了迭代方程的三条曲线, 它们的参数分别为 $x=0,\frac{\sqrt{2}}{2},1$. 在图中还对于中间一条曲线用 2.6.2 小节中的**蛛网工作法**从 $a_1=0$ 开始作了几次迭代 (参见上册 50 页的图 2.4). 容易看到, 由于参数 $x\in[0,1]$ 时的每条迭代曲线都严格单调增加, 因此所得到的迭代生成数列 $a_n(x)$ 也严格单调增加. 此外, 对每个参数 $x\in[0,1]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=x,$$

即收敛于迭代方程 (14.2) 的不动点 $a=x$. 这些都可以从关于迭代数列的两个基本规律的命题 2.6.1 和 2.6.2 直接得出.

14.1.3 练习题

1. 讨论函数列或函数项级数在给定区间上的一致收敛性:
   (1) $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2},\ n=1,2,\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;
   (2) $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ n=1,2,\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;
   (3) $S_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx},\ n=1,2,\cdots,\ x\in(0,\infty)$;
   (4) $S_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n},\ n=1,2,\cdots$, (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(0,+\infty)$;
   (5) $S_n(x)=n\sin\dfrac{x}{n},\ n=1,2,\cdots$, (i) $x\in[0,a]$, (ii) $x\in(0,+\infty)$;
   (6) $S_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-nx}),\ n=1,2,\cdots$, (i) $x\geqslant 0$, (ii) $x<0$;
   (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^8}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right),\ \dfrac{1}{t}\leqslant|x|\leqslant t,\ t>1$;
   (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}},\ x>0$;
   (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right]$, (i) 有限闭区间 $[0,b]$, (ii) $[0,+\infty)$.

2. 确定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的收敛域与一致收敛域.

3. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

4. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在区间 $(-a,a)$ 上一致收敛, 其中 a 是小于 $2\ln^2 2$ 的任意固定正数.

5. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛, 但不一致收敛.

6. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\displaystyle\int_0^x t^n\sin\pi t\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7. 设 $\{f_n\}$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且设该函数列在 (a,b) 上一致收敛, 证明 $\{f_n\}$ 在点 a 和 b 都收敛, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛.
8. 设 f 在 (a,b) 内有连续导函数, 定义
$$F_n(x)=\frac{n}{2}\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x-\frac{1}{n})\right],\ x\in(a,b),\ n=1,2,\cdots.$$
证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a,b) 上处处收敛且内闭一致收敛.
9. 设函数列 $\{u_n\}$ 中的函数在 $[a,b]$ 上同为单调增加函数或同为单调减少函数, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 都绝对收敛, 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
10. 设在区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 且已知 f 在 $[a,b]$ 上无零点, 证明: 函数列 $\left\{\dfrac{1}{f_n}\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
11. 设函数列 $\{f_n\}$ 于区间 I 上一致收敛, 又设每个 f_n 于 I 上有界, 证明: 函数列 $\{f_n\}$ 于 I 上一致有界.
12. 设函数列 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 分别在区间 I 上一致收敛. 如果每个 f_n 和 g_n 在 I 上有界, 证明: 函数列 $\{f_n\cdot g_n\}$ 在 I 上一致收敛[①].
13. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义函数列 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}f\left(x+\dfrac{k}{n}\right),\ n=1,2,\cdots$, 证明: 函数列 $\{S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛.
14. 设 $S_1(x)\in R[a,b]$, 定义
$$S_{n+1}(x)=\int_a^x S_n(t)\,\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots.$$
证明: 函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

§14.2 和函数与极限函数的性质

14.2.1 三分法与极限顺序交换原理

这里的基本问题是如何从函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中的 $\{u_n\}$ (或从函数列 $\{S_n\}$) 出发去研究级数的和函数 (或函数列的极限函数) 的性质以及进行各种分析运算.

由于所关心的性质和运算本身都涉及极限运算, 因此就必然遇到**两个 (或两个以上) 极限过程的顺序交换问题**. 实际上在 10.2.3 小节的积分号下求极限中已经遇到这类问题, 但那时还不能进行一般性讨论.

在函数项级数的基础上, 就可以比较系统地研究极限顺序交换问题. 大致来说, 对于本节所提出的问题, 最基本的概念就是一致收敛性. 有关的基本结论在

① 如允许 f_n (或 g_n) 无界, 则结论可不成立 (见 [59] 的第二册 282 页).

教科书中均已有详细叙述, 这里不必重复. 本节主要是指出其中的一些重要问题, 以作为叙科书的补充.

从极限顺序交换角度出发, 下列命题看似平淡, 实际上具有很基本的意义. 我们将从方法的角度来分析它的证明, 而不是简单地重复教科书中的证明.

命题 14.2.1 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛于函数 $S(x)$, 且对每个正整数 n, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$ 存在且有限, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x)$ 都存在且两者相等, 这就是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{14.3}$$

分析与证明　引入记号 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = a_n,\ n = 1, 2, \cdots$.

(1) 先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 收敛. 因为 $\{S_n(x)\}$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛于函数 $S(x)$, 所以由 Cauchy 收敛准则知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于任意的 $n, m > N$ 和所有的 $x \in U(x_0)$, 同时成立

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

在此不等式中令 $x \to x_0$ 就有

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

这表明数列 $\{a_n\}$ 满足 Cauchy 收敛准则, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2) 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = A$. 下面只需证明 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$. 然而如何去估计 $|S(x) - A|$? 从条件可见我们无法直接估计它, 而必须采取间接的 (或者说曲析的) 方法进行估计. 这就是在分析中常用的**三分法** (也称为 $\varepsilon/3$ 法或 3ε 法), 即为了估计 $|S(x) - A|$ 而作以下插项和分拆:

$$\begin{aligned}|S(x) - A| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - a_n + a_n - A| \\ &\leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - a_n| + |a_n - A|.\end{aligned} \tag{14.4}$$

我们的目的是要证明: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时上式左边小于 ε, 而 (14.4) 使我们只需分别估计右边的三项.

右边第一项由于 $\{S_n\}$ 在邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛, 因此只要 n 足够大, 就可以对该邻域中的所有 x 满足该项小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 的要求.

对于 (14.4) 右边的第二项则似乎只要利用 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = a_n$: 当 x 与 x_0 充分接近时, 这一项就可小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$. 但这里的 n 取什么? 是否存在 $\delta > 0$, 使得

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |S_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14.5}$$

对于一切 n 成立? 在题设中显然没有这样的一致性条件 (但是参看下面的命题 14.2.2).

再观察 (14.4) 的第三项. 由于 $a_n \to A$, 因此对于 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 就有 $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ 成立.

如何将以上的分析综合起来以写出一个正确的证明? 对于 (14.4) 中的第一项和第三项, 可以分别取出 N_1 和 N_2, 使得当 $n > N_1$ 和 $n > N_2$ 时它们分别小于 $\frac{\varepsilon}{3}$. 由于这两步是独立的, 从而只要取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 就可以使得当 $n > N$ 时对这两项的估计都满足要求.

最后, 取定一个 n[①], 例如令 $n = N + 1$, 然后如前面所分析的那样, 存在 $\delta > 0$, 使得 (14.5) 成立. 这样就使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时 (14.4) 的左边小于 ε. □

对于命题 14.2.1 的以上分析可以使我们接触到极限顺序交换的基本原理. 这里不准备详细写出这个原理, 而是只讲一个大意, 然后举出与命题 14.2.1 对偶的但不很常见的结论.

这个原理就是: 设有在集合 $X \times Y$ 上定义的二元函数 $f(x,y)$, 同时存在 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$, 使得对于每个 $x \in X$ 存在极限 $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$, 又对于每个 $y \in Y$ 存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$, 并且这两个极限过程之一对于另一个变量具有一致性, 则就保证以下两边的二次极限存在且相等:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y).$$

注意: 这里的二元函数以及所涉及的极限过程可以很广泛, 因此我们将它称为**极限顺序交换的基本原理**. 命题 14.2.1 只是它的一个特例. 这个原理的证明见后面 18.1.5 小节的命题 18.1.2. 下面举出使得 (14.3) 成立的对偶命题.

命题 14.2.2 设函数列 $\{S_n\}$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内收敛于函数 $S(x)$, 又设对每个正整数 n, 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} S_n(x)$ 存在且有限, 而且这个极限过程对 n 一致, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} S_n(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$ 都存在且两者相等, 即有 (14.3) 成立.

这个命题的证明不难, 留作练习. 这里只指出, 题意中的一致性是如何严格定义的. 称 $\lim\limits_{x \to x_0} S_n(x) = a_n$ **关于 n 一致**, 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时不等式 $|S_n(x) - a_n| < \varepsilon$ 对一切 n 同时成立. 当然这里的 δ 与 n 无关.

虽然用命题 14.2.2 的机会不多, 但是这里所包含的基本方法还是很有教益的. 如果初学者通过努力能够完成命题 14.2.2 的证明, 则可以认为已经对于三分法和上述极限顺序交换原理有了较好的理解. 这对于今后的学习很有帮助.

14.2.2 例题

本小节就和函数与极限函数的连续性、可微性和可积性举一些有助于理解基本概念和基本工具的例题.

---

① 这是证明的关键所在. 在 (14.4) 中的插项与分拆是分析中的常用方法, 根据需要也可能拆成二项或四项等. 这里的困难完全在于怎样处理 (14.4) 右边的 n, 它在左边并不出现.

首先, 对函数项级数或函数列来说, 若除了点态收敛之外不补充条件, 则不可能将级数通项或函数列所具有的这三种性质自动地"传递"给和函数或极限函数. 下面我们分别举出支持上述论点的例子.

例题 14.2.1 (连续性) 在一个区间上的连续函数列收敛于有间断点的极限函数的例子很多. 最常见的例于就是幂函数列

$$\{x^n\},\ x \in [0,1],$$

它的极限函数为 $S(x) = x$, $x \in [0,1)$, $S(1) = 1$. $S(x)$ 在点 1 处左侧不连续.

类似的例子在第十章中已经见到, 例如例题 10.2.4 (参见上册 310 页的图 10.3) 中的函数列

$$\{\sin^n x\},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

其极限函数为 $S(x) = 0$, $x \in [0, \pi/2)$, $S(\pi/2) = 1$. $S(x)$ 在点 $\pi/2$ 处左侧不连续.

由此出发, 当然容易找出极限函数有有限个间断点的连续函数列. 考虑到例题 5.1.4 中的 Riemann 函数的间断点集合为处处稠密的有理数全体, 要构造以这样的函数为极限函数的连续函数列也是可能的 (参见 [22]).

但是应当指出, 可以证明: 区间上的连续函数列的极限函数必有处处稠密的连续点, 因此要想构造极限函数处处不连续的连续函数列是不可能的 (参见 [3] 第五章). 但是从 Dirichlet 函数的极限表达式 (上册 123 页) 出发, 就有

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x), \tag{14.6}$$

其中 $D_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} [\cos(\pi\, n!\, x)]^{2m}$ 是在 $1/n!$ 的整倍数点上等于 1, 而在其他点均等于 0 的函数. 若限制在 $[0,1]$ 上, 则 $D_n(x)$ 恰有 $n!+1$ 个间断点, 但极限函数 $D(x)$ 则处处不连续.

从例题 14.1.1 又可以知道, 一致收敛性并不是保证极限函数或和函数的连续性的必要条件. 这里的理论问题见 14.2.3 小节.

例题 14.2.2 (可微性) 上一个例题中的前两个例子已经表明, 函数列可微不保证极限函数可微①. 但是这里与连续性不同, 可以说有两个问题: 即不仅要关心和函数 (或极限函数) 是否可微, 而且更要关心在可微时它们的导函数是否是级数逐项求导后的级数的和函数 (或函数列求导后的极限函数), 如果是的话, 则就有了计算它们的导函数的有力方法.

因此自然要关心以下的极限交换, 即逐项求导运算和求导与极限交换

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ 与\ \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S(x)$$

是否成立, 其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ 在某个区间上已有定义.

① 从 16.4.1 小节的 Weierstrass 函数可知, 通项可微的函数项级数的和函数可以处处不可微.

容易举出不能逐项可微的例子. 例如, 在例题 14.1.7 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处收敛, 对其逐项求导得到的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

不难证明这个级数处处发散: 从 $\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1$ 可见, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 0$, 就会得到 $0 = -1$ 的矛盾. 因此级数的通项一定不收敛于 0.

在下一章知道这个例子中的和函数 S 很简单, 它是周期 2π 的函数, 在 $(0, 2\pi)$ 上等于 $\dfrac{\pi - x}{2}$, 在 2π 的整倍数处为 0. 因此除了在这些点处不连续 (因而不可微) 之外, 在其他点上处处可微, 且导数值等于 $-\dfrac{1}{2}$. 这个例子表明, 若不另加条件, 则利用导数所成的无穷级数来计算和函数的导数是没有根据的.

例题 14.2.3 (可积性) 从 (14.6) 可见, 从 $\{u_n\}$ 或 $\{S_n\}$ 的可积性不能保证和函数或极限函数的可积性. 这里我们更关心的是在可积的前提下, 可否用逐项积分的方法来计算极限函数或和函数的积分, 即是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] \mathrm{d}x \text{ 与 } \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) \mathrm{d}x.$$

容易举例说明不加条件是不行的. 在例题 14.1.1 中的三个例子表明: 在例 (1)、例 (2) 中可交换积分与极限的顺序, 但例 (3) 则不行. 与此类似的更简单例子为

$$S_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \text{ 为区间 } [0,1] \text{ 中的其他值}. \end{cases} \tag{14.7}$$

易见在区间 $[0,1]$ 上极限函数 $S(x)$ 处处为 0, 因此 $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 同时对每个 n 有 $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

例题 14.1.1 之 (2) 又表明, 一致收敛性并不是使逐项积分 (或积分与极限交换顺序) 成立的必要条件. 这里的理论问题将于下节讨论.

14.2.3 准一致收敛与控制收敛定理

如前所说, 在保证和函数或极限函数的连续性、可微性和可积性方面一致收敛性都是充分而非必要的条件. 为了叙述在连续性方面的充分必要条件, 我们需要新的概念: **准一致收敛**① (参见 [3, 31, 52, 55]). 下面我们只对于区间 $[a, b]$ 上的函数列叙述有关定义和结果.

定义 称函数列 $\{S_n\}$ 在区间 $[a, b]$ 上为**准一致收敛**, 如果该函数列于 $[a, b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$, 且对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 N, 存在 $N' > N$, 使得对于每个 $x \in [a, b]$, 有正整数 $n_x \in [N, N']$, 满足 $|S_{n_x}(x) - S(x)| < \varepsilon$.

① quasiuniform convergence, 译名有亚一致收敛、次一致收敛和拟一致收敛等.

注 若函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则必准一致收敛, 但反之不真.

命题 14.2.3 (Arzela-Borel 定理) 在区间 $[a,b]$ 上的连续函数列的极限函数在 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件是函数列在 $[a,b]$ 上准一致收敛.

证 设连续函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$.

先证必要性. 任取 $x_0 \in [a,b]$, 则从 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$ 知, 对于给定的 $\varepsilon > 0$ 和 N, 存在一个确定的正整数 $n_0 > N$, 使得 $|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$. 利用 $S_{n_0}(x)$ 和 $S(x)$ 的连续性, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $x \in U_{\delta_0}(x_0) \cap [a,b]$ 时, 成立不等式 $|S_{n_0}(x) - S(x)| < \varepsilon$. 对于 $[a,b]$ 中每个点都如此做, 然后用覆盖定理 (见 §3.5 节) 就得到有限个正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$, 取其中最大的为 N' 即可验证 $\{S_n\}$ 准一致收敛于 $S(x)$ 中的条件, 从略.

再证充分性. 对于任意一点 $x_0 \in [a,b]$ 用**三分法**. 考虑分拆

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|. \quad (14.8)$$

由于 $\{S_n(x_0)\}$ 收敛于 $S(x_0)$, 因此对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时 (14.8) 右边的第三项小于 $\varepsilon/3$. 利用准一致收敛条件, 对于 N 和 $\varepsilon/3$ 存在满足条件的 N'. 由于 $[N, N']$ 中只有有限个正整数, 因此存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in [a,b]$ 时, (14.8) 右边的第二项对于每个 $n \in [N, N']$ 都小于 $\varepsilon/3$.

最后, 对于每个 x, 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a,b]$, 就存在 $n_x \in [N, N']$, 使得当 $n = n_x$ 时, (14.8) 右边的第一项以及其他两项同时小于 $\varepsilon/3$.

合并以上分析, 可见对 $0 < |x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a,b]$, (14.8) 的左边 $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$, 因此 $S(x)$ 于点 x_0 连续. □

由上可见, 准一致收敛条件虽然是充分必要条件, 但比较复杂, 因此其应用有限. 但在逐项积分问题中则有一个非常好的结果:

命题 14.2.4 (Arzela 控制收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 f 的可积函数列, 若 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得对于每个 n 和每个 $x \in [a,b]$ 同时满足 $|f_n(x)| \leqslant M$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

评注 这个引人注目的定理是 Arzela 于 1885 年发表的. Osgood 又于 1897 年在连续情况下重新发现了这个结果 (称为 Osgood 定理). 毫无疑问, Arzela 定理比传统的逐项积分定理要强得多, 根本无需一致收敛条件. 由此可见, 例题 10.2.4 和例题 14.1.1 之 (2) 都是它的特例. 同时也使我们明白, 使得逐项积分不成立的例题 14.1.1 之 (3) 和 (14.7) 也只能在无界情况下存在.

由于这个定理的魅力非凡, 引得许多第一流的分析学家为之折腰 (其中包括 Riesz, Bieberbach, Landau, Hausdorff 等), 在几乎一个世纪中致力于寻找其初等

证明. 这类证明目前已超过 10 个. 应该说这些证明还不能令人非常满意. 一个标志就是除了 [19] 卷 2 的第 14 章 §4 之外, 绝大多数教科书中均未收入 Arzela 定理及其证明, 最多只是提到该定理, 而且总是抱歉说证明太难了, 无法写入等等.

就我们所见, 1986 年由 Lewin 提出的一个初等证明比以前的那些要好得多, 也许有可能为低年级大学生所理解, 并被收入今后的某些分析教科书中. 下面就是根据美国数学月刊 93 卷 (1986) 395~396 页改写的证明. 对于此前的历史情况和发展请看该刊 78 卷 (1971) 970~979 页及其中的丰富文献, 还可参看 [44].

在进入证明之前需要作些准备: 其中包括技术和心理两方面的准备.

1. 若 $f \in R[a,b]$, s 为 $[a,b]$ 上的阶梯函数 (即分段常值函数), 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{s \leqslant f} \int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14.9}$$

其中记号 $s \leqslant f$ 是指满足条件 $s(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in [a,b]$. 学过 Darboux 积分理论的读者知道右边就是 **Darboux 下积分**的值. 直接从定积分的定义 (§10.1 节) 出发证明这个等式也是很容易的. 这里从略.

2. 要将 §3.2 节的闭区间套定理推广为 **非空有界闭集下降序列之交非空**.

定理 设 $\{A_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 内的**非空有界闭集序列**, 且单调下降, 即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, 则它们的交非空: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

这里的概念和证明都没有多少新意. 首先要给出实数集合 A 为**闭集**的定义: 如果点 a 的每个邻域中含有 A 中的点, 就有 $a \in A$. 然后用实数系中的某个基本定理就可以证明所需的结论. 参见第十七章的例题 17.2.1 闭集套定理.

3. 在下面的初等证明中需要克服的主要难点是如何处理诸如

$$\{x \in [a,b] \mid f(x) < \varepsilon\} \tag{14.10}$$

这样的实数集合. 这里所用的方法是考虑该集合中的特殊类型的子集合, 它们是区间或有限个区间之并, 然后用区间长度或长度之和来刻画集合 (14.10). 为此需要引入定义: 称有限个不交的有界区间的并集为**初等集**, 又称初等集 E 中的区间长度之和为 E 的**测度** $m(E)$.

就区间 $[a,b]$ 内的初等集而言, 它们的并、交与差仍为初等集. 又若 E 和 F 为初等集, 则 $m(E \cup F) \leqslant m(E) + m(F)$, 且当 E 与 F 不交时成立等号. 这些都可以推广到有限个初等集上去. 此外, 还需要**闭初等集**的概念, 它是有限个不交的有界闭区间的并集. 不难证明: 对于一个初等集 E 以及给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个闭初等集 $F \subset E$, 满足条件 $m(F) > m(E) - \varepsilon$.

以上的概念和结论都是非常简单和直观的, 证明从略.

4. 在以下证明中需要一个关于初等集的引理, 我们将在先承认它的前提下给出定理的证明, 然后再补充给出该引理的证明. 就前者而言思路很容易理解, 但后者则涉及集合运算中的一系列细节.

Arzela 定理的证明 对于给定的正数 $\varepsilon > 0$, 定义集合序列

$$A_n = \{x \in [a,b] \mid \exists\, i \geqslant n \text{ 使得 } |f_i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

则从 f_n 于 $[a,b]$ 上处处收敛于 f 可知 $\{A_n\}$ 为单调下降的有界数集序列, 且有:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing. \tag{14.11}$$

利用初等集的概念定义数列:

$$\alpha_n = \sup\{m(E) \mid E \text{ 为含于 } A_n \text{ 中的初等集}\},\ n = 1, 2, \cdots.$$

显然数列 $\{\alpha_n\}$ 为单调下降的非负数列. 从下面的引理 14.2.5 知 $\alpha_n \to 0$. 因此存在 N, 使得对 $n > N$ 和 A_n 中的每个初等集 E, 成立 $m(E) < \varepsilon$.

以下只需要证明对于 $n > N$ 的每个 n, 积分 $\displaystyle\int_a^b |f_n - f| \leqslant K\varepsilon$, 其中 K 是一个确定常数.

利用 (14.9), 只需要对 $n > N$ 和在 $[a,b]$ 上满足条件 $0 \leqslant s(x) \leqslant |f_n(x) - f(x)|$ 的每个阶梯函数 $s(x)$, 证明积分 $\displaystyle\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x < K\varepsilon$ 即可.

对于满足这个条件的阶梯函数 s, 定义两个集合

$$E = \{x \in [a,b] \mid s(x) \geqslant \varepsilon\}, \quad F = [a,b] - E,$$

显然 E 与 F 都是初等集.

由于 $E \subset A_n$, 因此 $m(E) < \varepsilon$. 而对于 $x \in F$, 则有 $s(x) < \varepsilon$. 再利用 $\{f_n\}$ 为一致有界就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E s(x)\,\mathrm{d}x + \int_F s(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2M \cdot m(E) + \varepsilon \cdot (b-a) \leqslant \varepsilon(2M + b - a).\end{aligned}$$

从 (14.9) 知对 $n > N$ 有

$$\int_a^b |f_n - f| \leqslant \varepsilon(2M + b - a).$$

利用 ε 的任意性和不等式 $\left|\displaystyle\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f_n - f|$, 可见已经得到所要的结论:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

注 在 Arzela 定理的条件中必须假定极限函数的可积性, 这一点在一致收敛条件下的逐项积分定理中是不需要的, 一致收敛条件可以将函数列的可积性"传递"给极限函数. 但是只要略微修改上述证明中的集合 A_n 的定义就可以证明, 即使没有极限函数 f 的可积条件, 积分值所成的数列

$$\left\{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

必是基本数列 (见上册 74 页), 因此一定收敛. 这强烈地表明: 逐项积分不能进行的原因是积分定义不够广泛. 由此即可引向实变函数论中的 Lebesgue 积分定义和 Lebesgue 控制积分收敛定理, 在那里不需要事先假定极限函数的可积性.

现在我们来补充证明上面已经用到的引理. 这个结论本身是非常直观的, 但需要细致的分析, 并在最后用非空有界闭集的下降序列必有非空交的定理.

命题 14.2.5 (Lewin 引理) 设 $\{A_n\}$ 为单调下降的有界数集序列, 且其交为空集 (见 (14.11)), 又定义数列

$$\alpha_n = \sup\{m(E) \mid E \text{ 为含于 } A_n \text{ 中的初等集}\},\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

证 用反证法. 设结论不真, 则单调减少的正数数列 $\{\alpha_n\}$ 的极限大于 0, 因此存在 $\delta > 0$, 使得对于每个 n 成立 $\alpha_n > \delta$.

对每个 n, 根据 α_n 的定义, 存在**闭初等集** $E_n \subset A_n$, 使得

$$m(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}.$$

这样得到的有界闭集序列 $\{E_n\}$ 未必单调下降, 为此再令

$$H_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_n,\ n=1,2,\cdots,$$

就得到单调下降的有界闭集序列 $\{H_n\}$. 从 $H_n \subset E_n \subset A_n\ \forall n \in \mathbf{N}_+$ 就有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n. \tag{14.12}$$

引理的条件是上式左边为空集 $\varnothing$, 因此只要证明每个 H_n 非空, 然后从非空有界闭集的下降序列有非空交的定理知 (14.12) 的右边非空, 就引出矛盾.

考虑 $A_n - H_n$ 中的任一初等集 E, 则从 H_n 为 $E_1,\cdots,E_n$ 之交知道有

$$E = E - H_n = E - \bigcap_{k=1}^{n} E_n = \bigcup_{k=1}^{n}(E - E_k). \tag{14.13}$$

记 $F_i = E - E_i,\ i=1,2,\cdots,n$. 则对于每个 i 有

$$m(F_i) + m(E_i) = m(F_i \cup E_i) \leqslant \alpha_i,$$

利用 $m(E_i) > \alpha_i - \dfrac{\delta}{2^i}$ 可知

$$m(F_i) < \frac{\delta}{2^i}\ \forall i=1,2,\cdots,n.$$

将这个结果代入 (14.13) 就得到 $m(E) < \delta$. 这表明 $A_n - H_n$ 中的任一初等集的测度小于 δ.

从 α_n 的定义和 $\alpha_n > \delta\ \forall n$ 可见, 如果 $H_n = \varnothing$, 则就可以取到一个初等集 $E \subset A_n$, 使得 $m(E) > \delta$. 由此推出每个 $H_n \neq \varnothing$, 从而在 (14.12) 中引出矛盾. 这表明一开始的假设错了, 只能有 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

注 这个引理与 Arzela 原来的引理比较, 可以认为有了很大的改进 (参见 [19] 的卷 2 第 487 小节). 从概念上看, 初等集只是**有限个**区间的并, 这在数学分析中是容易接受的. 此外, 还可以将引理的结论等价地叙述为更容易理解的事实: 若单调下降的有界数集之交非空, 则其中所含的任意初等集的长度一定趋于 0.

14.2.4 练习题

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$.
2. 确定函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的定义域, 并讨论其连续性与可微性.
3. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 在任意有界闭区间上一致收敛, 并且它的和函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.
4. 设 $\{S_n\}$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续的函数列, 且已知它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于函数 $S(x)$, 证明: 函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.
5. 设连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 且对 $\forall\,\varepsilon\in(0,b-a)$, $\{f_n\}$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上一致收敛. 如果存在 $g\in R[a,b]$, 使
$$|f_n(x)|\leqslant g(x),\ x\in[a,b],\ n=1,2,\cdots,$$
证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
6. 设函数列 $\{f_n\}$ 于点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中收敛于函数 f, 又设每个 f_n 于点 x_0 连续, 证明: f 在点 x_0 连续的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists N$, 使得对于每个 $x\in O_\delta(x_0)$, 成立 $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.
7. 设函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于函数 $f\in C[a,b]$, 证明: $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对于 $[a,b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.
8. 设可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 且已知每个 f_n 在 $[a,b]$ 上有原函数, 证明: f 在 $[a,b]$ 上也有原函数.

§14.3 幂级数的收敛域与和函数

幂级数是最重要的一类函数项级数, 具有多方面的应用. 它可以看成是多项式的直接推广. 反之, 每个多项式都可以看成是非零项数有限的幂级数. 幂级数在收敛性态以及和函数的性质方面有许多特殊的良好性质.

为方便起见, 在幂级数研究中常用记号 $<a,b>$ 代表 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ 和 $[a,b]$ 中的任意一个, 并称 (a,b) 为 $<a,b>$ 的**内部**.

14.3.1 幂级数的基本理论

幂级数的一般形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 称 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 为**幂级数的系数**. 幂级数在

收敛、绝对收敛和一致收敛方面都有非常独特的结论, 这就是以下两个由 Abel 建立的定理.

命题 14.3.1 (Abel 第一定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域一定是以 x_0 为中心的区间 $<x_0-R, x_0+R>$, 且于其内部 (x_0-R, x_0+R) 处处绝对收敛 (其中 $R \geqslant 0$ 称为该幂级数的收敛半径).

命题 14.3.2 (Abel 第二定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 必于其收敛域中内闭一致收敛[①].

幂级数的和函数除了连续性之外, 还具有以下特殊性质:

命题 14.3.3 若幂级数的收敛半径大于 0, 则其和函数在幂级数的收敛域内部无限次可微, 且可逐项求积和逐项求导.

幂级数的另一个重要结果是计算收敛半径的 **Cauchy-Hadamard 公式:**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{14.14}$$

(若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 则 $R = +\infty$). 这个公式完全解决了收敛半径的计算. 但有时用其他方法可能更方便. 例如, 若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, 则这个极限值也等于 R.

建立以上基本内容的各种证明都是应用函数项级数的基本理论的极好例题. 希望初学者重视并能独立推导.

14.3.2 思考题

1. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 a, b 两点收敛 $(a<b)$, 问: 该级数在 $[a,b]$ 上的收敛、绝对收敛和一致收敛的情况如何?
2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n b_n)x^n$的收敛半径.
3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径是 R, 且在 (x_0-R, x_0+R) 上一致收敛, 问该级数在 $x = x_0 \pm R$ 处的敛散性怎样?
4. 问: 是否可以用 Weierstrass 判别法 (即优级数判别法) 证明 Abel 第二定理 (即命题 14.3.2)?

① 这里从一致收敛性来叙述 Abel 第二定理. 在该定理的应用中的常见形式为: 若幂级数在其收敛域的端点收敛, 则和函数在该端点处 (单侧) 连续.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 试问:

(1) 是否成立 $\int_0^R \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} R^{n+1}$?

(2) 如果上式右边的级数收敛, 上式是否成立?

6. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 问 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径是多少?

7. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$, 和函数为 $S(x)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 能否推出极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$ 不存在? (试考虑 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 则答案如何?

14.3.3 例题

由于 Cauchy-Hadamard 公式解决了收敛半径的计算, 因此在确定幂级数的收敛域时, 难点往往在于端点处的敛散性. 下面是一个典型例题.

例题 14.3.1 确定幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ 的收敛域, 其中

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ n=1,2,\cdots.$$

解 若 α 为非负整数, 则级数只有有限个非零项, 因此收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 否则从 $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ 可见收敛半径 $R=1$. 以下只需讨论两个端点 $x=\pm 1$. 对于 $x=1$ 的讨论已见例题 13.3.2, 结论为: 当 $\alpha \leqslant -1$ 时级数发散, 且其通项不趋于 0; 当 $\alpha>0$ 时绝对收敛; 当 $-1<\alpha<0$ 时条件收敛.

当 $x=-1$ 时, 前两种情况的结论不变, 而当 $-1<\alpha<0$ 时级数不再是交错级数, 因此也是发散的. □

下一个例题是 Gauss 的工作. 历史上它是对级数收敛性进行严密研究的第一个重要例子 (参见 [26] 的第四册 20 页).

例题 14.3.2 (超几何级数) 设 α,β,γ 均不取负整数或 0, 确定幂级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

的收敛域.

解 易见收敛半径为 1, 因此只要讨论 $x=\pm 1$ 时级数的收敛性.

引用 (13.24) 或 (13.41), 存在常数 $C \neq 0$, 使得通项的绝对值有渐近公式:

$$\left|\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\right| \sim \frac{C}{n^{1+\gamma-\alpha-\beta}}.$$

由此可见，$\gamma-\alpha-\beta>0$ 是级数于两端绝对收敛的充分必要条件，而 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时级数通项不是无穷小量，因此都发散.

当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，在 $x=1$ 处级数当 n 充分大时为正项级数，因此发散. 而当 $x=-1$ 时级数当 n 充分大时为通项趋于 0 的交错级数. 从前后项之比的分析

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

可见当 n 充分大时通项绝对值单调减少，因此条件收敛. □

由于幂级数可以在其收敛区间的内部逐项积分和逐项微分，这往往可以用于求出某些幂级数的和函数. 下面就是这方面的几个例题.

例题 14.3.3 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数.

解 当然首先需要确定级数的收敛域，这就是和函数的定义域. 然后可以有不同的方法做. 下面只给出提示，细节从略.

方法 1: 由 $(2n+1)x^{2n}=(x^{2n+1})'$ 出发可以试用逐项积分法求解.

方法 2: 改写级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n,$$

然后作代换 $y=x^2/2$ 并利用在 $|y|<1$ 时的恒等式

$$\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n,\quad \frac{1}{(1-y)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$$

就可以计算出和函数.

答案为: 和函数 $S(x)=\dfrac{x^2(6-x^2)}{2(2-x^2)^2}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. □

例题 14.3.4 求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数.

解 求出级数的收敛半径为 1，又可判定级数于 $x=\pm1$ 均收敛，因此级数的收敛域是 $[-1,1]$.

可以看出两次逐项求导后可以得到易于求和的级数. 设和函数为 $S(x)$，则在 $(-1,1)$ 中得到

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

和

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}.$$

因为 $S'(0)=0$, 所以 $S'(x)=\int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x), x\in(-1,1)$.

再由 $S(0)=0$, 得 $S(x)=\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\ln(1+x)-x, x\in(-1,1)$.

最后, 由 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 因此上面所得的表达式对 $x=1$ 也成立. 但对于 $x=-1$ 则需求极限

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}[(x+1)\ln(1+x)-x]=1. \quad \square$$

例题 14.3.5 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数.

解 用 Wallis 公式 (11.29) 容易确定收敛域为 $[-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$. 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导, 得到

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x).\end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x).$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$[\sqrt{1-x}S(x)]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)]\equiv 0.$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数. 再利用 $S(0)=1$, 就得到

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ -1<x<1. \tag{14.15}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续, 而上式右边的表达式也是如此, 因此 (14.15) 对 $x=-1$ 也成立. $\square$

需要提出与 Abel 第二定理有关的下列问题: 即若已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛, 能否推出数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛并求其和呢? 可以看出这就是问: Abel 第二定理的逆定理是否成立? 当然这不是无条件的. 这里有很多研究, 即寻求 $\{a_n\}$ 应当满足什么样的条件, 所得到的结果一般称为 Tauber 定理 (见 [55] 的第五章). 下面就是这方面较容易的一个结果.

命题 14.3.4 (Tauber 定理) 设已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上成立, 如果 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S$.

证 采用三分法 (参见 14.2.1 小节), 写出

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right|. \quad (14.16)$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 由 Cauchy 命题得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} = 0$. 又由 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|S\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - S\right| = 0$. 因此 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 N, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{3},\ n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ \left|S\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, 则对于 (14.16) 右边的第一项有估计

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1})\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x)k = \frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{3},$$

对于 (14.16) 右边的第二项有估计

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3n} \cdot \frac{1}{1 - x} = \frac{\varepsilon}{3n \cdot \dfrac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3},$$

对于 (14.16) 右边的第三项有估计

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right| = \left|S\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

所以当 $n > N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - S\right| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

注 对比命题 14.2.1, 命题 14.2.3 和本题中的三分法, 可以看出它们有共同点, 也有不同点. 就本题而言, (14.16) 右边的 x 在左边并不出现. 但又必须与 1 充分接近, 而且其接近程度还要与 n 有关, 这是本题比前两次三分法更为复杂之处. 取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$ 就是为了这个目的.

14.3.4 练习题

1. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2} \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $k > 1$ 为整数.

2. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_0 \neq 0$, 试求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}} x^n$ $(a > 0)$ 的收敛半径.

4. 对任意正整数 k, 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ 的收敛半径为 k^k, 收敛域为 $(-k^k, k^k)$.

5. 求下列幂级数 (或广义幂级数) 的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n+(-b)^n}{n}x^n,\ a,b>0$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{3n}(x^2+x+1)^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)^n$.

6. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n^2-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{n+2}-1)x^{2n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$.

7. 证明: $u(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n)!}x^{4n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足微分方程 $u^{(4)}=u$.

8. 证明: Bessel 函数 $J_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}$ 在 $x\neq 0$ 时满足微分方程

$$xu''+u'+xu=0.$$

9. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ln(1+n)}x^n$, 证明:

(1) 函数 $S\in C[-1,1]$;

(2) $S'_+(-1)$ 有限, 而 $S'_-(1)=+\infty$.

(可参考上册 194 页命题 7.1.7 和本章 14.3.2 小节的第 7 题.)

10. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}x^n$, 证明: 函数 f 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上连续, 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上可导, 并讨论 f 在 $\frac{1}{2}$ 处的可导性.

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1$. 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

12. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$, 将级数的部分和函数列记为 $\{S_n\}$, 将和函数记为 S, 证明: 函数列 $\{S \circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $S \circ S$.

13. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 记 $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $n=0,1,\cdots$. 证明: (1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 有相同的收敛半径; (2) 若 $a_n \geqslant 0$, $n=0,1,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

§14.4 函数的幂级数展开

由于幂级数可以看成为多项式的直接推广, 因此如果一个函数能够在某个区间上展开为幂级数, 则就提供了研究和计算这个函数的有效手段①.

14.4.1 Taylor 级数与函数的幂级数展开式

设函数 f 在区间 I 上有定义, x_0 为 I 的一个内点, 如果存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使在该邻域内成立等式 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, 则称 f 能在 x_0 附近 (也称在点 x_0 处) 展开为幂级数, 并将该幂级数称为 f 在点 x_0 的**幂级数展开式**.

由幂级数理论可见, f 能够在点 x_0 展开为幂级数的必要条件是 f 在点 x_0 处无限次可导. 利用幂级数在其收敛域内部可以无限次逐项求导就可以知道, 如果在点 x_0 邻近成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

则一定有 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0,1,\cdots$. 因此, 如果 f 能够在点 x_0 附近展开为幂级数, 则这个展开式是惟一的, 其系数是完全确定的.

现设函数 f 在点 x_0 处无限次可微, 则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{14.17}$$

为函数 f 在 x_0 处的 **Taylor 级数** (在 $x_0=0$ 时, 又称幂级数 (14.17) 为 f 的 **Maclaurin 级数**). 由上面的讨论已经得到下面的命题, 它说明函数 f 在 x_0 处的 Taylor 级数与其在 x_0 处的幂级数展开式之间的基本关系:

① 即使对于初等函数来说, 这也是十分重要的. 因为如 $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ 和 e^x 等只不过是记号, 并没有提供计算它们的方法. 除了多项式之外, 初等函数的具体计算以及在计算器和电脑中的使用, 都是以幂级数展开式为基础的.

命题 14.4.1 (幂级数展开的惟一性定理) 如果函数 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内能够展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 则这个幂级数展开式是惟一的, 而且它就是 f 在 x_0 处的 Taylor 级数.

仔细检查上面的概念, 就可以发现, 为了将一个函数于某点附近展开为幂级数, 有几个重要的问题是必须研究的:

1. 若 f 在点 x_0 处无限次可微, 则按照 (14.17) 写出的 Taylor 级数是否一定有正收敛半径?

2. 若 f 在点 x_0 处无限次可微, 并且 f 在 x_0 处的 Taylor 级数有正收敛半径, 则在收敛域上该级数的和函数是否一定等于 f?

可以举例说明, 对这两个重要问题的回答都是不一定.

就问题 1 来说, 在许多教科书中都收入了下列函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}. \tag{14.18}$$

如果计算出这个函数在原点的所有阶导数值, 就可以证明所得到的 Maclaurin 级数的收敛半径为 0. 其他例子可以参考 [22] 等. 这些例子容易值人以为它们是少有的精品. 但是在数学通报 (10) (1964) 38~40 页的一文中证明了下列命题, 从而完全改变了人们的看法 (又见美国数学月刊 88 卷 (1981) 51~52 页和 [52]).

命题 14.4.2 每个幂级数都是 Taylor 级数.

证 只需证明对于任意给定的数列 $\{a_n\}$ 存在函数 f, 值满足 $f^{(n)}(0)=n!a_n$ $(n \in 0,1,\cdots)$ 即可. 这里当 $n=0$ 时记号 $f^{(0)}(0)=f(0)$. 与 (14.18) 相类似, 这样的函数可以用无穷级数构造出来.

首先介绍其中的基本 "构件": 对于指定的自然数 n 和常数 h, 可以构造一个无限次可微函数, 使它在原点的 n 阶导数等于 h, 而所有其他阶导数都等于 0. 先定义在三个区间上分别取常值的函数

$$f(x) = \begin{cases} h, & |x| \leqslant \dfrac{1}{2|h|+1}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{2}{2|h|+1}, \end{cases} \tag{14.19}$$

然后在 f 已有定义的区间之间用无限次可微的单调函数相连接 (这里可以用上册 171 页例题 6.2.5 中的方法), 从而得到在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无限次可微函数. 在图 14.3 中作出了参数 $h=1$ 的函数 f 的图像, 其中 f 在 $x \geqslant 2/3$, $x \leqslant -2/3$ 和 $-1/3 \leqslant x \leqslant 1/3$ 三个区间上均取常值,

这个函数 f 满足条件 $f(0)=h$, $f^{(n)}(0)=0\ \forall n>0$. 改记 $f=f_0$, 定义 $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f_1'(x)=f_0(x)$, $f_1'(0)=h$, $f_1^{(n)}(0)=0\ \forall n \neq 1$. 归纳地定义

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,$$

就知道 $f_n^{(k)}(0) = 0\ \forall k \neq n,\ f_n^{(n)}(0) = h.$

同时还可以作出与 h 无关的估计. 从

$$f_n^{(n-1)}(x) = \int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

可知, $|f_n^{(n-1)}(x)| < 1$, 即在图 14.3 中的曲线下面积小于 2.

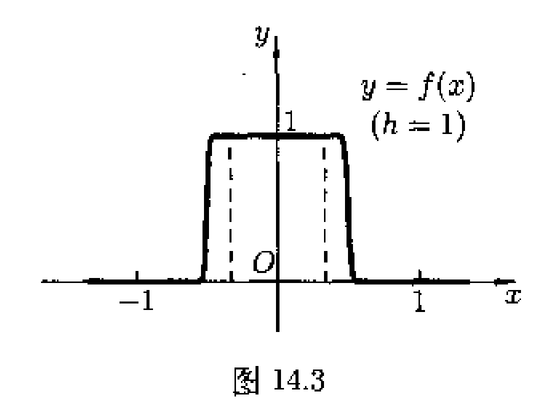


图 14.3

由此出发作积分, 就可以归纳地证明:

$$|f_n^{(k)}(x)| < \frac{|x|^{n-1-k}}{(n-1-k)!},$$


其中 $0 \leqslant k < n.$

现在对于每个非负整数 n 取 $h = a_n n!$, 用上面的方法构造出在 $(-\infty, +\infty)$ 上无限次可微的函数列 $\{u_n\}$, 使满足条件

$$u_n^{(k)} = 0\ \forall k \neq n,\ u_n^{(n)}(0) = a_n n!,$$

同时有估计 $|u_n^{(k)}(x)| < \dfrac{|x|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\ \forall 0 \leqslant k < n.$

现在定义下列函数项级数及其和函数:

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = U(x). \tag{14.20}$$

由以上估计可知, 不仅级数 (14.20) 在任意有界闭区间上一致收敛, 而且在任意次逐项求导后的级数也一致收敛, 因此 $U(x)$ 无穷次可微, 且其导数可以用级数的逐项求导来得到. 这样就得到 $U^{(n)}(0) = u_n^{(n)}(0) = n!a_n.$ □

注 根据上述命题, 只要取 $\{a_n\}$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 0, 这样就得到收敛半径为 0 的 Taylor 级数.

就问题 2 来说, 上册 169 页的例题 6.2.4 已提供了这样的例子. 这就是

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处无限次可微, 在 $x = 0$ 处的任意阶导数值为 0, 因此在该点的 Taylor 级数的每一项为 0, 收敛半径当然是 $R = +\infty$. 但是这个级数在 $x \neq 0$ 的每一点上的和函数值都不等于 $f(x)$ 的值. 因此, 这个函数在 $x = 0$ 处也不能展开为幂级数 (参见上册 169 页的图 6.4) ①.

解决函数是否能展开为幂级数的工具是第七章中的 Taylor 公式: 设 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 中无限次可微, 则对于每个 n 有

① 将这个函数及其倍数加到任意一个 Maclaurin 级数上去, 就可以知道有无限多个函数具有相同的 Maclaurin 级数, 但其中至多只有一个函数以此级数为其幂级数展开式.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),$$

其中余项可以有多种形式 (见命题 7.2.3, 7.2.4 或命题 11.4.3). 将此式改写为

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{14.21}$$

并与 (14.17) 作比较, 就可以看出, 这里的 $r_n(x)$ 就是 $f(x)$ 与其 Taylor 级数的第 $n+1$ 个部分和函数之差. 因此就可以建立下列基本结论:

命题 14.4.3 f 在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 能展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的充分必要条件是 f 的 Taylor 公式的余项 (14.21) 在邻域 $U(x_0)$ 内处处收敛于 0.

证 先证必要性. 设 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的和函数. 根据命题 14.4.1 可知, 这个幂级数只能是 Taylor 级数 (14.17). 由于该级数收敛, 因此该级数作为收敛级数的余项就是 Taylor 公式的余项 (14.21). 于是已经证明了 $r_n(x)$ 在该邻域内处处收敛于 0.

再证充分性. 若 $\{r_n(x)\}$ 在某个邻域 $U(x_0)$ 内处处趋于 0, 则从 (14.21) 可见 Taylor 级数 (14.17) 有正收敛半径, 且至少在 $U(x_0)$ 上以 $f(x)$ 为其和函数. □

注 1 由此可见, 利用 Taylor 公式的余项在理论上可以同时解决 Taylor 级数 (14.17) 是否有正收敛半径以及其和函数是否等于 $f(x)$ 的问题.

注 2 初学者往往容易将第七章的 Taylor 公式与本节的 Taylor 级数混淆, 因此这里简要地指出二者的差别: 第七章的 Taylor 公式并不涉及无限项求和问题, 其中只有有限项. 同时, 对于函数 f 的要求也只需要有若干次可微性. 这些都与本节的 Taylor 级数不同. 在上册 204 页开始引入的 Taylor 公式的余项概念与无穷级数中的余项概念完全不同. 在命题 14.4.3 的证明中的关键之处就在于这两个余项在命题的条件下可以等同起来.

14.4.2 将函数展开为幂级数的基本方法

与 7.2.2 小节中计算 Taylor 公式的方法类似, 将给定的一个函数在指定点附近展开为幂级数有直接法与间接法两种方法. 本节中将较多地介绍间接法. 这里的原因是容易理解的. 所谓**直接法** 或**直接展开法**, 就是利用命题 14.4.1 写出级数 (14.17), 然后再用命题 14.4.3 证明余项趋于 0. 因此用直接法首先需要计算函数在展开点的所有高阶导数, 又为了研究余项, 还需要计算 f 的所有**高阶导函数**, 而这往往是更困难的工作. 在教科书中也只是对于少数几个初等函数采用直接法得到它们的幂级数展开式. 因此我们将较多地介绍间接法.

下面六个基本的 Taylor 级数就是应用间接法的基础, 希望初学者把它们作为数学分析中最重要的公式牢牢记住.

1. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$;

2. $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

3. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

4. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,\ x\in(-1,1]$;

6. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$,

其中 α 为不等于非负整数的任何实数, 而展开式成立的范围当 $\alpha\leqslant-1$ 时为 $(-1,1)$, 当 $-1<\alpha<0$ 时为 $(-1,1]$, 当 $\alpha>0$ 时为 $[-1,1]$.

注 上面的 Taylor 级数 6, 即**二项式级数**, 是一个十分有用的幂级数展开式. 例如上面的级数展开式 1 实际上是二项式级数的特例, 只要在其中将 x 换为 $-x$ 并且取 $\alpha=-1$ 即可. 只是由于该展开式的重要性, 我们单独把它作为一个展开式列出. 级数展开式 5 也可以用先对 $\ln(1+x)$ 求导, 再对 $\alpha=-1$ 时的二项式级数逐项积分得到. 在下面的例题中, 我们还会再用二项式级数推出一些常见的初等函数的幂级数展开式.

这里需要说明, 所谓间接法并没有明确的范围, 实际上只要不是用直接法就都是间接法. **间接法的理论基础**是幂级数展开的惟一性定理 (即命题 14.4.1). 根据这个定理, 不论用什么方法, 只要所得到的幂级数有正收敛半径就可以. 其中当然可以使用四则运算和微积分运算. 对于乘法运算, 由于幂级数在收敛域内部的绝对收敛性, 而乘积级数按照幂级数形式写出时恰好就是 Cauchy 乘积, 因此在 13.3.2 小节中的命题 13.3.4 已经解决了幂级数的相乘问题. 但是对于除法, 则需要有新的理论根据. 下面是这方面的一个命题, 取自 [57].

命题 14.4.4 设函数 f 在 $x=0$ 邻近可以展开为幂级数 $1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$, 则其倒函数 $\dfrac{1}{f}$ 也可以在 $x=0$ 邻近展开为幂级数.

证 从给出收敛半径的 Cauchy-Hadamard 公式可以知道, 存在 $r>0$, 使得 $|a_n|<r^n$ 对每个 $n=1,2,\cdots$ 成立. (此点请读者根据公式 (14.14) 作出证明.)

现在先作形式计算, 即求待定的数列 $\{b_n\}$, 使得成立

$$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)(1+b_1x+b_2x^2+\cdots)=1. \tag{14.22}$$

将左边的乘积展开, 并等置两边同次数的乘幂项, 就得到计算 $\{b_n\}$ 的递归公式:

$$b_1=-a_1,\ b_2=-a_1b_1-a_2,\ \cdots$$

$$b_n=-a_1b_{n-1}-a_2b_{n-2}-\cdots-a_n,\ \cdots.$$

现在我们用数学归纳法来证明, 对于 $\{b_n\}$ 有下列估计式:

$$|b_n| < 2^{n-1}r^n,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{14.23}$$

对于 $n=1$, 有 $|b_1| = |a_1| < r$, 因此符合 (14.23). 设估计式 (14.23) 对于 $n = 1, 2, \cdots, k-1$ 成立, 则对于 $n = k$ 就有

$$\begin{aligned}|b_k| &\leqslant |a_1 b_{k-1}| + |a_2 b_{k-2}| + \cdots + |a_{k-1} b_1| + |a_k| \\ &\leqslant (2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 1 + 1) r^k = 2^{k-1} r^k.\end{aligned}$$

因此估计式 (14.23) 成立.

利用这个估计式, 从 Cauchy-Hadamard 公式 (14.14) 就知道, 幂级数

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

至少在 $|x| < \dfrac{1}{2r}$ 时收敛. 从而当 $|x| < \min\{r, \dfrac{1}{2r}\}$ 时, 等式 (14.22) 不只是作形式运算 (即待定系数法) 的出发点, 而且是严格成立的. 这也就是所要的结果: 即在 $x = 0$ 的一个等域内有幂级数展开式:

$$\frac{1}{1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots. \quad \square$$

注 1 在这个命题的基础上再结合级数相乘, 就可以得到幂级数相除的一般结论: 若 $f = g/h$, 其中函数 g 和 h 在点 x_0 的邻近都可以展开为幂级数, 且 $h(x_0) \neq 0$, 则 f 也可以在 x_0 邻近展开成幂级数, 同时这个级数的系数可以用类似于上述命题证明中的待定系数法来得到.

注 2 在 [19] 的卷 2 第 419 小节中证明了更为一般的命题. 这里只叙述其结论, 证明从略. 还可以参考 [16] 的第二章.

命题 设幂级数展开式 $y = f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 0$ 邻近成立, 又有幂级数展开式 $z = \varphi(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ 在 $(-\rho, \rho)$ 中成立, 如果满足条件 $|a_0| = |f(0)| < \rho$, 则复合函数 $z = \varphi(f(x))$ 在 $x = 0$ 的邻近可以展开为幂级数, 同时其系数可以用级数代入级数的待定系数法得到.

14.4.3 例题

这一节的内容与 7.2.2 和 7.2.3 小节的部分内容有密切联系. 那里的许多 Taylor 公式的计算可以作为本节的特例得到, 而且当时的间接法还只有级数代入级数之类的方法, 现在则还可以用逐项求积与逐项求导方法.

以下第一个例题中的两个初等函数的 Maclaurin 展开可以用直接法得到, 也可以用逐项积分的间接法得到. 后者无疑更为方便. 初学者应当重视这些基本训练, 同时也应当记住这两个基本的 Taylor 级数展开式.

例题 14.4.1 用间接法求 $\arctan x$ 与 $\arcsin x$ 的 Maclaurin 级数展开式.

证 (1) 由于 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{(1+x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, 用逐项积分就得到

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \ x \in (-1,1).$$

(2) 由于 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, 用逐项积分就得到

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} + \cdots, \ x \in (-1,1).$$

注意: 用 Abel 第二定理知道两个展开式都在端点 $x = \pm 1$ 处成立. □

例题 14.4.2 现在求正弦和余弦之外的四个三角函数的 Maclaurin 展开式 (其中 $\cot x$ 和 $\csc x$ 是在乘以因子 x 之后的 Maclaurin 展开式). 仿照上册 216 页中的做法, 并应用命题 14.4.4, 就得到 Maclaurin 级数展开式

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots, \tag{14.24}$$

其中左边的表达式在点 $x = 0$ 时用其极限值 1 来代替. 与 7.2.3 小节中的记号相同, $\{B_n\}$ 为 **Bernoulli 数**, 其中 $B_1 = -1/2$, 当 n 为大于 1 的奇数时 $B_n = 0$. 以下采用记号 $\overline{B}_n = (-1)^{n-1} B_{2n}$.

由此出发就可以与例题 7.2.8 和 7.2.9 类似地得到 Maclaurin 级数展开式

$$x \cot x = 1 - \frac{\overline{B}_1 2^2}{2!} x^2 - \frac{\overline{B}_2 2^4}{4!} x^4 + \cdots - \frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \tag{14.25}$$

$$\tan x = \frac{\overline{B}_1 (2^2 - 1) 2^2}{2!} x + \frac{\overline{B}_2 (2^4 - 1) 2^4}{4!} x^3 + \cdots + \frac{\overline{B}_n (2^{2n} - 1) 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots. \tag{14.26}$$

再利用三角恒等式 $\csc x = \dfrac{1}{2}\left(\cot \dfrac{x}{2} + \tan \dfrac{x}{2}\right)$, 即可得到

$$x \csc x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{B}_n (2^{2n} - 2)}{(2n)!} x^{2n}. \tag{14.27}$$

最后, 回顾例题 7.2.7 并应用命题 14.4.4 就可以得到

$$\sec x = E_0 - \frac{E_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \tag{14.28}$$

其中 $\{E_{2n}\}$ 为 **Euler 数** (见上册 215 页)[①].

① 根据第十六章例题 16.2.3 后的注, 利用渐近等式 (16.13), 即 $\overline{B}_n \sim \dfrac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$, 就很容易确定 (14.24), (14.25), (14.26) 和 (14.27) 四个 Maclaurin 级数的收敛半径分别为 2π, π, $\pi/2$ 和 π. 又从 $\sec x = \left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \cdot (x \csc x)$ 和级数乘积定理, 就可以推出 (14.28) 的收敛半径为 $\pi/2$. 最后, 根据 Abel 第二定理即可确定所有这些展开式的准确的成立范围.

例题 14.4.3 求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ 在 (1) $x_0=0$ 和 (2) $x_0=-\dfrac{1}{2}$ 处的幂级数展开式.

解 (1) 这时可以如下计算:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}\\&=(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+\cdots)-(x+x^4+x^7+x^{3n+1}+\cdots)\\&=1-x+x^3-x^4+\cdots+x^{3n}-x^{3n+1}+\cdots,x\in(-1,1).\end{aligned}$$

这就是所求的幂级数展开式.

(2) 为了将函数 f 展开成关于 $x+\dfrac{1}{2}$ 的乘幂的幂级数, 可计算如下:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]^n\\&=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{4}{3})^n\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

其中应用了上一节中列举的基本公式之 1, 即关于 $\dfrac{1}{1-x}$ 的幂级数展开式. 从以上计算过程不难看出级数展开式的有限范围为 $\left|\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right|<1$, 即是 $x\in(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$. □

注 如果注意到

$$\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots,\\ 0, & n=3k+2,\end{cases}$$

则可以将 (1) 的幂级数展开式改写为

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}x^n,\ x\in(-1,1).$$

例题 14.4.4 求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 用级数乘法即可得到在 $(-1,1)$ 中成立幂级数展开式:

$$\ln^2(1+x)=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)x^n. \tag{14.29}$$

当 $x=1$ 时右边级数收敛, 从 Abel 第二定理知该展开式在 $x=1$ 时仍成立. □

例题 14.4.5 设 a 不是 π 的整倍数. 求函数 $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 用待定系数法计算如下. 设

$$\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

两边乘以 $1-2x\cos a+x^2$ 并等置两边同次项, 就可求出

$$a_0=0,\ a_1=\sin a,\ a_2=\sin 2a,\cdots,a_n=\sin na,\cdots.$$

因此 $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin na$. 容易看出右边的级数在 $x\in(-1,1)$ 上收敛. 而当 a 不是 π 的整倍数时, 数列 $\{\sin na\}$ 不趋于 0, 因此级数的收敛域就是 $(-1,1)$. □

上面所举的例题都用间接展开法, 但这并不等于说, 间接法总是比直接法好, 下面这道例题, 用直接法要比用间接法容易一些.

例题 14.4.6 求 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 如果用间接展开法, 则需要将 e^x 与 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式相乘, 运算将较为复杂. 因此我们采用直接展开法. 首先, 可用数学归纳法证明公式 $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})$, 由此得到

$$f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4},\ n=1,2,3,\cdots.$$

这样就得到所求的 Maclaurin 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n. \tag{14.30}$$

按照直接法的一般步骤, 到这里为止还不知道级数 (14.30) 是否收敛于 $\mathrm{e}^x\sin x$, 因此需要应用命题 14.4.3 去研究 Taylor 公式的余项. 但是这里可以避免这一步. 利用 e^x 和 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式均在 $(-\infty,+\infty)$ 成立, 因此处处绝对收敛. 应用级数乘积定理 (命题 13.3.4), 就可以知道 $\mathrm{e}^x\sin x$ 也能够展开为幂级数, 且收敛半径也是 $+\infty$. 再利用幂级数展开的惟一性定理 (即命题 14.4.1), 可见 (14.30) 必定在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 $\mathrm{e}^x\sin x$. □

14.4.4 练习题

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ 分别按 x, $x-b$, $\dfrac{1}{x}$ 的乘幂展开.
2. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开为 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.
3. 设函数 f 在区间 $(-a,a)$ $(a>0)$ 内无限次可微, 且导函数序列 $\{f^{(n)}\}$ 在 $(-a,a)$ 上一致有界, 证明: f 在 $(-a,a)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数.

4. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可导, 并且其导函数列在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致有界, 如果存在正数数列 $\{x_n\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 且 $f(x_n)=0,\ n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

5. 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并确定其成立范围:

(1) $\sqrt{4-x}$; (2) $a^x,\ a>0$;

(3) $\ln(1+3x+2x^2)$; (4) $\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(5) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$; (6) $\dfrac{e^{x^2}}{1-x^2}$;

(7) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$; (8) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

6. 将下列函数在指定点展开为幂级数:

(1) $\dfrac{1}{3+x},\ x=2$; (2) $\ln\dfrac{1}{3+2x+x^2},\ x=-1$;

(3) $\ln x,\ x=3$; (4) $\dfrac{x-1}{x+1},\ x=1$;

(5) $\sin x,\ x=\dfrac{\pi}{6}$.

§14.5 对于教学的建议

14.5.1 学习要点

1. 一致收敛性是函数项级数与函数列中最重要也是最困难的概念. 对于这个概念的掌握需要花很大力气. 初学者首先要能正确叙述 “一致性” 的有关论述, 记住一些重要的反例, 如函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性讨论可以很形象地体现出 “一致性” 论述中的要点. 其次, 要能体会一致收敛性在将通项函数或函数列的分析性质 “传递” 给和函数或极限函数时的重要性.

2. 本章的一个难点是在函数项级数与函数列的概念中, 同时出现了两个变量: 正整数变量 n 与连续变量 x. 在处理收敛、一致收敛问题或讨论和函数与极限函数的分析性质时, 同学往往不容易分辨清楚何时该将哪个变量看成常量. 可以向同学强调的是, 在考虑两个极限的累次极限时, 计算第一个极限时, 应该把另一个变量看作常量; 同样, 对极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{|S_n(x)-S(x)|\mid x\in E\}$, 计算 $\sup\{|S_n(x)-S(x)|\mid x\in E\}$ 时, 要把 n 看作常数. 另外, 在讨论与点收敛有关的问题时, x 可以看作常数, 而讨论与一致收敛有关的问题时, 则 x 一般不能看作常数.

3. 尽管一致收敛性有很多判别法, 但最常用的一致收敛性判别法还是 M 判别法. 能用多种手段找出优级数是一致收敛性判别法部分的基本教学要求.

4. 函数项级数的和函数的连续性、逐项求导、逐项积分等本质上是运算次序的交换. 这里极限顺序交换的基本原理是很基本的一个事实, 在一系列问题中起指导作用.
5. 和函数 (极限函数) 在一个区间上的局部分析性质, 如连续性、可微性等都可以通过在每一点的邻域上的讨论而得. 因此, 可以用内闭一致收敛取代一致收敛, 即使是求积分, 也可先考虑内闭区间上的逐项积分. 如证明 Riemann 的 zeta-函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的无穷次可微, 求积分

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\right)\mathrm{d}x$$

的值等都是一些典型的例子.
6. 一般项的函数项级数的讨论可围绕一些重要的例子, 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 等展开, 抓住重点, 举一反三.
7. 幂级数部分的教学除了以 Abel 定理为中心的基本理论之外, 应注意应用能力的培养, 如间接展开、定积分计算、求重要级数的和等.
8. 幂级数是一种特殊的函数项级数, 因此, 本章前两节中关于函数项级数的一切结论, 对于幂级数都是适用的. 在教学中, 遇到需要用这些结论时, 可复习一下一般函数项级数的对应结论, 以起到温故知新的作用.

14.5.2 参考题

第一组参考题

1. 试举例: 在 $[0,1]$ 上一致收敛于连续函数的函数列 $\{S_n(x)\}$, 但每个 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续.
2. 用逐项求导方法写出函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的任意阶导数的表达式, 并证明运算的合理性.
3. 证明 Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛域具有以下特性: 若存在 x_1,x_2, 使 $x=x_1$ 时级数发散, 而当 $x=x_2$ 时级数收敛, 则一定存在 $r\in(-\infty,+\infty)$, 使 $x<r$ 时级数发散, 而 $x>r$ 时级数收敛.
4. 设 $f\in C[0,1]$, 定义函数列 $S_n(x)=x^nf(x)$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$, 证明: $\{S_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛的充分必要条件是 $f(1)=0$.
5. 设数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内的所有有理点的一个排列, 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n},\ x\in[0,1]$$

具有性质: (1) 处处连续; (2) 在 $[0,1]$ 的每个无理点处可微, 而在每个有理点处不可微.

6. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上无穷次可微且不恒等于 0, $f^{(n)}(0)=0, n=0,1,\cdots$. 如果函数列 $\{a_n f^{(n)}\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0, 其中 $\{a_n\}$ 为一给定的数列, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=0$.

7. 用幂级数方法证明级数乘积的一个基本结果 (即命题 13.3.7): 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛, 且分别以 A, B, C 为和, 则 $C=AB$.

8. 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

   (1) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(2) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(3) $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$

   (函数在 $x=0$ 处用极限值定义).

9. 设数列 $\{a_n\}$ 有极限 L, 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=L$.

10. 设多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 P, 证明: P 也是多项式.

11. 设 $\{P_n\}$ 是次数不超过 D 的多项式序列, 证明: 若该序列于区间 $[0,1]$ 上收敛, 则也一定一致收敛.

12. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Maclaurin 级数展开式, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 f 为多项式.

13. 设 $C(a)$ 为 $(1+x)^a$ 的 Maclaurin 级数展开式中 x^{2003} 项的系数, 计算积分
$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2003}\right)\mathrm{d}y.$$

14. 求级数和 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m^2 n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

15. 甲乙两人掷骰子, 两人依次轮流掷并且由甲掷第一次, 问第一个六点由甲掷出的概率是多少?

16. 某侨商捐资给母校设立奖学基金. 该基金存入银行, 每年可以得到 $a\%$ 的利息. 奖学金按如下数目发放: 基金存入银行当日发放一万元, 第二年同一天发放二万元, 以后每年同一日发放, 发放金额比前一年多一万元. 要使这笔奖学金能够永远按此规律发放下去, 该侨商至少应捐资多少元?

第二组参考题

1. 设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上的可积函数列, 且于 $[a,b]$ 上一致有界, 若已知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 证明: 积分值所成的数列必有极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

2. 若在 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 证明: $f\in R[a,b]$, 且成立
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 设具有相同单调性的单调函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $f\in C[a,b]$, 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 并已知对于每个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上必有最小值. 又问: 若将最小值换为最大值, 或将 $[a,b]$ 换为 (a,b), 则结论如何?

5. 设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数列, 且存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使 $f_n(x_n)=x_n$, $n=1,2,\cdots$. 如果导函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 试证明:

   (1) 函数列 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

   (2) 设 $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数为 f, 则存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

   (3) f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且在 $[a,b]$ 上 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$.

6. 设在区间 $[a,b]$ 上的连续函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的通项之间满足条件 $|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$, $n=1,2,\cdots$, 又设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数也在 $[a,b]$ 上连续.

7. 证明: 对任意 n 和 x 成立不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}$.

8. 利用幂级数展开证明 (上册 374 页的) 不等式:
$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)},\ 0<x<1.$$

9. 利用幂级数展开证明: 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 和实数 x 成立不等式:
$$\left|\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\leqslant\mathrm{e}^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n<\frac{x^2\mathrm{e}^{|x|}}{2n}.$$

10. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的部分和数列为 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $\sigma_n=(S_0+S_1+\cdots+S_{n-1})/n$, $n=0,1,\cdots$, 且有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$, 即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的 Cesàro 和为 S (参见第十三章末的几个参考题), 证明:

    (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛;

(2) 在 $(-1,1)$ 上成立 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n$;

(3) 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1,1)$, 则有 $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S$.

11. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为正数数列, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 且在 $x=1$ 处发散. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = A$, 证明:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = A.$$

12. 证明: 如果正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = A$, 则 $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = A$.

(本题为上题之特例, 但也可以用其他方法做.)

13. 设 f 在区间 $[0,r]$ 上无限次可微, 且 f 及其所有导函数都是非负的, 证明: f 的 Maclaurin 级数展开式在 $[0,r)$ 上成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

14. (生成函数法) 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall n \geqslant 2$, 定义

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为 $\{a_n\}$ 的**生成函数**. 试求出 f, 并由此求出 $\{a_n\}$ 的解析表达式, 同时求出该数列的**增长数**: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (参见上册 48 页).

15. 利用上题的生成函数方法证明组合学中的 Vandermonde 恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n},$$

并由此推出 $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

第十五章 Fourier 级数

Fourier 级数是幂级数之外的另一类重要的函数项级数，它的出现对于现代数学的理论发展和实际应用都有重大意义. 本章只讨论 Fourier 级数理论的一些基础知识. §15.1 节为有关 Fourier 系数的各种性质. §15.2 节讨论 Fourier 级数在各种意义下的收敛性问题. 最后一节为学习要点和参考题.

§15.1 Fourier 系数

Fourier 级数是一类特殊的三角级数，它的特殊性在于其系数是从某个可积函数出发经过 Euler-Fourier 公式计算出来的.

15.1.1 Fourier 系数的计算公式

设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积. 其中若 f 为常义可积，则可积蕴含绝对可积，又若 f 为广义可积，则绝对可积蕴含可积.

计算 f 的 Fourier 系数的 Euler-Fourier 公式是:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\cdots; \tag{15.1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots. \tag{15.2}$$

如果三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中的系数满足公式 (15.1) 和 (15.2)，则称该三角级数是 f 的 **Fourier 级数**，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{15.3}$$

注意: 上述公式只表明右边的系数 a_n, b_n 与左边的函数 f 之间满足公式 (15.1) 和 (15.2). 记号 "$\sim$" 没有其他含义，公式 (15.3) 右边的级数是否收敛，以及在收敛时其和函数是否等于 f，都是需要另行讨论的问题.

回顾教科书中导出 Euler-Fourier 公式的过程，其出发点是在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛 (也就是在一个周期长度的闭区间上一致收敛) 的一个三角级数，然后通过逐项求积导出上述公式. 由此就得到 Fourier 级数学习中的第一个基本定理 (其中对一致收敛的范围理解如上):

命题 15.1.1 一致收敛的三角级数必是其和函数的 Fourier 级数.

虽然用 Euler-Fourier 公式得到的 Fourier 级数未必一致收敛, 但这个命题仍然是很有用的一个基本结果.

注 1 虽然只有周期函数才可能有 Fourier 级数, 但当 f 的定义域是某个长度为 2π 的区间时, 可先将其延拓成周期函数, 且把延拓后的周期函数的 Fourier 级数称为 f 在该区间上的 Fourier 级数. 对于周期不是 2π 的周期函数或只在长度不是 2π 的区间上定义的函数, 也可用类似的方法定义它们的 Fourier 级数.

注 2 当 f 为偶函数或奇函数时, f 的 Fourier 级数有较为简单的形式: 当 f 为偶函数时, 所有的 b_n 均为 0, 并且 (15.1) 成为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\cdots, \tag{15.4}$$

当 f 为奇函数时, 所有的 a_n 均为 0, 并且 (15.2) 成为

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots. \tag{15.5}$$

这时 f 的 Fourier 级致中只出现含有余弦函数的项与常数项或只出现含有正弦函数的项, 分别称为**余弦级数**或**正弦级数**.

注 3 从公式 (15.4) 不难看出, 如果 f 在 $[0,\pi]$ 上具有某种对称性, 例如关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 为偶函数 (奇函数), 则可以证明在公式 (15.4) 中当 n 为奇数 (偶致) 时积分为 0. 对于公式 (15.5) 有类似的结论 (参见 10.4.3 小节中的命题和例题).

下一个命题建立 f 的 Fourier 系数与其导函数 f' 的 Fourier 系数之间的联系. 这也是 Fourier 系数的基本性质之一.

命题 15.1.2 设以 2π 为周期的连续函致 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点以外可导, 又设 (在任意补充有限个点上的值之后) f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 则从 $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 就有

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \left(\frac{a_0}{2}\right)'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx), \end{aligned}$$

若用 a_n', b_n' 记 f' 的 Fourier 系数, 这就等价于

$$a_0' = 0,\ a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n,\ n = 1,2,\cdots. \tag{15.6}$$

证 因为 f 是以 2π 为周期的连续函数, 因此 $f(-\pi) = f(\pi)$, 由此即可推出 $a_0' = 0$. 然后由分部积分公式[①]可得

$$\begin{aligned} a_n' &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos nx \\ &= n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = nb_n. \end{aligned}$$

① 这里需要将分部积分公式 (10.11) 稍作推广, 参见上册 315 页注 2.

这就是 $b_n=\frac{a_n'}{n}$. 类似地可以证明 $a_n=-\frac{b_n'}{n}$. □

注 对于满足条件的 f, 公式 (15.6) 可以用于从 f 的 Fourier 系数得到 f' 的 Fourier 系数. 这里只需要形式上的"逐项求导"即可.

反之, 能否从 f' 的 Fourier 系数得到 f 的 Fourier 系数? 从命题的证明可知, 如果 $f\in C[-\pi,\pi]$ 但不满足 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则肯定不行. 但是有一个方法可以解决这个问题. 这就是将 f 写成

$$f(x)=[f(x)-\frac{a_0'}{2}x]+\frac{a_0'}{2}x, \tag{15.7}$$

这时右边第一项满足命题中的条件, 其导函数为 $f'(x)-a_0'/2$, 因此可用 (15.6). 至于右边的第二项, 则可直接计算它的 Fourier 系数. 最后将两个结果合并. 当然 f 的 Fourier 系数 a_0 需要直接计算得到 (见后面的例题 15.1.2 之解 2).

15.1.2 Fourier 系数的渐近性质

由 Riemann 引理 (例题 10.2.6) 就得到这方面的第一个性质:

命题 15.1.3 若 f 为周期 2π 的可积和绝对可积函数, 则其 Fourier 系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 必为无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

利用命题 15.1.2 可知在 f 的可导性与 Fourier 系数的渐近性态之间的联系:

命题 15.1.4 设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点以外均有 $k+1$ 阶导数. 如果其 k 阶导函数 $f^{(k)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处连续且 $f^{(k+1)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 则有

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\ b_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

命题 15.1.5 设 f 是以 2π 为周期的函数且存在 $\alpha\in(0,1]$, 使 f 满足 α 阶 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha},$$

其中 L 为常数①, 则成立:

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),\ b_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

证 由本题的条件知, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 因此其 Fourier 系数存在. 在 Fourier 系数公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{15.8}$$

中令 $x=t+\frac{\pi}{n}$, 可得

① $\alpha>1$ 是没有意义的, 见上册 153 页.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nt+\pi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

将上式与 (15.8) 取平均得到 $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\,\mathrm{d}x$. 然后可以估计如下:

$$\begin{aligned}|a_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\cos nx|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}L\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|\,\mathrm{d}x \leqslant L\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

这就证明了 $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$. 类似地可证明 $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$. □

15.1.3 Fourier 系数的几何意义

初学者一定会感到奇怪, Fourier 系数的计算公式 (15.1), (15.2) 完全是积分运算, 怎么会有什么几何意义?

实际上这里的几何意义是人们的一种想像或者一种类比, 即将满足一定条件的函数集合想像为空间, 并将几何学中的正交 (即垂直) 概念推广到函数之间. 泛函分析等学科的发展充分证明这种方法具有极强的生命力. 对于 Fourier 级数来说, 这种观点也是非常本质的. 本小节就是要用几何观点来解释 Fourier 系数和 Fourier 级数的意义.

这里的函数空间是周期 2π 的可积和绝对可积函数集合, 其中有函数之间相加以及函数与实数的乘法. 按照线性代数这就是一个线性空间或向量空间.

然后在这个空间中引进正交概念. 考虑空间中的两个函数 f 与 g, 如果有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

就称 f 和 g **正交**. 在这个定义下, 三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

中任何两个函数正交, 因此称为**正交函数系**.

现在考虑用三角多项式

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) \tag{15.9}$$

来逼近函数 f, 其中的逼近误差, 也就是 T_n 与 f 之间的距离, 是按照平方平均意义来定义的:

$$d^2(f,T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,\mathrm{d}x. \tag{15.10}$$

这时就可以证明下列结论.

命题 15.1.6 (Fourier 系数的最优性) 设 f 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数①, $T_n(x)$ 是 (15.9) 中的任意 n 次三角多项式, $S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数 (15.3) 的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则有

$$d^2(f,S_n)\leqslant d^2(f,T_n),$$

且当且仅当 $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1,2,\cdots,n$ 时成立等号.

证 直接按照定义 (15.10) 计算并作配方得到

$$\begin{aligned}d^2(f,T_n)&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\pi a_0A_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)+\frac{\pi A_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\\&\qquad+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2)\right]\\&\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=d^2(f,S_n).\quad\square\end{aligned}$$

注 在右边的图中作出了命题的几何意义的示意图. 如果考虑由所有 T_n 构成的集合, 问题就是要从中找出与 f 距离最小的一个三角多项式. 这个问题的解就是 S_n. 其原因在于, Euler-Fourier 公式在几何上就是 f 到三角函数系的正交投影, 而 S_n 就是 f 到所有 T_n 的集合上的正交投影, 因此 S_n 到 f 的距离最短.

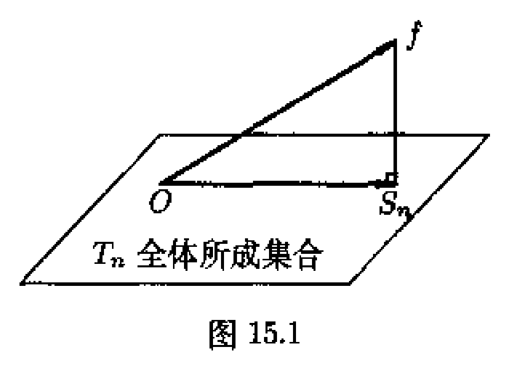


图 15.1

由命题 15.1.6 还可以得到

命题 15.1.7 (Bessel 不等式) 若 f 于区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15.11}$$

① 关于 f 的条件要作些解释. 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积, 则也绝对可积和平方可积. 否则, 从 f^2 在 $[-\pi,\pi]$ 上广义可积, 由不等式 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1+f(x)^2}{2}$ 可以推知 f 可积与绝对可积.

证 从命题 15.1.6 得到

$$d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geqslant 0.$$

由于这对每个 n 成立, 因此 (15.11) 左边的正项级数的每个部分和均以右边的积分为上界, 从而收敛, 且使该不等式成立. □

注 1 这个结果与 Fourier 级数的收敛性没有关系, 由此就可以得到 $a_n=o(1), b_n=o(1)$, 这里也不需要用 Riemann 引理.

注 2 由此可知, 在 $0<p<\frac{1}{2}$ 时, 三角级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 不可能是可积和平方可积函数的 Fourier 级数[①].

15.1.4 例题

例题 15.1.1 证明: 三角多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身.

证 三角多项式可看成是只含有限个非零项的三角级数, 因此在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 引用命题 15.1.1 即得 (本题的另一个解法当然是直接计算). □

在用公式计算 Fourier 系数时, 即使对于相当简单的 f, 也可能要作多次分部积分运算, 计算量相当大. 因此, 除了要细心地按公式计算之外, 还应该学习 (或发明) 一些较为灵活的计算方法. 为此在下面列举几种非常规方法供参考. 此外, 在学了逐项积分定理后还会有新的计算方法.

例题 15.1.2 求函数 f 的 Fourier 级数, 其中 $x\in(-\pi,\pi)$ 时, $f(x)=x^3$.

解 1 利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 在复数域进行计算往往是很有效的方法. 对本题可以计算如下:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3(\cos nx+i\sin nx)\,dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3e^{inx}\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{in}e^{inx}-\frac{3x^2}{(in)^2}e^{inx}+\frac{6x}{(in)^3}e^{inx}-\frac{6}{(in)^4}e^{inx}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\\&=i\frac{2(-1)^n}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{n}+\frac{6\pi}{n^3}\right)=i(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right).\end{aligned}$$

于是所求的 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right)\sin nx.\quad □$$

---

① 但是这两个三角级数仍然是其和函数的 Fourier 级数, 它们的和函数不平方可积, 但可积和绝对可积. 见后面的例题 15.2.3 和 15.2.4.

解 2 这里的工具是命题 15.1.2. 先用公式 (15.2) 直接计算出在 $(-\pi,\pi)$ 上函数 x 的 Fourier 级数:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \tag{15.12}$$

然后从 $(x^2)' = 2x$ 和公式 (15.6) 得到

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \tag{15.13}$$

其中常数项是直接计算得到的.

由于在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 x^3 不可能连续延拓为周期 2π 的连续函数, 因此不能直接用命题 15.1.2, 但可以采用技巧 (15.7) 将 x^3 分解为:

$$x^3 = (x^3 - \pi^2 x) + \pi^2 x. \tag{15.14}$$

右边第一项可以延拓为满足命题 15.1.2 的周期 2π 的连续函数, 其导函数为 $3x^2$, 因此就可以用公式 (15.6) 和 (15.12) 得到 x^3 的正弦级数中 $\sin nx$ 的系数为

$$3 \cdot \frac{4(-1)^n}{n^3} + \pi^2 \cdot \frac{2(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^n 12}{n^3} + \frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n}. \quad \square$$

例题 15.1.3 设 f 为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数. 问: 如何将 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 上, 使其 Fourier 级数具有如下的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

解 由题意要求 $a_{2n} = 0$, 从公式 $a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$ 可见, 由于 $\cos 2nx$ 在 $[0,\pi]$ 上关于其中点为偶函数, 根据上册 324 页命题 10.4.5, 只要有 $f(x) = -f(\pi - x)$ 成立就可以使上述积分为 0. 这决定了 f 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上的延拓. 定义 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 然后用偶延拓 $f(-x) = f(x)$ 将 f 延拓到 $(\pi,0)$ 上即可.

小结 将 f 以如下方式延拓:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,\frac{\pi}{2}), \\ -f(\pi - x), & x \in (\frac{\pi}{2},\pi), \\ 0, & x = 0, \frac{\pi}{2}, \\ f(-x), & x \in (-\pi,0). \end{cases} \quad \square$$

15.1.5 练习题

1. 求下列函数的 Fourier 级数:

   (1) $\sin^3 x + \cos^4 x$;

   (2) $ax^3 + bx^2 + cx + d,\ x \in (-\pi,\pi)$.

2. 将定义在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 上, 使其 Fourier 级数具有如下的形式: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

3. 证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases} c, & 0<x\leqslant\pi, \\ 0, & x=0, \\ -c, & -\pi<x<0 \end{cases}$$

的 Fourier 级数的前 $2n+1$ 项的和 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 具有形式

$$S_n(x)=\frac{2c}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

4. 设 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 证明

$$a_n=o(\frac{1}{n}),\ b_n=O(\frac{1}{n});$$

如果又有 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则 $b_n=o(\frac{1}{n})$.

5. 设 f 是以 2π 为周期的有界函数且在 $(-\pi,\pi)$ 上逐段单调, 证明

$$a_n=O(\frac{1}{n}),\ b_n=O(\frac{1}{n}).$$

(可在每个单调区间上用积分第二中值定理 (即命题 10.2.2).)

6. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 证明: 用 $\sin x$ 去乘 f 的 Fourier 级数的每一项所得的三角级数就是 $f(x)\sin x$ 的 Fourier 级数.

7. 设 $[a,b]$ 上的连续函数系 $\{e_n\}$ 满足条件 $\int_a^b e_i(x)e_j(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{ij}$, 其中 $\delta_{ij}=0\ \forall i\neq j$, $\delta_{ii}=1$, 则称该函数系在 $[a,b]$ 上为**规范正交系**. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积和平方可积, 定义 $c_n=\int_a^b f(x)e_n(x)\,\mathrm{d}x$ 为 f 关于 e_n 的 Fourier 系数, $n=1,2,\cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 收敛. 又问: 当 n 固定时, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 取什么值时, 平方平均误差

$$\int_a^b[f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

最小?

8. 设 g 是周期为 1 的连续函数且 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 函数 $f\in C^1[0,1]$, 令

$$a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots,$$

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

§15.2 Fourier 级数的收敛性

本节讨论 Fourier 级数在各种意义上的收敛性问题, 其中包括点收敛, 在 Cesàro 意义下的收敛, 平方平均收敛和一致收敛.

为方便起见, 在以下的叙述中只考虑周期 2π 的情况, 但通过简单变换就可以将结论推广到一般的周期情况.

15.2.1 Dirichlet 核和点收敛性

Fourier 级数的点收敛性研究主要依赖于 Dirichlet 核 (参见上册 322 页). 利用 Euler-Fourier 公式和三角变换, 将函数 f 的 Fourier 级数的部分和函数列

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n = 1, 2, \cdots,$$

用 **Dirichle 积分**表示出来:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad (15.15)$$

其中 D_n 是 **Dirichlet 核**

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \quad (15.16)$$

$D_n(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在一个周期上的积分值为 π (见上册 (10.12)):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \quad (15.17)$$

从方法上观察, 局部化定理以及各种常见判别法都可以通过对 Dirichlet 核的研究而得到. 在图 15.2 中作出了 $D_n(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的示意图, 其中取 $n=9$. $x=0$ 为 $D_n(x)$ 的可去间断点, 其极限值为 $n+\frac{1}{2}$, 是曲线的主峰高度. $D_n(x)$ 的绝对值最小的两个零点 $\pm\pi/(n+\frac{1}{2})$ 之间的主峰下的面积当 $n\to\infty$ 时趋于 π, 而其余峰谷和横轴之间的面积之和则正负相消趋于 0. 因此公式 (15.17) 中的积分值主要就是由这个最高的主峰提供的.

$D_n(x)$ 的这些特性值得当函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处满足一定条件 (例如可导) 时, 就能够建立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

这就是 Dirichlet 核的作用, 即通过积分运算和取极限 "提取" 出函数 g 在 $x=0$ 的值. 若对 g 的自变量作平移就可以得到其他点的值.

由此得到的第一个结果就是**局部化定理**, 它是 Fourier 级数的一个特点. 由于函数 f 的 Fourier 系数是按照 Euler-Fourier 公式通过积分得到的, 因此 f 的 Fourier 级数在点 x_0 的敛散性似乎理所当然地应当与 f 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上的

性态有关. 但局部化定理对此给出了完全不同的论断. 有关点收敛的各种判别法也都是在这个基础上建立起来的.

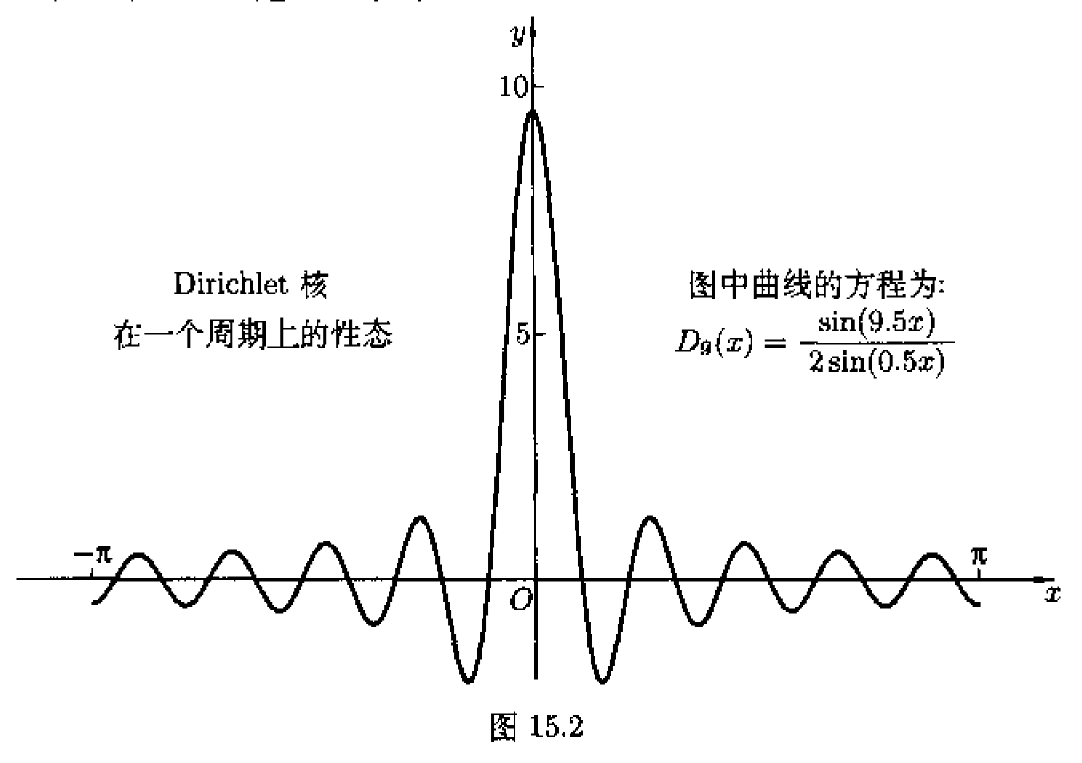


图 15.2

局部化定理即是对任意小的固定正数 δ 有渐近等式:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t + o(1) \quad (n\to\infty).$$

利用 (15.17), 对于任意 s 就有

$$S_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2s]D_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15.18}$$

这样就可以研究在什么条件下 f 的 Fourier 级数于点 x 处收敛于 s. 由于 (15.18) 的特殊形式, 经常令 $s=\dfrac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$, 并在一系列条件下证明 f 的 Fourier 级数收敛于这个值. 这就是教科书中的一系列判别法, 当然它们都是充分性判别法. 本书在这里不再重复.

需要指出, Fourier 级数的点收敛性是一个十分困难的问题, 即使对于连续周期函数也是如此. 这里浏览一下已经取得的进展是适宜的.

Fourier 级数的点收敛的研究进展 早期进展是举出发散的例子. 要找到一个连续函数, 使得它的 Fourier 级数在一个点上发散, 这已经不是一个平凡的问题. 自从 du Bois-Reymond (1873) 举出了这样的例子之后, 发散点处处稠密的连续函数例子也已经找到. 若在 Lebesgue 可积函数中考虑问题, 则 Kolmogorov 举出了 f 的 Fourier 级数几乎处处发散 (1923) 和处处发散 (1926) 的例子. (**几乎处处**是实变函数论中的概念, 在上册 304 页已有解释.)

另一方面, Lusin 则猜测连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛. 由于以上的许多反例, 在很长的时间内很少有人相信这个猜测是正确的. 这个猜测最终在

1966 年为 Carleson 正面解决, 他证明了包含连续函数在内的 L 平方可积函数的 Fourier 级数一定是几乎处处收敛的. 这是一个引起轰动的重大成果. (Carleson 是 1992 年 Wolf 奖的获得者.)

15.2.2 Gibbs 现象

由于 Fourier 级数的每一项是连续函数, 因此容易知道, 如果 Fourier 级数的和函数在某点不连续, 则级数在该点的邻域中不可能是一致收敛的. 但是对于 Fourier 级数来说这里还有一个更为奇特的现象, 即所谓 Gibbs 现象. 这里的要点是, 若 x_0 是和函数的一个 (第一类) 间断点, 则当 x_n 趋于 x_0 的左侧或右侧时, 部分和的值 $S_n(x_n)$ 不会收敛于 $S(x_0)$. 不但如此, 下面的分析表明, 这里的误差不会因 n 的增加而减少.

为简单起见, 我们先讨论具有典型意义的一个特例:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \tag{15.19}$$

其中 $S(x)$ 是周期 2π 的函数: $S(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\ \forall x\in(0,2\pi)$, $S(0)=0$.

在图 15.3 中作出了级数 (15.19) 的前 10 个部分和函数的示意图.

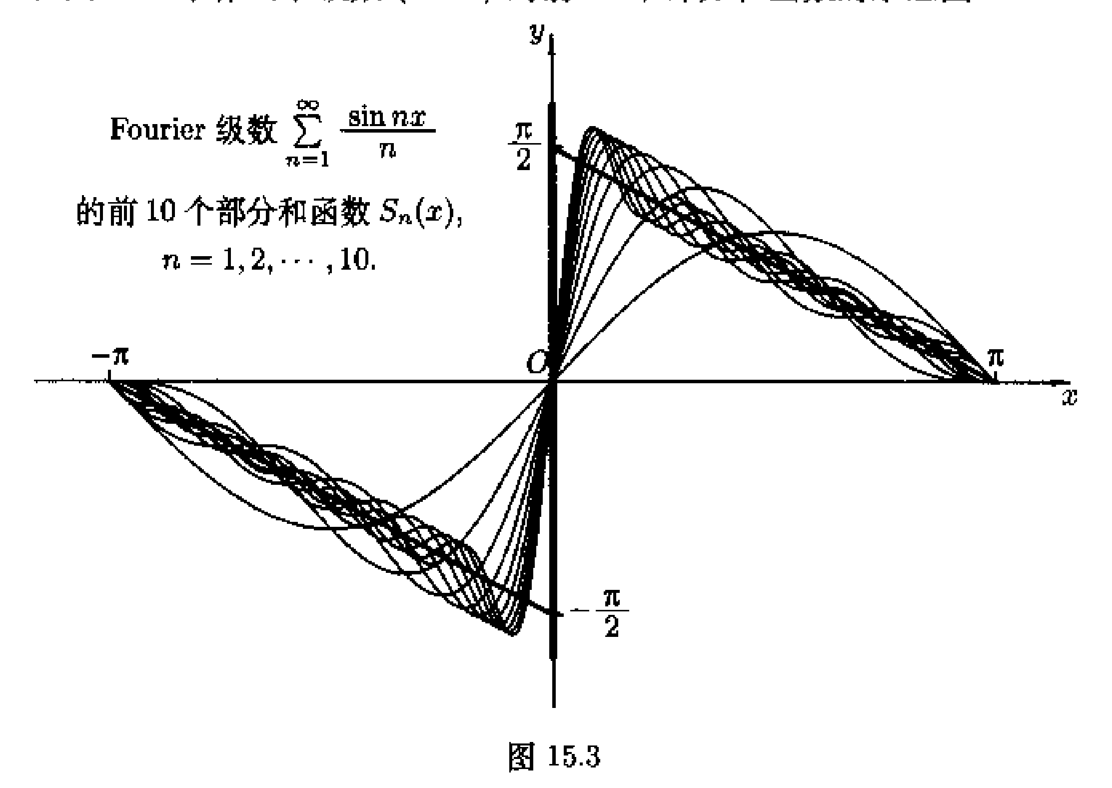


图 15.3

同时在图 15.3 中还用两段粗黑直线表示级数 (15.19) 的和函数 $S(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$, $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$. 从图中已经可以看出, 虽然只观察了前 10 个部分和函数, 但在 $x=0$ 附近的差值 $|S_n(x)-S(x)|$ 毫无趋于 0 的趋势, 更为精确的性态刻画可以总结如下. (其中只叙述 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 的情况, 对 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 的结论是类似的.)

例题 15.2.1 (Gibbs 现象) 记 $\{S_n\}$ 是 Fourier 级数 (15.19) 的部分和函数列, $S(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 为该级数在区间 $(0,2\pi)$ 上的和函数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\{S_n(x)-S(x)\}=\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\approx\frac{\pi}{2}\times 0.178\,98.$$

证 研究误差 $\varepsilon_n(x)=S_n(x)-S(x)$ 在 $x=0$ 右侧的性态. 直接计算得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_n(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx,$$

因此就有 (参见上册 322 页)

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_n(x)}{\mathrm{d}x}=D_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

可以看出误差 $\varepsilon_n(x)$ 的极值点为 $x_n^{(m)}=\pi m/(n+\frac{1}{2})$, $m=1,2,\cdots,2n$. 其中当 m 为奇数时是极大值点①, 当 m 为偶数时是极小值点 (参见图 15.3).

直接计算在这些极值点上的误差值:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(x_n^{(m)})=S_n(x_n^{(m)})-S(x_n^{(m)})&=\sum_{k=1}^n\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{k}-\frac{\pi-x_n^{(m)}}{2}\\&=\left(\sum_{k=1}^n\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{kx_n^{(m)}}\cdot\frac{\pi m}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1/2}\right)-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{2n+1}\\&=\left(\sum_{k=1}^n\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{kx_n^{(m)}}\cdot\frac{\pi m}{n}\right)-\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由于右边第一项可看作为 Riemann 积分和式, 因此当 $n\to\infty$ 时就得到

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(x_n^{(m)})=\int_0^{m\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}.$$

容易知道当 $m=1$ 时的极限值最大②, 即得到

$$\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times 0.178\,98.\quad\square$$

注 1 若取 $x_n=c/n$, $n=1,2,\cdots$, 则类似地有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(\frac{c}{n})=\int_0^c\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. 取不同的 c 值, 这样的极限值就会形成一个闭区间 $[CS(0^-),CS(0^+)]$, 其中 $C=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\approx 1.178\,98$. 在图 15.3 上用 y 轴上的一个粗黑直线段来代表这个区间.

注 2 虽然以上只是一个特例, 但可以用它以及它的平移来吸收一般的和函数中的所有间断点. 因此以上所得的结论、常数 18% 以及注 1 中的内容都具有普遍意义.

① 可以证明 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}\{S_n(x)-S(x)\}=\varepsilon_n(x_n^{(1)})$, 例如参考 [19] 的卷 3 第 674~675 小节.

② 不难证明变上限积分 $\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 的最大值也就是在 $x=\pi$ 处达到.

小结 若和函数有间断点, 则不可能依靠 Fourier 级数的部分和函数 $S_n(x)$ 的 n 增加来改进近似计算的精确程度. 这是在 Fourier 级数的应用中不能忽视的问题 (可以参考 [42] 的最后一章 “三角级数之和”).

注 3 以上证明的思想来自美国数学月刊 87 卷 (1980) 210~212 页.

15.2.3 Fourier 级数的 Cesàro 求和

到目前为止, 凡是说到无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 就是指它的部分和数列收敛. 这就是由 Cauchy 提出的无穷级数的收敛定义. 但至少从 Euler 起, 就已经出现无穷级数的其他收敛定义. Cesàro 求和就是其中的一种, 它在 Fourier 级数理论中得到了重要的应用 (参见第十三章最后的几个参考题).

定义 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 定义数列

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n},\ n = 1, 2, \cdots,$$

如果存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **在 Cesàro 意义下可求和**, 且定义 σ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 **Cesàro 和**. 由 Cauchy 命题 (见上册 31 页) 知道, 若数列 $\{S_n\}$ 收敛于数 S, 则其前 n 项的平均值 σ_n 构成的数列也收敛于 S, 但反之则不然. 因此若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在通常意义下收敛, 则它在 Cesàro 意义下也收敛, 且有相同的和. 这表明对在通常意义下收敛的级数而言, Cesàro 求和没有给出新的结果.

然而在通常意义下的某些发散级数有可能在 Cesàro 意义下有和. 例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

的部分和数列为 $S_{2k-1} = 1$, $S_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \cdots$, 因此该级数的 Cesàro 和为 $\dfrac{1}{2}$. 这就是 Euler 等数学家曾经提出过的和 (参见 [26, 49]).

初看起来这似乎有点荒谬, 为什么要考虑 (在通常意义下) 发散级数的和? 这样做有什么意义? 下面我们先观察 Cesàro 求和在 Fourier 级数理论中给我们带来什么结果.

命题 15.2.1 (Fejér 定理) 如果以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积和绝对可积, 并且在点 x_0 处有左、右极限 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$, 则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处在 Cesàro 意义下收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

特别是当 f 于点 x_0 连续时, 则 Fourier 级数在点 x_0 的 Cesàro 和就等于 $f(x_0)$.

证 从部分和函数 $S_n(x)$ 的 Dirichlet 积分 (15.17) 出发计算 $\sigma_n(x)$, 经三角变换后可以得到 **Fejér 积分**:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot F_n(t)\,dt,$$

其中的非负函数

$$F_n(t) = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 \tag{15.20}$$

称为 **Fejér 核**. 用 $f(x)\equiv 1$ 代入就得到恒等式 (见 10.4.6 小节题 10):

$$\int_0^{\pi} F_n(t)\,dt = 1, \tag{15.21}$$

这样就可以利用 Fejér 积分和恒等式 (15.21) 将问题化为积分估计:

$$|\sigma_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]|$$
$$\leqslant \int_0^{\pi}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,dt.$$

现在对任意给定的 $\varepsilon>0$ 取 $\delta>0$, 使得当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x_0+t)-f(x_0^+)|<\varepsilon$ 和 $|f(x_0-t)-f(x_0^-)|<\varepsilon$ 成立, 于是就有

$$\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,dt \leqslant \varepsilon\int_0^{\delta}F_n(t)\,dt \leqslant \varepsilon,$$

这里利用了 Fejér 核的非负性和恒等式 (15.21). 再利用当 $\delta\leqslant t\leqslant\pi$ 时

$$0\leqslant F_n(t)\leqslant \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{1}{2}\delta)^2},$$

就可以估计得到

$$\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\sigma_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]\right| < 2\varepsilon,$$

这就是

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]. \quad \square$$

注 将 Fejér 积分的估计和 Dirichlet 积分的估计作比较, 可见这里要方便得多, 连 Riemann 引理也不需要用. 原因在于 Fejér 核是非负的, 而 Dirichlet 核则是变号的 (见图 15.2). 如前所示的 Gibbs 现象的根源都在于此. 读者可以将图 15.4 中的 Fejér 核的示意图与图 15.2 作比较. 此外, 还可以参考 [19] 卷 3 第 723 小节关于正核的系统论述. 在下一章关于 Weierstrass 逼近定理的证明中我们将再次接触到这种核函数方法 (又称奇异积分方法).

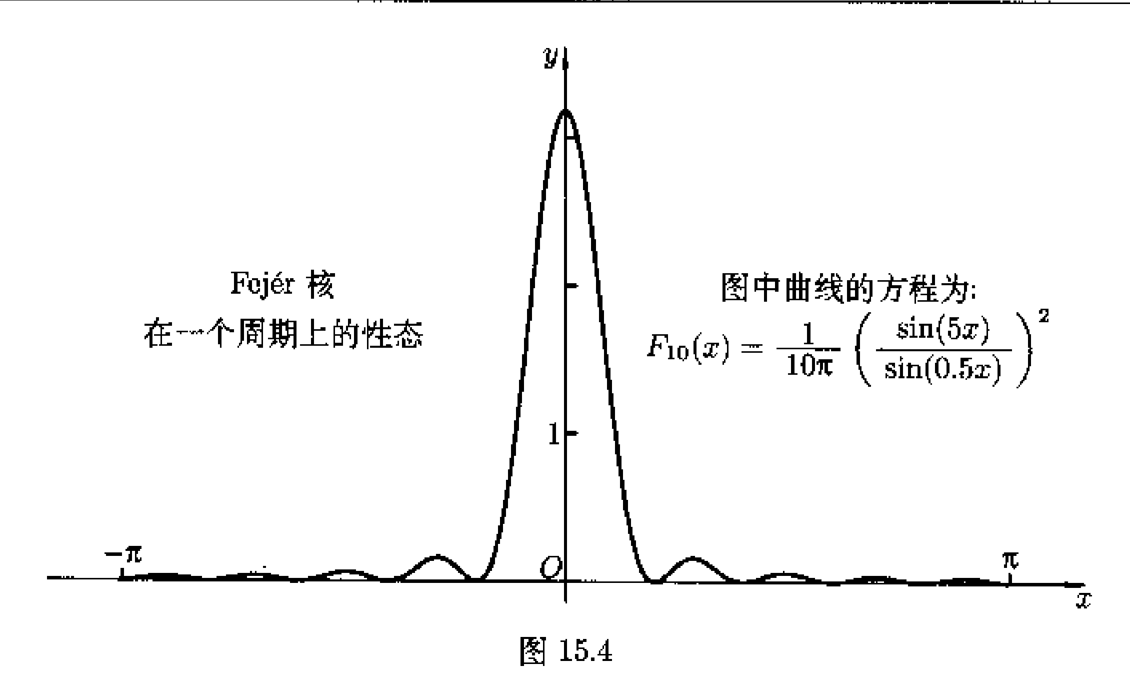


图 15.4

由 Fejér 定理可以立即得到关于 Fourier 级数收敛的一个重要结果.

命题 15.2.2 设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 点 x_0 是 f 的连续点或第一类间断点, 如果 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛, 则它一定收敛于 $f(x_0)$ 或 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$.

证 设 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 s, 则其 Cesàro 和也是 s. 但由 Fejér 定理 (命题 15.2.1) 知其 Cesàro 和为 $f(x_0)$ 或 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$, 可见命题成立. □

注 结合前面提到的 Carleson 的工作, 可以知道连续周期函数的 Fourier 级数展开式一定几乎处处成立.

对于连续的周期函数, 从 Fejér 定理还可以得到两个重要结论.

命题 15.2.3 (Fourier 级数的惟一性定理) 设 f 为周期 2π 的连续函数, 且其 Fourier 系数均等于 0: $a_0=0$, $a_n=b_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 则 f 必是恒等于 0 的常值函数.

证 这时 f 的 Fourier 级数的每一项都恒等于 0, 因此部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项也都恒等于 0. 由此就知道 $\sigma_n(x)\equiv 0$, $n=1,2,\cdots$. 从 Fejér 定理 (命题 15.2.1) 可见 $f\equiv 0$. □

注 由此可知若两个连续函数有相同的 Fourier 级数, 则这两个连续函数必相同. 注意: 这与 Taylor 级数很不一样 (参见命题 14.4.2, 68 页底注和上册 169 页的例题 6.2.4).

命题 15.2.4 (关于一致收敛的 Fejér 定理) 如果 f 是以 2π 为周期的连续函数, 则它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一致收敛于 f.

注 1 这只需要在命题 15.2.1 的证明中利用连续函数的 Cantor 定理 (见 §5.4 节) 即可.

注 2 由于 $\{\sigma_n(x)\}$ 是三角多项式函数列, 因此已经得到了关于周期连续函数用三角多项式一致逼近的 Weierstrass 第二逼近定理. 这将在下一章中再作进一步介绍. (又见命题 15.2.8 的注和参考题 19.)

15.2.4 Fourier 级数的平方平均收敛

定义 称函数列 $\{f_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上**平方平均收敛**于 f, 若成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

从 Bessel 不等式 (即命题 15.1.7) 的证明已知

$$d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi} f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

因此, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} d^2(f,S_n)=0$, 则 Bessel 不等式中的不等号就可换为等号. 这就是 Parseval 等式, 它又称为**封闭性方程**, 是 Fourier 级数中最重要的公式之一.

命题 15.2.5 (Parseval 等式) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, $f(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则有下列 Parseval 等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15.22}$$

证 这里只列出主要步骤, 细节从略.

(1) 先用连续函数在平方平均意义上逼近 f (参见上册 333 页题 5). 如果 f 为广义平方可积, 则还需要先用常义可积函数在平方平均意义上逼近 f, 然后再用连续函数逼近.

(2) 对于连续函数, 根据一致收敛的 Fejér 定理 (即命题 15.2.4), 存在一个三角多项式 T_n 一致逼近这个连续函数.

(3) 然后再用 S_n 在所有 T_n 中的最优性 (即命题 15.1.6), 并注意到 $d^2(f,S_n)$ 随 n 增大而单调减少, 可见成立 $\lim\limits_{n\to\infty} d^2(f,S_n)=0$, 因此所求结论为真. □

注 为了阐明 Parseval 等式的几何意义, 只需要将函数空间中从正交开始的几何类比进一步做下去. 将 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g$ 定义为 f 与 g 的**内积**, 并记为 (f,g), 则就可以将 $\sqrt{(f,f)}$ 定义为 f (作为向量) 的**长度** (或称为**模长**). 这时三角函数系中常值函数 1 的长度为 $\sqrt{2\pi}$, 其余的长度均为 $\sqrt{\pi}$. 于是在 f 的 Fourier 级数中各项的长度就是 $\dfrac{\sqrt{\pi}a_0}{2}$, $\sqrt{\pi}a_n$ 和 $\sqrt{\pi}b_n$, $n=1,2,\cdots$. 然后再观察 Parseval 等式 (15.22), 我们就会发现它就是平面几何与立体几何中的勾股定理在函数空间

中的推广. 因此我们认为所讨论的函数空间是无限维空间, 而这就是泛函分析学科将要专门研究的领域.

下面我们举例说明 Parseval 等式的一些应用.

首先解决三角函数系的完备性问题. 这里的问题是: 是否存在三角函数系以外的可积和平方可积函数 φ, 使 φ 与三角函数系中的每个函数正交, 且 $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 \neq 0$? 如果不存在这样的函数 φ, 就称三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上具有**完备性**.

命题 15.2.6 三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有完备性.

证 用反证法. 假设存在与三角函数系中每个函数正交的可积和平方可积函数 φ, 则它的每个 Fourier 系数都等于 0. 由 Parseval 等式 (15.22) 即有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0.$$

这与假设 $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ 矛盾. □

注 1 完备性概念也来自于日常的二维平面和三维空间. 例如, 在三维空间中两个正交向量组成的向量系是不完备的, 但三个两两正交的向量组成的向量系则是完备的.

注 2 由此又可以得到惟一性定理 (即命题 15.2.3) 的一个新证明. 因为对 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 φ 来说, 从 $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 = 0$ 即可推出 φ 恒等于 0.

Parseval 等式的下列推广也很有用.

命题 15.2.7 (Parseval 等式的推广) 设 f, g 均在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是 f 的 Fourier 系数, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 是 g 的 Fourier 系数, 则成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n). \tag{15.23}$$

证 写出 $f+g$ 和 $f-g$ 的 Parseval 等式, 相减除 4 即得. □

15.2.5 Fourier 级数的一致收敛性

下面我们用 Parseval 等式来证明 Fourier 级数的一致收敛性定理. 其思路是: 从 (15.22) 左边的级数收敛可以推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$ 收敛, 然后从导函数的 Fourier 系数出发并利用命题 15.1.2.

命题 15.2.8 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 并且在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点以外可导, 又设 (在任意补充有限个点上的值之后) f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 则 f 的 Fourier 级数绝对一致收敛于 f.

证 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则由收敛性定理知该级数处处收敛于 f. 由 M-判别法可见, 只需再证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

设 $f' \sim \frac{a_0'}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)$, 则 $a_0' = 0$, 由 Parseval 等式有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n'}^2 + {b_n'}^2\right).$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n'}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {b_n'}^2$ 都收敛. 由命题 15.1.2 得到

$$a_n = -\frac{b_n'}{n},\ b_n = \frac{a_n'}{n},\ n = 1, 2, \cdots,$$

从不等式

$$|a_n| = \left|\frac{b_n'}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left({b_n'}^2 + \frac{1}{n^2}\right),\ n = 1, 2, \cdots$$

可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 同样可证, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也绝对收敛. □

注 由于在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的连续周期函数可以先用分段线性连续函数一致逼近, 然后对于分段线性连续函数可以用本命题, 因此就提供了 Weierstrass 第二逼近定理的另一个证明 (参见命题 15.2.4 的注 2).

本小节当然要讨论 Fourier 级数的逐项积分与逐项微分问题. 但是这里都出现了与一般的函数项级数不同的结果. 其中逐项积分出现了令人感到意外的好结果: 不论 f 的 Fourier 级数的收敛情况如何, Fourier 级数逐项积分以后得到的级数必定收敛, 而且还是一致收敛.

命题 15.2.9 (Fourier 级数的逐项积分定理) 设 f 为周期 2π 的函数, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积和绝对可积, 且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 一定收敛, 并且对于 $[-\pi, \pi]$ 中的任意 a, b 成立下列逐项积分公式:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t, \tag{15.24}$$

对于 $a = 0$, $b = x$ 可以得到

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right), \tag{15.25}$$

且其中右边为等号左边的 Fourier 级数.

证 以下只对 f 为可积和平方可积给出证明. 一般情况可见 [19, 36] 等.

这时可用推广的 Parseval 等式 (15.23). 先将它改写为

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

然后令

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi],\end{cases}$$

代入即得所求的 (15.24). 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$ 收敛, 因此其他结论显然成立, 而且最后的 Fourier 级数还是一致收敛的. □

注 由 Fourier 级数的逐项积分定理可知一个三角级数 $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 能够是某个可积和绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛. 因此, 例如

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},\ \sum_{n=9}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$$

之类的三角级数, 由 Dirichlet 判别法知道它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛, 但它们都不可能是任何可积和绝对可积函数的 Fourier 级数.

但是 Fourier 级数逐项求导定理的条件却要强得多. 如果以 2π 为周期的函数 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续可微 (这时由收敛定理知 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi)$ 上处处收敛于 f), 仍然不能保证 f 的 Fourier 级数逐项求导以后得到的三角级数是 f' 的 Fourier 级数 (参见参考题 15).

命题 15.2.10 (Fourier 级数的逐项求导定理) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点外处处可导, 又设 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑, 则对一切实数 x 成立下列逐项求导公式:

$$\frac{f'(x^+)-f'(x^-)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

注 在命题 15.1.2 中已经证明, 只要 f 为周期 2π 的连续函数, 则在 f 与 f' 的两个 Fourier 级数之间就有逐项求导关系. 那时并不考虑收敛性, 证明也很简单, 但所得的结果不能称为逐项微分定理. 现在有了 f' 分段光滑条件之后, 就知道求导后的 Fourier 级数收敛于 $[f'(x^+)+f'(x^-)]/2$. 如果 f' 连续, 则级数就处处收敛于导函数 f'. 若对 f 加更多的条件, 则 f' 的 Fourier 级数可以一致收敛. 这里的情况与一般的函数项级数的逐项微分定理也是很不相同的.

小结 从本小节可以知道, 在一致收敛性、逐项求积和逐项求导方面, Fourier 级数与幂级数完全不同. 又从Fourier 级数和三角级数之间的关系来看, 也与 Taylor 级数和幂级数之间的关系完全不同 (参见命题 14.4.2).

15.2.6 例题

Fourier 级数展开和 Parseval 等式在求级数和中常有应用. 下面是几个例子.

例题 15.2.2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}$ 的和.

解 由例题 15.1.2 以及收敛性定理, 我们有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x\in[-\pi,\pi],$$

用 $x=\pi$ 代入就得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 然后利用

$$a_0=\frac{2\pi^2}{3},\ a_n=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2},\ b_n=0,\ n=1,2,\cdots,$$

由 Parseval 等式, 就得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}.$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

同样, 对 $f(x)=x^3,\ x\in(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 展开式

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(6-\pi^2n^2)\frac{\sin nx}{n^3},\ x\in(-\pi,\pi)$$

应用 Parseval 等式, 可以得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^6\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n(6-\pi^2n^2)\frac{1}{n^3}\right)^2,$$

整理后得到

$$\frac{2}{7}\pi^6=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^4}{n^2}-\frac{48\pi^2}{n^4}+\frac{144}{n^6}\right),$$

再利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, 即可解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{\pi^6}{945}$. □

例题 15.1.2 **之解 3** 在学了 Fourier 级数的逐项积分定理后可以如下求出在区间 $(-\pi,\pi)$ 上函数 x^3 的 Fourier 级数, 并同时确定其收敛性.

第一步与过去一样, 先求出 (15.12). 然后逐项积分得到等式

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}(1-\cos nx),$$

其中的常数项虽是个无穷级数, 但可以不必去管它, 只需直接接照公式 (15.1) $(n=0)$ 就可以得到所要的常数项 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{3}$, 因此就得到 Fourier 余弦级数展开式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

再用逐项积分方法得到等式

$$x^3 = \pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx.$$

在第一项中将 x 用它的 Fourier 级数代替, 就得到与解 1 相同的答案. □

下面将对于系数单调的 Fourier 级数作讨论, 其中的方法和结果都很有意义, 同时与过去的许多讨论也有联系. 这里的材料见 [19] 的卷 3 第 666 小节.

例题 15.2.3 设数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 且已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛, 则函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 于区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积.

证 从函数项级数的 Dirichlet 一致收敛判别法知道 f 在 $x \neq 0$ 时连续, 因此只有 $x=0$ 有可能是瑕点. 以下只需要证明 $x=0$ 为瑕点时 $|f|$ 在 $[0,\pi]$ 上广义可积. 为此将下列积分作分拆:

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

对于 $\pi/(k+1)\leqslant x\leqslant \pi/k$ 时的函数 f 作估计如下:

$$|f(x)| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k} b_i \sin ix\right| + \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \sin ix\right|,$$

其中右边第一项不超过 $S_k = b_1+\cdots+b_k$, 而第二项可利用 $\{b_n\}$ 非负单调减少的条件和Abel 变换 (13.20) 估计如下 (参见例题 14.1.7):

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \sin ix\right| \leqslant \frac{b_{k+1}}{|\sin x/2|} \leqslant \frac{b_{k+1}}{|x/\pi|} \leqslant (k+1)b_{k+1} \leqslant (k+1)b_k,$$

因此就有

$$\int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant [S_k+(k+1)b_k]\cdot\frac{\pi}{k(k+1)} = \pi\left[\frac{S_k}{k(k+1)}+\frac{b_k}{k}\right].$$

令 $k=1,\cdots,n$ 代入并相加, 就得到

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \pi\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k(k+1)} + \pi\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}.$$

对右边第一项利用例题 13.2.7 中的类似方法可以得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}b_i = \sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i} - \frac{S_n}{n+1},$$

从 $b_n\to 0$ 可见右边第二项当 $n\to\infty$ 时也趋于 0, 因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

并最后估计得到

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

因此积分 $\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例题 15.2.4 设数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 且已知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 于 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 是 f 的 Fourier 级数.

证 由于 f 于 $x\neq 0$ 时连续, 只需讨论 $x=0$ 为瑕点时的情况. 利用广义积分的 Abel 判别法可知积分 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ 均收敛. 由于 f 为奇函数, 因此就得到 $a_n=0$, $n=0,1,\cdots$. 以下只要证明 $b_n=2\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$.

写出

$$2\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\sin nx\right)\mathrm{d}x,$$

从 $\{b_k\}$ 单调收敛于 0, 又用三角变换和 Jordan 不等式可知对任意 $m\geqslant 1$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sin kx\sin nx\right|\leqslant\left|\frac{\sin nx}{\sin(x/2)}\right|\leqslant\left|\frac{nx}{x/\pi}\right|=n\pi,$$

因此从 Dirichlet 一致收敛判别法知道积分号下的级数在 $[0,\pi]$ 上一致收敛, 用逐项积分计算就可以得到所求的结果. □

非 Fourier 级数的三角级数 合并以上两个结果就可以知道当 $\{b_n\}$ 单调趋于 0 时, 处处收敛的三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 是其和函数 f 的 Fourier 级数的充分必要条件是数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛①. 因此在 Bessel 不等式 (即命题 15.1.7) 后注 2 中举出的例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(0<p\leqslant\frac{1}{2})$ 仍然是其和函数 f 的 Fourier 级数, 当然 f 不平方可积. 不难证明该注中的另一个例子也是如此②.

但在命题 15.2.9 后所举的例子, 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln x}$ 等, 则确实不是 Fourier 级数, 而且它的和函数一定不是可积和绝对可积函数.

关于三角级数何时必为 Fourier 级数有下列著名结果, 上面的例题 15.2.4 只是它的一个特例.

命题 15.2.11 (du Bois Reymond 定理) 在以下两种情况下的三角级数必是其和函数的 Fourier 级数: (1) 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛的三角级数的和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积; (2) 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外收敛的三角级数, 其和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积.

---

① 这里可以与例题 14.1.7 和 14.1.8 的结果进行比较, 可见要使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的条件要强得多.

② 这是因为对于余弦三角级数有与例题 15.2.3 和 15.2.4 类似的结论, 证明也是类似的.

在三角级数展开方面的重要结果还有展开的惟一性定理 (请与命题 15.2.3 在条件和结论两个方面进行比较).

命题 15.2.12 (Cantor 定理) 如果有两个三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 和 $\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于同一个函数, 则这两个三角级数必恒同: $a_n=\alpha_n\ (n=0,1,\cdots)$, $b_n=\beta_n\ (n=1,2,\cdots)$.

小结 虽然我们不能在这里证明这些定理, 但还应当理解它们的重要意义 (证明见 [19] 的卷 3 第 733~734 小节): 这就是在理论上证明了, 在三角级数展开式中我们所见所用的绝大多数情况都是 Fourier 级数展开式.

15.2.7 练习题

1. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}),\\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2}, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$ 展开为余弦级数, 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的值.

2. 设对于 $a>0$ 有函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\frac{a}{2}],\\ a-x, & x\in(\frac{a}{2},a],\end{cases}$ 将 f 展开为: (1) 余弦级数, (2) 正弦级数.

3. 设 α 为非整数, 利用 $f(x)=\cos\alpha x, x\in(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 展开式, 证明下列关于余切函数和余割函数的部分分式展开式:
$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$
$$\csc x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$
且求出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}$ 的和.

4. 将下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数:

   (1) $f(x)=|\sin x|$; (2) $f(x)=\begin{cases}ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi].\end{cases}$

5. 将下列函数展开为正弦级数:

   (1) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}, x\in[0,\pi]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

6. 将下列函数展开为余弦级数:

(1) $f(x)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}),\\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}].\end{cases}$

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -\pi-x, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

(1) 求 f 的 Fourier 展开式;

(2) 讨论 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 f, 是否一致收敛?

8. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 证明 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$, 使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-P_n(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

9. 设 f 为周期 2π 的连续函数, 且已知 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 证明: 若右边的级数一致收敛, 则其和函数一定就是 f.

10. 设 $0<a<\pi$, 利用函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a;\\ 0, & a\leqslant|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式, 求下列级数的和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 na}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 na}{n^2}$.

§15.3 对于教学的建议

15.3.1 学习要点

1. Fourier 级数与幂级数是两类最重要的函数项级数. 如果说幂级数的通项是从计算角度来看最为简单的单项式, 则 Fourier 级数的通项就是最简单的周期函数——正弦函数与余弦函数. 将一般的周期函数展开为 Fourier 级数具有重要的理论和应用价值. 在许多具体的应用领域中 Fourier 级数的每项均有物理意义, 而幂级数则不是如此.

2. 一个函数的 Fourier 级数并不一定收敛, 也不一定收敛于这个函数本身. 但与 Taylor 级数相比, Fourier 级数的收敛条件还是很宽的. 可以说 Fourier 级数是至今为止我们遇到的最优美的一类级数, 这可以从以下几个方面看

出: 局部性定理; 收敛条件; 逐项积分与逐项求导的条件; Fourier 展开式的最佳均方逼近性质; 三角函数系可以构成无穷维空间的规范正交基等等.

3. 一个具体给定的周期函数的 Fourier 系数的计算, 特别是在函数的周期为 $2l$ $(l \neq \pi)$ 的情况下, 是比较费力的事. 在习题课上, 应当举出一些具体计算给定函数的 Fourier 系数的例题, 结合一些计算技巧, 耐心地将 Fourier 系数计算出来. 在练习题中, 也应该含有这方面的习题. 然而, 这方面的例题与习题都不宜太多, 因为 Fourier 级数理论的核心部分是 Fourier 级数的收敛性定理、Parseval 等式与一些相关结果的证明或应用, 如果让学生觉得 Fourier 级数理论主要不过是按公式计算 Fourier 展开式, 那就不能算是成功的教学.
4. Bessel 不等式和 Parseval 等式体现了周期函数的内在性质, 在分析估计中非常有用. 本章在这方面给出了较多的介绍, 还应当指出 Parseval 等式在证明 Wirtinger 不等式中的妙用.

15.3.2 参考题

1. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 证明:
   (1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上单调减少, 则 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0,\ n=1,2,\cdots;$
   (2) 设 f 在 $(0,2\pi)$ 可导且 f' 在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 如果 f' 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加, 则 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0,\ n=1,2,\cdots;$
   (3) 定义 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t,\ x\in[0,2\pi]$. 如果 F 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加, 则有与 (2) 相同的结论.
2. 设 f 为区间 $[0,2\pi]$ 上的下凸函数, 证明: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0\ \forall n\geqslant 1.$
3. 设 f 是周期 2π 的连续函数, $F_h(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $h>0$,
   (1) 证明 F_h 是以 2π 为周期的连续可微函数;
   (2) 证明对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,h>0$, 使在 $[-\pi,\pi]$ 上一致成立 $|f(x)-F_h(x)|<\varepsilon$;
   (3) 利用命题 15.2.8 重新证明 Weierstrass 第二逼近定理;
   (4) 计算 F_h 的 Fourier 级数.
4. 设 f 为周期 2π 的连续函数, $f(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 定义
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$
计算 F 的 Fourier 系数, 并证明: (1) 关于 f 的 Parseval 等式, (2) F 的 Fourier 级数一致收敛.

5. (1) 利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\displaystyle\int_0^x\cos kt\,\mathrm{d}t$ 和 Dirichlet 核求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 之和.

   (2) 用类似的方法求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 之和.

6. 从上题的 (1) 所得的结果出发, 直接证明以下展开式成立:

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\ 0<x<\pi;$

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\dfrac{\pi}{4},\ 0<x<\pi;$

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\dfrac{x}{2},\ |x|<\pi;$

   (4) $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ |x|<\pi;$

   (5) $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ 0\leqslant x\leqslant\pi;$

   (6) $\dfrac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$

7. (Steklov 不等式) 设连续函数 f 在 $[0,\pi]$ 上分段可导, 且 f' 在 $[0,\pi]$ 上可积和平方可积, 证明: 只要条件 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi}f=0$ 和 (2) $f(0)=f(\pi)=0$ 之中有一个满足, 就成立不等式

$$\int_0^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

   且其中成立等号的条件为 (1) $f(x)=A\cos x$, (2) $f(x)=B\sin x$.

8. (Wirtinger 不等式) 设连续函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, $f(-\pi)=f(\pi)$, 且 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 又 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

   且仅当 $f(x)=A\cos x+B\sin x$ 时成立等号.

9. 设周期 2π 的函数 f 及其导函数 f' 均分段连续, 证明: f 的 Fourier 级数在不含有 f 的间断点的任何闭区间上一致收敛.

10. 证明: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}=\dfrac{\pi-1}{2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$.

11. 设函数 f 是以 2π 为周期的连续函数, 不恒等于 0, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=0,\ \ k=0,1,\cdots,n.$$

   证明: f 在任何长度大于 2π 的区间上至少改变符号 $2n+2$ 次.

12. 设 f 是在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调连续函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx = 0.$$

13. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}\sin nx$, 证明: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|\geqslant \dfrac{2}{\pi \mathrm{e}}$.

14. 对于收敛于 0 的给定正数数列 $\{\varepsilon_n\}$, 证明: 存在连续函数 f, 使得 f 的 Fourier 系数 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 对于无限多个 n 满足不等式

$$|a_n|+|b_n|>\varepsilon_n.$$

15. 设 $f\in C[-\pi,\pi]$, 且其导函数 f' 可积和绝对可积, 若有 $f(x)\sim \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 证明:

$$f'(x)\sim \frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx - na_n\sin nx],$$

其中 $c=[f(\pi)-f(-\pi)]/\pi$, 且有 $c=\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$.

16. 设三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 有极限 $c=\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$, 又有可积和绝对可积函数 φ 满足条件

$$\varphi(x)\sim \frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx - na_n\sin nx],$$

证明上述三角级数处处收敛, 为其和函数 f 的 Fourier 级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

且在 φ 的连续点上成立 $f'(x)=\varphi(x)$.

17. 利用上题证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}$ 是某个连续可微函数 f 的 Fourier 级数, 且 f 满足微分方程 $f''+f=-\sin x$, 并求出 f

18. 证明: 在区间 $[a,b]$ 上的可积和平方可积函数空间中, 由有限个函数组成的正交系不可能是完备的.

19. (de la Vallée Poussin 核) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 记

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t.$$

证明: (1) V_n 是 n 次三角多项式, (2) 函数列 $\{V_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

20. 证明: 三角级数

$$\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n}+\cdots$$

的部分和函数 $S_n(x)\geqslant -1$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi} S_n(x)=-\ln 2$.

第十六章 无穷级数的应用

无穷级数作为一种分析手段具有多方面的应用, 本章只介绍其中的几点供教学中参考. §16.1 节是级数在积分计算中的应用, §16.2 节讨论级数求和问题, §16.3 节是关于 Weierstrass 逼近定理的证明方法及其应用, §16.4 节用无穷级数构造一些具有特殊性质的函数. 最后一节为学习要点和参考题.

§16.1 积分计算

从第九章不定积分已经知道, 初等函数的原函数未必是初等函数. 因此在第十章中用 Newton-Leibniz 公式计算积分的方法的适用范围是有限的. 在 12.3.2 小节 (见上册 390 页) 中列举了几个特殊的广义积分的计算, 可以说每一个例题都有其特殊的方法. 本节将从方法论的角度介绍无穷级数在积分计算中的应用. 这方面的更一般性讨论见后面第二十三章的含参变量积分.

16.1.1 关于逐项积分的补充命题

利用函数项级数的逐项积分法可以计算出许多在定积分或广义积分理论中无法计算的积分. 对于常义积分来说, 应用一致收敛充分条件下的逐项积分, 或者 Arzela 控制收敛定理 (命题 14.2.4) 一般就可以解决问题. 但是对于广义积分问题则还需要补充几个新的工具. 下面只对无穷限广义积分写出保证逐项积分成立的两个命题, 它们当然可以推广到瑕积分上去.

命题 16.1.1 设在区间 $[a,+\infty)$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 单调收敛于连续函数 φ, 又设每个 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 φ 均在区间 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 为确定起见, 只对函数列 $\{f_n\}$ 单调减少的情况写出证明. 对于 $A>a$ 写出

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\=\int_a^{A}[f_n(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x+\int_A^{+\infty}[f_n(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{16.1}$$

利用 $\{f_n\}$ 单调减少收敛于 φ, 取定 N, 由于 f_N 和 φ 在 $[a,+\infty)$ 上均广义可积, 因此对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 可以取定 A, 使得

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} [f_N(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此当 $n > N$ 时 (16.1) 右边的第二项满足估计:

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} [f_n(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant \int_A^{+\infty} [f_N(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

然后在区间 $[a, A]$ 上利用 Dini 定理知道 $\{f_n\}$ 一致收敛于 φ, 因此存在 $N_1 > N$, 使得当 $n > N_1$ 时 (16.1) 右边的第一项也小于 ε. □

注 对于函数项级数有相应的结论, 从略.

为了建立更一般的充分条件. 这里需要引入一个新的概念.

定义 设函数列 $\{f_n\}$ 中的每个函数在区间 $[a, +\infty)$ 上均广义可积. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 使得当 $A > A_0$ 时 $\left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ 对于所有 n 同时成立, 则称**广义积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛**.

命题 16.1.2 设在区间 $[a, +\infty)$ 上函数列 $\{f_n\}$ 内闭一致收敛于函数 φ, 又设 $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分关于 n 一致收敛, 且极限函数 φ 于 $[a, +\infty)$ 上内闭可积, 则成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 (只列出主要步骤) 先用 Cauchy 收敛准则证明 φ 于 $[a, +\infty)$ 上广义可积, 然后可用三分法估计如下:

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\qquad \leqslant \int_a^A |\varphi(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_A^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$ □

注 将上两个命题所要建立的等式改写为

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \lim_{n\to\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{16.2}$$

并应用极限顺序交换的基本原理 (命题 14.2.1 后注 2), 就可以知道上述命题中的广义积分关于 n 的一致收敛条件可以更换为

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

关于 $A \in [a, +\infty)$ 的一致性.

16.1.2 例题

首先指出, 这里的要点是将积分计算问题转化为级数求和问题. 在这之后的

问题从数值角度来说就是近似计算问题. 至于是否所求的积分值都有简单的表达式, 即能够用熟悉的常数和有限次初等运算得到, 那当然不一定.

例题 16.1.1 出现在一系列应用问题中的积分

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \tag{16.3}$$

称为**第二类完全椭圆积分**, 其中 $k\in(0,1)$ 为参数. 试将 $E(k)$ 展开为 k 的幂级数, 并利用它研究椭圆周长近似公式

$$s_1=\frac{\pi}{2}[a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}] \tag{16.4}$$

当椭圆偏心率充分小时的误差的渐近性态, 其中 $a>b>0$ 为椭圆的长半轴和短半轴, 偏心率 $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ (公式 (16.4) 来自上册 356 页的例题 11.3.3).

解 除了 $k=0,1$ 之外这个积分的被积函数没有初等原函数 (参见上册 297 页), 但要将 $E(k)$ 展开为幂级数则是容易的. 在 $(1-x)^{1/2}$ 的 Maclaurin 级数中令 $x=k^2\sin^2\varphi$ 代入, 就得到

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-3)!!}{2^n n!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi,\ 0\leqslant k<1.$$

以 k 为参数, 以 $\varphi\in[0,\pi/2]$ 为自变量, 这是同号函数项级数, 从 Dini 定理可知一致收敛, 因此可以逐项积分, 这样就得到所要的展开式:

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right).$$

椭圆周长可以表示为

$$s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=4aE(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<1,$$

因此就有

$$\begin{aligned}s=2\pi a\Big(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6-\frac{175}{16\,384}\varepsilon^8\\-\frac{441}{65\,536}\varepsilon^{10}-\frac{4\,851}{1\,048\,576}\varepsilon^{12}\Big)+O(\varepsilon^{14})\quad(\varepsilon\to0).\end{aligned} \tag{16.5}$$

同时将近似计算公式 (16.4) 右边按 ε 展开, 并与上式比较得到:

$$s_1=s-2\pi a\left(\frac{5}{16\,384}\varepsilon^8\right)+O(\varepsilon^{10})\quad(\varepsilon\to0).\qquad\square$$

注 本题取材于 [43] 卷 2 第八章 §7. 其中还有椭圆周长的另一个近似公式

$$s_2=\pi(\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}). \tag{16.6}$$

采用同样的分析方法可以知道

$$s_2=s+2\pi a\Big(\frac{3}{16\,384}\varepsilon^8\Big)+O(\varepsilon^{10})\quad(\varepsilon\to0).$$

容易看出, 这两个公式的误差符号相反, 若采取加权平均的方法就可能得到更好的结果: 将 (16.4) 乘 3/8 与 (16.6) 乘 5/8 再相加, 就得到新公式:

$$s_3=\pi\left(\frac{9}{8}(a+b)+\frac{3}{16}\sqrt{2a^2+2b^2}-\frac{5}{8}\sqrt{ab}\right). \tag{16.7}$$

可以发现新公式的幂级数展开式的 ε^8 项和 ε^{10} 项的系数与 (16.5) 的展开式完全相同. 这里前者是预期的, 而后者是意外的. 于是误差的级别为 $O(\varepsilon^{12})$:

$$s_3 = s + 2\pi a\Big(-\frac{7}{1\,048\,576}\varepsilon^{12}\Big) + O\left(\varepsilon^{14}\right).$$

从数值计算可以知道, 这个近似公式不仅在 ε 充分小时有效, 而且直到 $\varepsilon = 0.9$ 时的相对误差还小于 10^{-4}.

利用极限顺序交换的方法可以较简单地计算命题 12.3.7 中的 Euler-Poisson 积分 (即概率积分).

例题 16.1.2 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-x^2}$ $(x \geqslant 0)$ 证明:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

解 用平均值不等式可以看出

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+n\left(1+x^2/n\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1},$$

因此在区间 $[0,+\infty)$ 上函数列 $\left\{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}\right\}$ 单调减少收敛于极限函数 e^{-x^2}. 应用命题 16.1.1 即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

用变量替换 $x = \sqrt{n}\tan t$ 计算左边极限号下的积分如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sqrt{n}\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sim \frac{\sqrt{n}\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

这里最后一步利用了 Wallis 公式 (11.29). □

例题 16.1.3 (Euler 积分) 证明: 若 $0 < p < 1$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

证 将积分拆开为区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的两个积分.

在区间 $(0,1)$ 上 $\dfrac{1}{x^p(1+x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n-p}$, 它在 $(0,1)$ 上虽然不一致收敛, 但除去第一项之外, 级数的部分和在 $[0,1]$ 上一致有界, 因此可以根据 Arzela 定理 (即命题 14.2.4) 交换积分与求和的顺序①, 得到

① 若不用 Arzela 定理, 则可以用 14.2.4 小节的题 5.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-p}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n-p}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-p}.$$

对于 $[1,+\infty)$ 上的积分可作变量替换变为 $[0,1]$ 上的积分, 经同样计算得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}(1+x)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-(1+p)} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}.$$

合并两个结果得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{p-n} + \frac{1}{p+n}\right)$$
$$= \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2p}{p^2-n^2}.$$

最后利用余割函数 $\csc x$ 的部分分式展开式就得到所求结果. (该公式见 15.2.7 小节练习题 3, 也可以从 $\sin x$ 的无穷乘积展开式 (13.27) 求导得到.) □

注　本题的积分有各种不同的形式, 例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\ (0<a<1), \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^n}\ (0<m<n)$$

等. 此外, 上册 402 页参考题 8 中的所有公式均为本题之特例, 且其中的参数 m, n 等都可以不限于正整数. 读者可以对比两处所用方法, 从而知道在积分计算问题中我们已经取得的进步.

在上册 401 页引进了 $x>0$ 时的 Γ 函数的积分定义, 在例题 13.4.4 中又引进了它的无穷乘积定义. 利用积分号下取极限的过程, 我们可以证明当 $x>0$ 时两个定义是一致的.

例题 16.1.4 当 $x>0$ 时成立

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证　在广义积分中作变量替换 $t=\ln\frac{1}{s}$, 当 t 从 0 到 $+\infty$ 时, s 从 1 到 0, 于是得到

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{x-1}\mathrm{d}s.$$

利用

$$\ln\frac{1}{s} = \lim_{n\to\infty} n(1-s^{\frac{1}{n}}),$$

而且右边的极限过程关于 n 单调, 就可以用命题 16.1.1 得到

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[n(1-s^{\frac{1}{n}})]^{x-1}\,\mathrm{d}s.$$

对于右边的积分用变量替换 $s^{\frac{1}{n}}=y$, 然后分部积分就可以得到所要的结果. □

16.1.3 练习题

1. (广义积分的控制收敛定理) 设函数列 $\{S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中内闭可积, 且内闭一致收敛于函数 S, 如果存在函数 F, 使 $|S_n(x)|\leqslant F(x)$ 对于每个 n 和每个 x 都成立, 且广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数均非负, 收敛半径为 $+\infty$, 和函数为 $S(x)$. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛, 则广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}S(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 且等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$.
(去掉系数非负条件后本题结论仍成立, 这时可以利用命题 16.1.2 后的注.)

3. 证明以下结果:
(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{8}$;
(3) $\displaystyle\int_0^1\ln x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=2-\frac{\pi^2}{6}$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$.

4. 证明: $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

5. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^24^2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1/2}$.

§16.2 级数求和计算

本节列举了级数求和的各种方法供读者参考. 其中级数和的概念是在通常意义下的. 关于 Cesàro 求和概念见 15.2.3 小节, 本节不再讨论.

16.2.1 级数求和法

对于收敛级数来说, 原则上已经可以通过数值计算来得到级数和的近似值. 但如果能够发现某个级数的和可以用已知常数经过简单运算得到, 则当然更好. 由 Euler 解决的 Basel 问题, 即求出

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

就是级数求和方面的一个光辉例子. 在得到这个答案之前, Euler 已经计算出级数和的近似值 1.644 934 ⋯ 直到 20 位有效数字, 但仍然看不出级数和是什么特殊的常数. 当然没有人想到这里会出现圆周率 (参见 [17, 第 3 章] 以及 13.4.2 小节末的注).

从命题 2.5.2 中的例子 $\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 可以知道, 一个收敛的数项级数 (或函数项级数) 的和 (或和函数) 未必能够用过去已经掌握的数或函数经过简单的运算表示出来. 例如, 直到现在为止对于 p 级数的和

$$\zeta(p)=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

当 p 为奇数时是否会与 p 为偶数时 Euler 所得的结果 (见上册 217 页 (7.26) 和下面的例题 16.2.3) 有类似的表达式, 始终还只是个猜测. 目前最好的结果是在 1978 年 Apéry 证明了 $\zeta(3)$ 为无理数 (见美国数学月刊 108 卷(2001) 222~231 页).

因此, 在本节只是根据经验列出求级数和的若干方法, 这里不可能有什么万能的方法.

方法一 以已知的数项级数或函数项级数展开式为基础的方法无疑是有用的. 例如, 在一个幂级数展开式或 Fourier 级数展开式中, 将变量用不同的特定值代入, 就可以得到无穷多个数项级数的和, 或者用简单运算将所要研究的级数变换为已知级数等等. 当然这完全依赖于积累和经验.

方法二 如果能利用所谓**裂项相消法** (或**连锁消去法**) 得到部分和的紧凑形式, 则级数问题就转化为数列或函数列的极限问题.

方法三 这也可以看成是方法一的范围, 即用函数项级数的逐项积分或逐项微分方法将未知的级数转变为已知的级数. 这在幂级数中是最常用的方法, 但也可能解决其他类型的函数项级数求和计算.

方法四 (Abel 方法) 这是以幂级数理论中的 Abel 第二定理为基础的级数求和方法: 对于给定的收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 研究幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 它的收敛半径不会小于 1. 如果能够求出它的和函数 $S(x)$, 则所求的

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1^-}S(x)=S(1).$$

16.2.2 例题

例题 16.2.1 求下列级数的和:

$$\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}+\cdots.$$

解 1 (裂项相消法) 易见 $x=1$ 时级数发散. 对于 $x\neq1$ 记级数通项为 a_n, 从前后两项之间的关系式 $a_n(n+x)=na_{n-1}$ $(a_0=1)$ 出发得到

$$(n+1)a_n+(x-1)a_n=na_{n-1},$$

可见于 $x \neq 1$ 时有

$$a_n=\frac{1}{x-1}[na_{n-1}-(n+1)a_n],$$

从而可以得到级数的第 n 个部分和为

$$S_n=\frac{1}{x-1}-\frac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)},\ n=1,2,\cdots.$$

因此问题归结为上式右边第二项的敛散性. 利用 Sapagof 判别法 (命题 13.2.3) 或渐近公式 (13.24) 知第二项当 $x<1$ 时发散, 而当 $x>1$ 时收敛于 0. 因此级数当 $x \leqslant 1$ 时发散, 而当 $x>1$ 时收敛于和 $1/(x-1)$. □

注 用裂项相消法求和时一般不必先讨论级数的敛散性. 若要讨论本题中级散的敛散性, 则用渐近公式 (13.24) 即可. 当然也可用 Raabe 判别法.

解 2 (逐项积分法) 由敛散性讨论可知只要研究 $x>1$ 的情况. 级数的通项 (差一个因子 x) 可以写为积分形式:

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\int_0^1(1-t)^{x-1}t^n\,\mathrm{d}t.$$

(这里虽然 x 未必为自然数, 但上册 326 页的分部积分计算仍有效. 实际上这都是 23.3.1 小节中 Beta 函数的特例.)

用逐项积分法计算如下:

$$\begin{aligned}S(x)&=x\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(1-t)^{x-1}t^n\,\mathrm{d}t=x\int_0^1(1-t)^{x-2}t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{x-1}\int_0^1(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

其中逐项积分的合法性当 $x \geqslant 2$ 时可以用 Dini 定理知积分号下的函数项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-t)^{x-1}t^n$ 一致收敛来解决, 但是当 $1<x<2$ 时 $\int_0^1(1-t)^{x-2}\,\mathrm{d}x$ 为收敛的瑕积分, 因此需要用命题 16.1.1 的结论. □

例题 16.2.2 (Euler) 求级数 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ 的和.

这就是历史上的 Basel 问题 [17, 18]. Euler 是求出本题答案的第一人. 他根据类比猜测出正弦函数的无穷乘积展开式 (13.24). 将它改写为

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots,$$

其中左边当 $x=0$ 时理解为其极限值 1, 因此左边为

$$1-\frac{x^2}{6}+O(x^4)\ \ (x\to 0).$$

Euler 又将展开式和多项式的根与系散关系作类比, 看出右边应该是

$$1-\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+O(x^4)\ \ (x\to 0),$$

比较两边的 x^2 项的系数就知道所求的级数和为 $\dfrac{\pi^2}{6}$. 下面我们将 Euler 的方法严格化, 作为第一个解.

解 1 在正弦函数的无穷乘积展开式中令 $y = x^2/\pi^2$, 然后讨论函数

$$F(y) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{n^2}\right). \tag{16.8}$$

这时由于 $F(y) = 1 - y\pi^2/6 + O(y^2)$, 因此只需要从 (16.8) 右边的无穷乘积出发证明函数 F 在 $y = 0$ 处的导数 $F'(0) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 即可.

对函数 F 在 $|y| < 1$ 范围内取对数, 并求导得到

$$\frac{F'(y)}{F(y)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\dfrac{1}{n^2}}{1 - \dfrac{y}{n^2}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - y},$$

其中右边逐项求导的合理性容易从 Weierstrass 一致收敛性判别法得到验证, 同时这也保证了 F 的可微性. 然后令 $y = 0$ 代入, 利用 $F(0) = 1$, 可见所求结果成立. 因此有

$$F(y) = 1 - y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) + o(y)\ (y \to 0),$$

这样就知道有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) + o(x^2)\ (x \to 0),$$

因此 Euler 的方法是正确的. □

注 在作代换 $y = x^2/\pi^2$ 时有 $y \geqslant 0$, 但从 (16.8) 可见, F 对于 $y < 0$ 仍有意义, 因此上述计算是正确的. 有兴趣的读者可以用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 对此作出解释.

解 2 **(用反正弦函数的幂级数展开式)**

先证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{16.9}$$

写出函数 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 的幂级数展开式

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

在其中令 $x = \sin t$, 得到

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\sin^{2n+1}t,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

上式两端对 t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 积分, 并对右端逐项积分, 得到

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

这就证明了 (16.9). 然后从

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

即可解出 $S = \pi^2/6$. □

注 1 解 2 也是 Euler 找到的, 发表于 1743 年 (参见 [17]), 又见于美国数学月刊 卷 94 (1987) 662～663 页和卷 95 (1988) 331 页. 实际上这个思路也出现在 [39] 的第二章的习题 41 中. 此外, 那里还指出从 $(\arcsin x)^2$ 的 Maclaurin 级数展开式出发也可以达到目的.

注 2 有很多函数的 Fourier 级数展开式可用于此题. 例如见例题 15.2.2, 这里不再重复.

以上的第一种解法可以推广到一般情况, 即利用正弦函数的无穷乘积展开式可以求出 p 为偶数时的所有 p 级数之和. 这是 Euler 最得意之作.

例题 16.2.3 证明: 对于所有正整数 n, $p = 2n$ 的 p 级数之和为

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^{2n}} = \frac{\overline{B}_n}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}, \tag{16.10}$$

其中 $\overline{B}_n$ $(n \geqslant 1)$ 为 Bernoulli 数. 前七个 Bernoulli 数为 $\overline{B}_1 = \frac{1}{6}$, $\overline{B}_2 = \frac{1}{30}$, $\overline{B}_3 = \frac{1}{42}$, $\overline{B}_4 = \frac{1}{30}$, $\overline{B}_5 = \frac{5}{66}$, $\overline{B}_6 = \frac{691}{2\,730}$, $\overline{B}_7 = \frac{7}{6}$ (见 7.2.3 小节).

证 从正弦函数的无穷乘积 (见例题 13.4.3)

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

出发, 取绝对值后再取对数, 将无穷乘积转化为无穷级数:

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

对于 $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ 的 x, 在上式两边求导, 得到①

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}. \tag{16.11}$$

这里逐项求导的合理性不难用 Weierstrass 一致收敛性判别法加以验证, 从略. 然后在 $|x| < \pi$ 时作以下运算:

① 公式 (16.11) 已经出现在 15.2.7 小节的练习题 3, 那里是从函数 $\cos px$ $(0 < p < 1$, $x \in (-\pi, \pi))$ 的 Fourier 展开式中令 $x = 0$ 代入得到.

$$
\begin{aligned}
x\cot x &= 1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-m^2\pi^2}=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dfrac{x^2}{m^2\pi^2}}{1-\dfrac{x^2}{m^2\pi^2}}\\
&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)^n=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)^n\\
&=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{\pi^{2n}}x^{2n},\ |x|<\pi,
\end{aligned}
$$

其中 $s_{2n}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^{2n}}$ 即是 $p=2n$ 时的 p 级数的和 (在以上计算中对二重正项级数求和利用了第十三章第一组参考题 9).

另一方面, 从 (14.25) 已经得到公式

$$
x\cot x=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \tag{16.12}
$$

根据幂级数展开式的惟一性就可以得到所要的结果. □

注 由此可得到 Bernoulli 数的几个重要性质. 首先是 $\overline{B}_n=(-1)^{n-1}B_{2n}>0$. 其次, 容易证明 $1<s_{2n}<2n/(2n-1)$ (见例题 13.2.1), 因此由 (16.10) 和 Stirling 公式可以得到 Bernoulli 数的渐近公式:

$$
\overline{B}_n\sim\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}. \tag{16.13}
$$

这在确定例题 14.4.2 中的几个幂级数的收敛半径时有用. 又从

$$
\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}
$$

(见上册 374 页题 15) 可知, 用 (16.13) 右边的渐近公式可以对于 Bernoulli 数 $\overline{B}_n$ 给出相对误差很小的估计. 最后, 可由此看出在 $n>\pi e\approx 8.54$ 之后 Bernoulli 数 $\{\overline{B}_n\}$ 的增长非常快, 虽然 $\overline{B}_7$ 刚超过 1, 但 $\overline{B}_{13}$ 已经大于 10^6.

下面的前半题已于本书多次见过.

例题 16.2.4 (1) 求 Leibniz 型级数的和 $S=1-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$; (2) 令 $a_n=1-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2,\ n=1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

解 (1) 用 Abel 方法. 根据 Abel 第二定理, 有 $S=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)$, 其中

$$
S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots.
$$

对上式右边的幂级数在 $(-1,1)$ 内逐项求导得到

$$
S'(x)=1-x+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+x},
$$

又利用 $S(0)=0$, 因此可以求出

$$
S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt=\ln(1+x),\ -1<x<1.
$$

从而得到

$$S=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

(2) 从 (1) 可见 a_n 就是该级数的第 n 个余项 (再乘以 -1), 因此可以得到 $a_n=\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$, 再用 $\sum\int=\int\sum$ 即可得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\ln 2-\frac{1}{2}$. □

注 过去已经知道 (1) 中的级数和, 但主要是通过一个特殊的 Catalan 恒等式将问题转化为求数列 $\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\}$ 的极限问题而解决的 (见例题 11.4.1 的注). 因此过去的这种方法太特殊了, 不如本题的 Abel 求和法可以解决不少级数求和问题.

Abel 方法也有可能解决某些函数项级数的求和问题.

例题 16.2.5 求三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 的和函数①.

解 从函数项级数的敛散性判别法可以知道级数在 $x\neq 2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时收敛, 因此只需求 $(0,2\pi)$ 上的和函数 S. 又从内闭一致收敛知 S 连续.

以 x 为参数, 另行引入变量 $\alpha\in(-1,1)$, 由 Abel 第二定理有

$$S(x)=\lim_{\alpha\to1^-}f(\alpha),$$

其中

$$f(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\alpha^n.$$

为简明起见在 $f(\alpha)$ 中没有指出与参数 x 的依赖关系. 在 $(-1,1)$ 内将此幂级数对 α 逐项求导, 并用 Euler 公式计算如下:

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\cos nx=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\\&=\mathrm{Re}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\frac{\cos x-\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}.\end{aligned}$$

然后再利用 $f(0)=0$ 求积得到

$$f(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2),\ -1<\alpha<1.$$

最后就有:

$$S(x)=\lim_{\alpha\to1^-}f(\alpha)=f(1)=-\frac{1}{2}\ln 2(1-\cos x)=-\ln 2-\ln|\sin\frac{x}{2}|.\quad\square$$

注 由所得的等式

$$\ln|\sin\frac{x}{2}|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

出发, 可以利用命题 16.1.2 逐项积分, 或者利用 Fourier 级数的逐项积分定理 (命题 15.2.9) 得到 Euler 积分 (命题 12.3.4) 的值:

① 对于余弦三角级数也有与例题 15.2.3 和 15.2.4 相同的结论 (见 [19] 的卷 3 第 666 小节), 因此事先就可以判定本题的和函数绝对可积, 而题中的三角级数为其 Fourier 级数.

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

从而对该积分的计算提供了一种级数解法.

下面是 1996 年新发现的圆周率公式.

例题 16.2.6 证明:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{16.14}$$

证 利用逐项积分可知在 $k>0$ 和 $0<x<1$ 时成立

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^{k-1}}{1-t^8}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (t^{k-1}+t^{k+7}+\cdots+t^{k-1+8n}+\cdots)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^k}{k} + \frac{x^{k+8}}{k+8} + \cdots + \frac{x^{k+8n}}{k+8n} + \cdots.\end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{2}/2$ 代入得到

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t^{k-1}}{1-t^8}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{k/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\cdot\frac{1}{8n+k}.$$

将这个结果与所求公式的右边比较, 可见已经得到右边的积分形式为:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x.$$

这是一个有理函数的定积分, 不难按照标准方法计算出它的值等于 π (已作为第十章的最后一个参考题). □

注 利用这个公式可以快速计算圆周率在小数点后的任意指定位数上的单个数字, 而不必求出在该位之前的所有数字. 由于这与过去所有算法的思路 (例如 8.7.1 小节中的刘徽-Archimedes 算法和 Salamin-Brent 算法) 不同, 因此有人称之为**圆周率的后现代算法**. 有兴趣的读者可以参考 [6, 51], 在后者的第二十章中附有为此编制的 Mathematica 程序. 但是要指出, 这里的圆周率在小数点后是按 16 进制展开的. 还不清楚是否存在与十进制对应的这类算法, 至少到现在还没有找到.

16.2.3 练习题

1. 设已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=B$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛并求其和.
2. 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 m 次多项式, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{P(n)}{n!}$ 的和.
3. 求 $1-\dfrac{2^3}{1!}+\dfrac{3^3}{2!}-\dfrac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.
4. 求下列级数和: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2}{n^2}$.

5. 设 $a > 1$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

6. 求 $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\cdots$ 的和.

7. 求 $1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{15}+\cdots$ 的和.

8. 求 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots$ 的和.

9. 设 $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ 的和.

10. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+3}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

11. 求 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}+\cdots$ 的和.

12. 求 $\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dfrac{x^{15}}{15!}+\cdots$ 的和函数

13. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

14. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

15. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x > 0$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

16. 设 $x > 1$, 求 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$ 的和函数.

§16.3 连续函数的逼近定理

在一个区间上将一个函数展开为某种函数项级数是研究无穷级数的基本目的之一. 这样就有可能用比较简单的函数来逼近原来的函数. 因此, 这类函数项级数的通项应当尽可能简单. 幂级数的优点就在于此. 但是能够展开为幂级数的函数类太窄, 一个函数即使无限阶可微也还不能保证它能展开为幂级数, 而即使能展开的话, 收敛域也可能太小, 不能满足要求.

Weierstrass 的连续函数逼近定理克服了所有这些困难. 这就是下面的 Weierstrass 第一逼近定理和第二逼近定理.

命题 16.3.1 (Weierstrass 多项式逼近定理) 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 一定可以用多项式一致逼近到任意程度, 这就是说对于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n = n(\varepsilon)$ 次多项式 P_n, 使得 $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ 对于 $x \in [a,b]$ 同时成立.

命题 16.3.2 (Weierstrass 三角多项式逼近定理) 周期 2π 的周期连续函数 f 一定可以用三角多项式一致逼近到任意程度, 这就是说对于每个给定的 $\varepsilon > 0$,

存在三角多项式 $S_n(x) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, 其中 $n = n(\varepsilon)$, 使得 $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ 对于一切 x 成立.

注 逼近定理的其他叙述方式可以是: 在第一逼近定理中, f 是一致收敛的多项式序列的极限函数, 也是一致收敛的多项式级数的和函数; 在第二逼近定理中, f 是一致收敛的三角多项式序列的极限函数, 也是一致收敛的三角多项式级数的和函数.

毫无疑问, Weierstrass 的逼近定理是数学分析中的头等重要的结果, 无论在理论上还是实际应用上都有重大的意义.

本节将对 Weierstrass 逼近定理的证明方法作介绍, 然后以例题的形式举出它的几个应用.

16.3.1 核函数方法

在 Fourier 级数的一章中已经见到了 Dirichlet 核与 Fejér 核 (在其参考题中还有 de la Vallée Poussin 核). 在 Weierstrass 逼近定理的许多证明方法中, 很多都可以归入核函数方法之中.

定义 设 $\Delta_n(x)$ 是在 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 上定义的以 n 为参数的函数, 且具有下列性质:

1. $\Delta_n(x)$ 为非负函数, 即 $\Delta_n(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $\Delta_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上广义可积, 且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
3. 对任意给定的 $\delta > 0$, 成立 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \Delta_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 这等价于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}\right)\Delta_n(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

则称 $\Delta_n(x)$ 为 (正) 核函数.

注 1 由定义可见, 可以将核函数看成为一个函数列. 但我们经常将它看成是以 n 为参数的函数 (或函数族). 实际上还可以定义带有连续参数的核函数. 在 Fourier 级数一章中的 Dirichlet 核与 Fejé 核的性质与这里的条件有些差异, 首先, Dirichlet 核不满足第一个条件, 即不是正核. 其次, 它们都是周期 2π 的周期函数, 因此需要将后两个条件中的 $\mathbf{R}$ 改为长度为一个周期的闭区间 $[-\pi, \pi]$.

注 2 这里需要强调指出, 从 15.2.1 的 Dirichlet 积分开始, 所用的方法与第十四章中的积分号下求极限的方法完全不同. 实际上从 Riemann 引理 (上册 313 页) 已经可以看到, 当 n (或其他参数) 趋于无穷大时, 积分号下的表达式未必有

极限, 然而积分作为 n (或其他参数) 的函数仍可能存在极限. 这里当然不可能用交换极限顺序的方法来求极限.

对于核函数而言, 一般将 $n \to \infty$ 时核函数的极限函数称为 Dirac 的 δ-函数, 也就是**广义函数**. 从核函数的定义可知, 这里的极限过程与广义函数都不能按照极限和函数的通常意义来理解. 广义函数是泛函分析中的研究内容. 例如可参看 [53] 的第七章 "广义函数".

注 3 关于核函数方法 (或奇异积分方法) 在数学分析中的介绍可以参考 [19] 的卷 3 第 723 小节, [60] 的卷 2 第 17 章 §4 和 [14] 的第 5 章等. 还可以参考 [35] 的第 10 章对于奇异积分的系统论述. 其中的记号和条件不尽相同.

下面举出几个核函数的例子.

1. 定义阶梯函数 $\Delta_n(x) = \begin{cases} n, & -\dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0, & \text{其他 } x, \end{cases}$ 则不难验证它满足核函数定义中的所有条件.

2. Weierstrass 逼近定理的 Landau 证明 (1908 年) 所用的核函数为

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{I_n}(1-x^2)^n, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

其中 $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x$. 这时核函数定义中的前两个条件显然满足. 对于条件 3, 当 $0 < \delta < 1$ 时, 从

$$0 \leqslant \int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\delta}^{1}(1-\delta^2)^n \,\mathrm{d}x = (1-\delta^2)^n(1-\delta),$$

以及对于 I_n 的估计

$$I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x > 2\int_{0}^{1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1},$$

就知道

$$0 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}\right)\Delta_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (n+1)(1-\delta^2)^n(1-\delta),$$

因此当 $n \to \infty$ 时极限为 0.

3. 实际上构造核函数的一个很一般的方法是先在 $\mathbf{R}$ 上定义一个非负可积函数 $f(x)$, 使它在某个区间 $[-a, a]$ $(a > 0)$ 之外恒等于 0, 但积分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 然后令 $\Delta_n(x) = \dfrac{n}{I} f(nx)$ 即可.

核函数的作用在于它与另一个函数 f 通过**卷积**运算得到的新的函数 $f * \Delta_n$:

$$(f * \Delta_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Delta_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u. \tag{16.15}$$

在数学文献中称这些积分为**奇异积分**.

对于上面的第一个例子的核函数, 这就是

$$(f*\Delta_n)(x)=n\int_{x-1/2n}^{x+1/2n}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

也就是函数 f 在区间 $[x-1/2n,x+1/2n]$ 上的积分平均值. 容易直接证明: 若 f 于点 x 连续, 则有

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{x-1/2n}^{x+1/2n}f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

实际上这是下列命题的特例.

命题 16.3.3 设 f 是在 $\mathbf{R}$ 上定义而在某个区间 $[-a,a]$ 外恒等于 0 的连续函数, Δ_n 是某个核函数, 则对于每个 x 成立

$$\lim_{n\to\infty}(f*\Delta_n)(x)=f(x),$$

而且这个收敛过程在区间 $[-a,a]$ 上是一致的.

证 根据条件可知 f 与 Δ_n 的卷积存在. 为方便起见记 $f*\Delta_n=f_n$. 利用核函数定义中的条件 2, 只需估计下列积分:

$$f_n(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x-u)-f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 在区间 $[-a-1,a+1]$ 上利用 f 的一致连续性, 存在 $0<\delta<1$, 使得当 $x,x'\in[-a-1,a+1]$, $|x-x'|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 又设 $|f(x)|<M\ \forall x\in\mathbf{R}$. 于是从核函数条件 1 和 3 有

$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}[f(x-u)-f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant 2M\left|\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right|=o(1),$$

且与 x 无关. 因此存在 N, 使得当 $n>N$ 时左边的值小于 ε.

对于在区间 $[-\delta,\delta]$ 上的估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(x-u)-f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right|&\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-u)-f(x)|\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\\&\leqslant\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

注意这个估计对于 $x\in[-a,a]$ 一致. 于是当 $n>N$ 时就在 $[-a,a]$ 上一致成立所要的估计式:

$$|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon.\quad\square$$

注 1 若取 $a=1/2$, Δ_n为 Landau 的核函数, 则 $f_n(x)$是次数不超过 $2n$ 的多项式, 因此我们就已经对于命题中的连续函数证明了 Weierstrass 第一逼近定理, 即命题 16.3.1. 为了推广到定义在一般区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 则可以将 f 先线性延拓到 $[a-1,b+1]$, 使得 $f(a-1)=f(b+1)=0$, 然后作线性变换使区间

$[a-1,b+1]$ 映射为某个区间 $[-c,c]$ $(c>0)$, 这时 $f(-c)=f(c)=0$, 然后在该区间之外将 f 作恒等于 0 的延拓.

注 2 Landau 证明在教科书中出现很多, 例如可以参看 [36, 54] 的不同论述.

16.3.2 Bernstein 证明的概率解释

目前许多教材往往采取 Bernstein 的方法来证明 Weierstrass 逼近定理. 这个证明无疑具有一系列优点, 例如: 除了 Cantor 的一致连续性定理之外, 可以不用微积分工具, 又能给出逼近多项式的显式表达式等等. 但是初学者往往难以明白它的思想从何而来. 因为 Bernstein 是从概率论出发得到这个证明的 (1912). 下面我们不重复在许多教科书中关于 Bernstein 证明的细节, 而是致力于用通俗的语言来阐明它的概率意义. 希望这些解释会对于初学者有点启发作用.

首先, 将证明的主要过程列出如下.

对于区间 $[0,1]$ 上的连续函数 f 写出 Bernstein 多项式

$$B_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{16.16}$$

这里可以将 B_n 看成是带有参数 n 的算子, 它作用于 f 就得到一个多项式 $B_n(f)$.

利用恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=1, \tag{16.17}$$

就可以用拟合法得到:

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}.$$

利用 f 在 $[0,1]$ 上一致连续, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,x'\in[0,1]$, 且 $|x-x'|<\delta$ 时成立 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 然后将上面的和式按照 $|x-i/n|<\delta$ 和 $|x-i/n|\geqslant\delta$ 分拆, 即有

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right|\leqslant\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\right|+\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|\geqslant\delta}\right|.$$

对于第一个和式利用一致连续性和 (16.17) 估计如下:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right|\\&\leqslant\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

对第二个和式则需要用一个恒等式:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}-x\right)^2x^i(1-x)^{n-i}=\frac{x(1-x)}{n}, \tag{16.18}$$

又假设 $|f(x)| \leqslant M \ \forall x \in [-1,1]$, 然后就不难证明存在 N (这里的细节见收有这个证明的教科书), 使得当 $n > N$ 时第二个和式的绝对值也小于 ε. 从而就在 $n > N$ 时得到所要的估计:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| < 2\varepsilon.$$

现在我们从概率角度来解释以上过程. 其中的有关知识可以在概率论的教科书中找到 (例如 [20]). 这里所用的概率模型是 Bernoulli 的独立试验序列概型. 其中设事件 A 的概率为 $x \in [0,1]$, 每一次试验只有两种结果, 即 A 出现, 或者 A 不出现. 假设作 n 次独立试验, 于是其中事件 A 出现 i 次的概率就是

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \tag{16.19}$$

这里的组合数 $\binom{n}{i}$ 是在 n 次试验中事件 A 出现 i 次的可能情况的个数. 例如, 在前 i 次接连出现 A 但以后就再不出现 A 就是其中的可能情况之一.

这样就可以理解恒等式 (16.17) 是什么意思了. 它简单地就是事件 A 在 n 次试验中出现 0 次, 1 次, 直到出现 n 次的概率之和, 当然就等于 1.

下面的问题就是在估计 (16.16) 时为什么要将和式作分拆? 又为什么要根据 $|x - i/n| < \delta$ 和 $|x - i/n| \geqslant \delta$ 来分拆? 为此最好要观察概率 (16.19) 作为 i 的函数的变化规律. 在图 16.1 中取定 $x = 0.2$ 后对于 $n = 20$ 与 $n = 100$ 的两种情况作出了示意图.

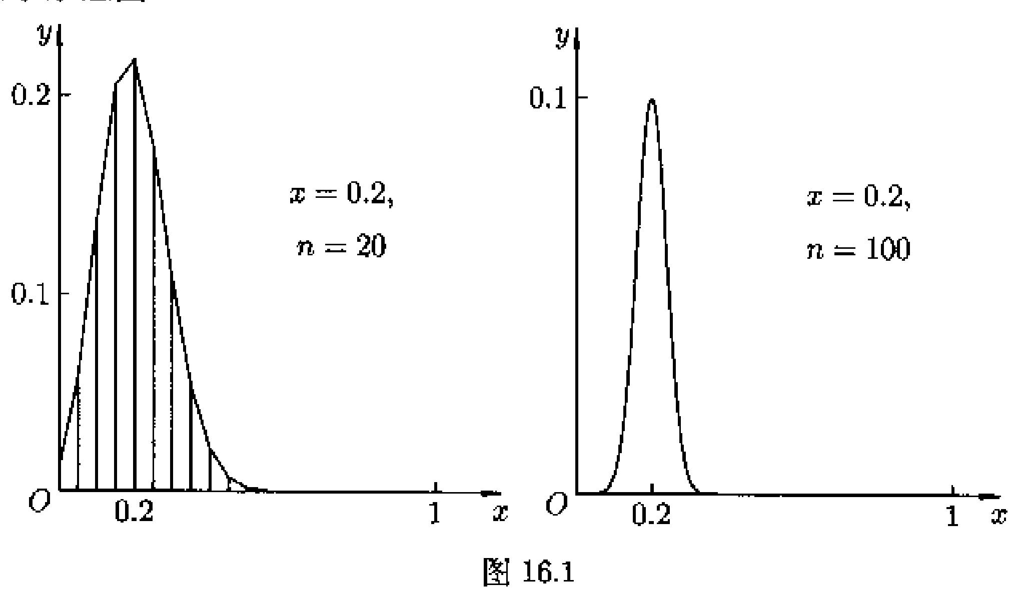


图 16.1

从图上可以看出, 将点 $(i/n, B_i^n(0.2))$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 相联得到的是一条单峰曲线, 它的最大值差不多就是 i/n 与 $x = 0.2$ 最接近的地方. 这一点从概率角度是很直观的事实. 我们往往称 i/n 为频率. 由于事件 A 出现的概率是 $x = 0.2$, 平时我们就说成每 5 次独立试验时事件 A 出现 1 次. 这当然不可能是完全准确的预言. 但是当试验次数 n 越来越大时, 频率应当接近 $x = 0.2$. 这个直观的猜测在概率论中有理论上的证明, 这里从略.

对比图 16.1 的两种情况, 可以看出当 n 从 $n=20$ 增加到 $n=100$ 时, 峰变得越来越窄. 这就是说当 n 变大时, 频率 i/n 越来越向概率值 $x=0.2$ 靠拢. 这种现象在概率论中也有专门讨论.

此外, 还要注意恒等式 (16.18) 的概率意义是度量频率偏离概率的程度, 在概率论中称为**方差**. 这个恒等式可以用微分法或组合计算得到. 其右边的表达式表明当 n 增大时方差是如何降低的.

最后, 将和式 (16.16) 分拆的处理表明, 在和式中第一个和式是提供接近 $f(x)$ 的主要部分, 原因就在于图 16.1 中的单峰现象. 而第二个和式则依赖于 (16.18) 来解决.

注 1 虽然 Bernstein 证明有着自己的特点, 但从本质上说仍然可以归纳入核函数方法之内. 只不过代替卷积是离散的和式 (16.16). 核函数定义中的三个条件在这里都是满足的.

注 2 关于 Bernstein 多项式在逼近理论中的地位, 以及由于 Bézier 方法的出现而得到新的发展等可以参看数学分析教材 [8] 的第一册第 5 章. 此外, 对 Weierstrass 逼近定理的 Bernstein 证明并不一定要从概率角度来理解. Korovkin 的证明 (1953) 完全从函数论出发, 可以参考教材 [9].

16.3.3 逼近定理的一个初等证明

这里所说的初等证明是指不必使用微积分工具, 同时其思路也比较简单.

这类证明已有多个. 这里介绍的是由 H. Cohen 给出的证明, 见 Archiv der Mathematik, 15 卷 (1964) 316~317 页 (参见 [52]).

第一步是对于一个多项式序列的分析.

命题 16.3.4 对于任意正数 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 多项式序列 $Q_n(x)=(1-x^n)^{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,\delta]$ 和 $[1-\delta,1]$ 上分别一致收敛于 1 和 0.

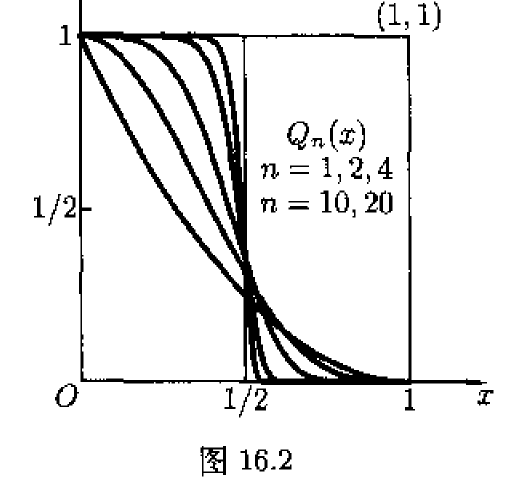


图 16.2

证 在图 16.2 上作出了 $n=1,2,4,10,20$ 的 $Q_n(x)$ 的图像. 容易证明

$$\lim_{n\to\infty}Q_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0.368.$$

以下的主要工具是 Bernoulli 不等式 (证明见上册第 3 页):

当 $h>-1,\ n\in\mathbf{N}_+$ 时, 有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

容易看出 $Q_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上严格单调减少. 在区间 $[0,\delta]$ 上

$$1 \geqslant Q_n(x) \geqslant Q_n(\delta) = (1-\delta^n)^{2^n} \geqslant 1 - 2^n\delta^n = 1-(2\delta)^n \to 1.$$

又记 $\eta = 1-\delta > 1/2$, 则在区间 $[\eta, 1]$ 上, 有 $0 \leqslant Q_n(x) \leqslant Q_n(\eta)$, 且有

$$\frac{1}{Q_n(\eta)} = \left(\frac{1}{1-\eta^n}\right)^{2^n} = \left(1+\frac{\eta^n}{1-\eta^n}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \frac{2^n\eta^n}{1-\eta^n} > (2\eta)^n \to +\infty.$$

可见结论成立. □

作为上述命题的推论就可以得到

命题 16.3.5 令 $P_n(x) = Q_n((1-x)/2)$, $n=1,2,\cdots$, 则对于任意正数 $\delta \in (0,1)$, 多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $0 < \delta \leqslant |x| \leqslant 1$ 上一致收敛于单位跳跃函数 (即 Heaviside 函数)

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

第一逼近定理的证明 设 $f \in C[0,1]$, 且不妨设 $f(0)=0$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 利用 (§5.4 节的) Cantor 定理知, 存在阶梯函数

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k H(x-x_k),$$

其中 $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$, 使得在区间 $[0,1]$ 上 $|f(x)-T(x)| < \varepsilon/3$ 成立, 且 $|s_k| < \varepsilon/3$, $k=1,\cdots,n$.

现在取 $\delta > 0$ 充分小, 使得所有区间 $(x_k-\delta, x_k+\delta)$ $(k=1,\cdots,n)$ 均不相交. 然后对于这个 $\delta > 0$, 根据命题 16.3.5, 存在充分大的 n, 使得成立

$$|P_n(x) - H(x)| < \frac{\varepsilon}{3s}\ \forall 0 < \delta \leqslant |x| \leqslant 1,$$

其中 $s = \sum\limits_{k=1}^{n} |s_k|$. 此外还要注意 $P_n(x)$ 的取值范围必在 0 和 1 之间.

现在构造多项式

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k P_n(x-x_k),$$

则当 x 属于某个区间 $(x_i-\delta, x_i+\delta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时, 就有

$$\begin{aligned} |T(x)-P(x)| &\leqslant \sum_{k\neq i} |s_k||H(x-x_k) - P_n(x-x_k)| + |s_i||H(x-x_i)-P_n(x-x_i)| \\ &< s\cdot\frac{\varepsilon}{3s} + |s_i|\cdot 1 < \frac{2\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

而当 x 不属于任何 $(x_k-\delta, x_k+\delta)$ $(k=1,\cdots,n)$ 时, 则上述不等式右边只有一项, 估计更为简单, 即小于 $\varepsilon/3$.

因此就得到

$$|f(x)-P(x)| \leqslant |f(x)-T(x)| + |T(x)-P(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

16.3.4 逼近定理的其他证明

Weierstrass 逼近定理的证法很多, 在这里我们将浏览一下其他证明.

首先需要指出两个逼近定理是等价的, 即从其中之一可以推出另一个成立. 有兴趣的读者可以参考 [1, 35, 46] 等著作中关于等价性的证明. 这里从略.

在第十五章已经用两种方法证明了命题 16.3.2, 即第二逼近定理. 第一种方法是用 Fejér 核 (见命题 15.2.4 的注 2), 第二种方法是用 Fourier 级数的一致收敛定理 (见命题 15.2.7 的注). 此外, 还有在该章参考题 19 中的 de la Vallée Poussin 的证明, 它也是一种核方法 (参见 [43] 卷 2).

此外, 虽然我们在前面强调了核函数方法的价值, 但是从上一小节的证明已经知道, 逼近定理有不用核函数方法的初等证明.

对于第一逼近定理, 这里较为常见的不用核函数的方法是由 Lebesgue 给出的. 其基本思路非常直观. 先用分段线性函数来逼近连续函数, 然后证明可以将分段线性函数用函数 $f(x)=|x|$ 的平移和 x 的线性组合得到. 从而最后问题归结为证明在任意区间 $[a,b]$ 上存在多项式一致逼近 $y=|x|$. 这里我们见到的至少有三种方法. 第一种方法是利用在命题 14.1.9 介绍的 Visser 定理, 它利用迭代方法得到了在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$ 的多项式序列, 而无需微积分工具. 第二种是在 $(1+x)^{1/2}$ 的 Maclaurin 展开式中将 x 用 x^2-1 代替得到所要的多项式级数展开式. 读者可以在 [31, 34, 46] 找到详细的证明过程. 第三种方法是先证明函数列

$$f_n(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t},\ n=1,2,\cdots \tag{16.20}$$

对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 在区间 $[-1,-\varepsilon]$ 上和 $[\varepsilon,1]$ 上一致收敛于 $\operatorname{sgn}x$ ①, 然后不难证明函数列

$$g_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots$$

在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$ (参见 [7]).

最后还应当指出, Weierstrass 逼近定理有许多推广. Weierstrass 本人已经得到高维空间的逼近定理. 最有意义的推广是 Stone-Weierstrass 定理, 它包含了许多逼近定理为其特例, 已经成为现代分析的理论支柱之一. 读者可以参考在 [15, 46] 中的证明, 其中后者给出了 Weierstrass 逼近定理的 Stone 证明, 它可以几乎不加修改地用于证明 Stone 定理.

① 这里关于 (16.20) 的结论实际上等价于命题 16.3.5, 因此可以按照上一小节的证明做下去.

16.3.5 逼近定理的应用举例

在举具体例题前需要指出 Weierstrass 逼近定理对于一些基本问题的启示.

首先, 在闭区间上的每个连续函数都有用多项式级数或者三角多项式级数的解析表达式, 而不需要任何其他条件. 因此连续函数与我们过去已经熟悉的可以展开为幂级数的许多初等函数具有共同点: 即都可以展开为函数项级数, 而且不需要增加其他条件.

有了逼近定理, 又可以将连续函数与能够展开为幂级数的函数非常清楚地区分开来. 我们已经知道, 要将一个函数展开为幂级数, 至少要求该函数无限次可导, 而且这还不是充分的. 一般称这类函数为**实解析函数**.

如何求出逼近定理中的逼近多项式或三角多项式当然是很重要的问题. 这是函数逼近论的研究课题. Weierstrass 逼近定理就是逼近论的最重要的起点.

下面只是逼近定理在数学分析中的几个应用, 希望起到抛砖引玉的作用.

例题 16.3.1 (Lebesgue) 证明: 区间上的连续函数必有原函数.

证 设 $f \in C[a,b]$, 则根据逼近定理知, 存在多项式序列 $\{P_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

对每个多项式 P_n, 存在多项式 Q_n, 使得在 $[a,b]$ 上满足 $Q_n' = P_n$. 同时总可以令 $Q_n(a) = 0$ 成立. 这样就得到多项式序列 $\{Q_n\}$.

以下分两步, 先证明 $\{Q_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 然后证明其极限函数的导函数就是 f.

(1) 根据 $\{P_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛, 由 Cauchy 一致收敛准则 (的必要性) 知道, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于每个 $n \geqslant N$ 和正整数 p, 对每个 $x \in [a,b]$ 同时成立

$$|P_{n+p}(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{16.21}$$

于是可以在区间 $[a,x]$ 上用 Lagrange 微分中值定理得到

$$\begin{aligned}|Q_{n+p}(x) - Q_n(x)| &= |(Q_{n+p}(x) - Q_n(x)) - (Q_{n+p}(a) - Q_n(a))| \\ &= |P_{n+p}(\xi) - P_n(\xi)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

由于这对于所有 $n \geqslant N$ 和正整数 p 以及所有 $x \in [a,b]$ 都成立, 再次使用 Cauchy 一致收敛准则 (的充分性), 就知道 $\{Q_n\}$ 于 $[a,b]$ 一致收敛. 记其极限函数为 F. 它满足条件 $F(a) = 0$.

(2) 为了建立 $F' = f$, 只需对于任意点 $x_0 \in [a,b]$ 和任意给定的 $\varepsilon > 0$, 证明存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |h| < \delta$ 时, 成立关于差商的不等式

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < 3\varepsilon. \tag{16.22}$$

这里当然假设 $x_0 + h \in [a,b]$.

利用三分法可以将 (16.22) 的左边分拆成

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| \leqslant \left|\frac{Q_n(x_0+h)-Q_n(x_0)}{h}-P_n(x_0)\right|$$
$$+|f(x_0)-P_n(x_0)|+\left|\frac{F(x_0+h)-Q_n(x_0+h)-F(x_0)+Q_n(x_0)}{h}\right|, \quad (16.23)$$

首先, 对于 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时有 $|f(x_0)-P_n(x_0)|<\varepsilon$. 又不妨 N 已经足够大, 使得对于 $n\geqslant N$, 每个正整数 p 和每个 $x\in[a,b]$ 不等式 (16.21) 也已经成立. 然后在 (16.23) 右边取定 $n=N$.

对固定的 $n=N$, 对于 (16.23) 右边的第一项用微分中值定理得到

$$\left|\frac{Q_N(x_0+h)-Q_N(x_0)}{h}-P_N(x_0)\right|=|P_N(x_0+\theta h)-P_N(x_0)|,$$

其中 $0<\theta<1$. 利用 $P_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|h|<\delta$ 时, 上式右边小于 $\varepsilon/3$.

为估计 (16.23) 右边的第三项, 先对下列不等式的分子用微分中值定理, 得到

$$\left|\frac{Q_{N+p}(x_0+h)-Q_N(x_0+h)-Q_{N+p}(x_0)+Q_N(x_0)}{h}\right|$$
$$\leqslant |P_{N+p}(x+\theta h)-P_N(x+\theta h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中 p 为任意正整数, $0<\theta<1$, 并利用在 $[a,b]$ 一致成立的不等式 (16.21). 最后, 在上式左边令 $p\to\infty$, 就知道 (16.23) 右边第三项不超过 ε, 因此所求证的不等式 (16.22) 成立. □

注 这个证明的意义在于, 连续函数的原函数的存在性完全不需要定积分概念就可以建立. 以上证明是依据 [31] 中的叙述作了改写. (参见按照传统思路安排下的命题 10.3.3.)

在 Fourier 级数的收敛性理论中最重要的工具是 Riemann 引理 (见例题 10.2.6). 由于在教科书中均有该引理的证明, 因此本书在前面对它未作证明. 下面是用 Weierstrass 逼近定理的一个证明.

例题 16.3.2 (Riemann 引理) 设 $f\in R[a,b]$, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

证 只证第一个即可. 对于可积函数 f 与任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g\in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

(见 10.5.2 小节第一组参考题 5).

根据逼近定理, 对于 g 存在于 $[a,b]$ 上一致逼近 g 的多项式 P, 满足

$$\int_a^b |g(x) - P(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此就有

$$\int_a^b |f(x) - P(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - P(x)| \, \mathrm{d}x < 2\varepsilon.$$

然后从

$$\left|\int_a^b f(x) \sin px \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x) - P(x)] \sin px \, \mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b P(x) \sin px \, \mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - P(x)| \, \mathrm{d}x + \left|\int_a^b P(x) \sin px \, \mathrm{d}x\right|$$

可见，只需要对于多项式证明引理的结论就够了，然而对于连续可微函数的 Riemann 引理的证明特别容易，只需要用分部积分法即可，以下从略. □

16.3.6 练习题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义，且对每个 $\varepsilon > 0$，存在多项式 P，使得满足条件 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon \; \forall x \in [a,b]$，证明：$f \in C[a,b]$.
2. 设 $f \in C[a,b]$，证明：
   (1) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为一致收敛的多项式级数，且在级数中除第一项之外均为在 $[a,b]$ 上非负的多项式.
   (2) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为绝对一致收敛的多项式级数；
   (3) 对于任意给定的收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，其中有无限多项大于 0，存在于区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 的多项式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$，使满足条件 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |P_n(x)| < a_n \; \forall n = 1, 2, \cdots$.
3. 设 $f \in R[a,b]$，则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在两个多项式 $p(x)$ 和 $P(x)$，使得满足条件：(1) $p(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x) \; \forall x \in [a,b]$; (2) $\displaystyle\int_a^b [P(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x < \varepsilon$.
4. 设 $f \in C[a,b]$，且对每个非负整数 n 满足条件 $\displaystyle\int_a^b x^n f(x) \, \mathrm{d}x = 0$，证明 f 为恒等于 0 的常值函数. 又，若条件改为对于大于某个正整数 n_0 的所有 n 成立，则也有相同结论.
5. (1) 设 $f \in C[-1,1]$，且对每个非负整数 n 满足条件 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$，则 f 必为奇函数.
   (2) 设 $f \in C[-1,1]$，且对每个非负整数 n 满足条件 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$，则 f 必为偶函数.

6. 设 $f \in C[0,1]$, 证明: 存在奇次多项式序列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f 的充分必要条件为 $f(0)=0$.
7. 设 $f \in R[a,b]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明 f 在每个连续点上等于 0.
8. 设函数 f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 本身必是多项式. (这断定了 Weierstrass 定理不可能不作改变而推广到无限区间上去.)

§16.4 用级数构造函数

无穷级数不仅是研究函数的工具, 而且可以用于构造出具有各种特殊性质的函数, 其中有不少例子在数学发展史上起了重要的作用.

这里应当指出, 认为这些 "病态" 函数只是用作反例而没有其他意义的观点早已过时. 与 §5.6 节介绍的**混沌**几乎同时发展起来的另一个新的非线性科学领域是 "**分形**" (fractal), 其中的主要角色就是包括本节内容在内的各种 "怪物". 对此有兴趣的读者可以参考 [32, 21].

16.4.1 处处连续处处不可微的函数

在很长时间中人们对于连续性与可微性之间的关系不清楚, 许多人猜测连续函数只会在个别点或很少的点上不可微. 由于举出了处处连续处处不可微函数的例子, 这个问题得到了彻底解决.

这类例子最早出现在 Bolzano 的 1830 年的手稿中, 但只有曲线, 并无解析表达式, 也没有证明 (见 [16]). 正式发表的并有严格证明的第一个例子则属于 Weierstrass (1872 年) (可参考 [16, 26, 29] 等).

Weierstrass 函数是一个缺项 Fourier 级数:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n \pi x),$$

其中 b 为奇数, $0 < a < 1$, 且 $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. 由于右边的级数一致收敛, 因此函数 F 的连续性是明显的. 关于 F 处处不可微的证明可以在 [50, 29] 中找到.

目前教科书中在介绍处处连续处处不可微函数时一般均用 van der Waerden 于 1930 年提出的例子. 它在几何上相当直观, 证明也比较简单. 下面的证明可能比 [19] 卷 2 第 416 小节更简单一些. 主要是用关于差商的一个简单命题[①]: 若

① 证明是简单的, 用上册 159 页的有限增量公式 (6.1) 即可. 当然这里要求对每个 n 成立 $b_n - a_n > 0$. 又参见上册 189 页.

函数 f 于点 x_0 可导, 且 $\{[a_n,b_n]\}$ 是以点 x_0 为惟一公共点的闭区间套, 则就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0). \tag{16.24}$$

与 Weierstrass 函数类似, van der Waerden 函数是用无穷级数来构造的. 现在按照下列步骤定义这个无穷级数的通项 $\{f_n\}$:

1. 将区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 按周期 2 延拓成为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期连续函数, 仍记为 f.

2. 以 f 为模板构造函数列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n}f(2^nx),\ n=1,2,\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty). \tag{16.25}$$

可以看出 f_n 为周期 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 的连续周期函数, 且有 $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n}$. 还可看出 f_n 的极值点等距分布, 相邻极值点之间的距离也是 $\frac{1}{2^n}$.

3. 重要的是 f_n 与 f_{n+1} 之间有如下的关系:

 (1) f_n 的极值点必是 f_{n+1} 的零点,

 (2) f_{n+1} 的任意两个相邻极值点必落在 f_n 为线性的一个子区间内.

4. 对任意自然数 n, 设 a_n, b_n 为 f_n 的任意两个相邻的极值点, 则

 (1) $k>n$ 时, 由 3.(1) 知 a_n, b_n 为 f_k 的零点, 因此

$$\frac{f_k(a_n)-f_k(b_n)}{a_n-b_n}=0. \tag{16.26}$$

 (2) $k\leqslant n$ 时, 由 3.(2) 知

$$\frac{f_k(a_n)-f_k(b_n)}{a_n-b_n}=1\ 或\ -1. \tag{16.27}$$

以上关于 $\{f_n\}$ 的性质非常直观, 读者可以对照图 16.3(a) 中对于 f_1, f_2, f_3 在 $[0,1]$ 的曲线来理解这些性质

现在定义 van der Waerden 函数如下:

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\ x\in(-\infty,+\infty). \tag{16.28}$$

从 $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 可知 (16.28) 右边的函数项级数一致收敛, 因此和函数 $W(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续. 最后, 我们来证明:

命题 16.4.1 连续函数 W 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可导.

证 对任意指定的点 x_0, 由 (16.24) 可知, 只要能找到以 x_0 为惟一公共点的闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 使得极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W(b_n)-W(a_n)}{b_n-a_n}$$

不存在即可.

利用 f_n 的极值点等距分布, 且相邻极值点的距离为 $1/2^n$, 取 a_n 和 b_n 为 f_n 的两个极值点, 满足条件: (1) $a_n\leqslant x_0\leqslant b_n$, (2) $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}$.

记 $d_n = \dfrac{W(b_n) - W(a_n)}{b_n - a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$d_n = \frac{1}{b_n - a_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(b_n) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a_n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(b_n) - f_k(a_n)}{b_n - a_n}.$$

由式 (16.26) 知上式右边和式中的项当 $k > n$ 时均为 0, 因此有

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(b_n) - f_k(a_n)}{b_n - a_n}.$$

由式 (16.27) 知上式右边和式的每一项为 -1 或 1. 因此当 n 为偶数时 d_n 为偶整数, 而当 n 为奇数时 d_n 为奇整数. 由此可见这样的数列 $\{d_n\}$ 一定发散, 而函数 W 在点 x_0 不可导. □

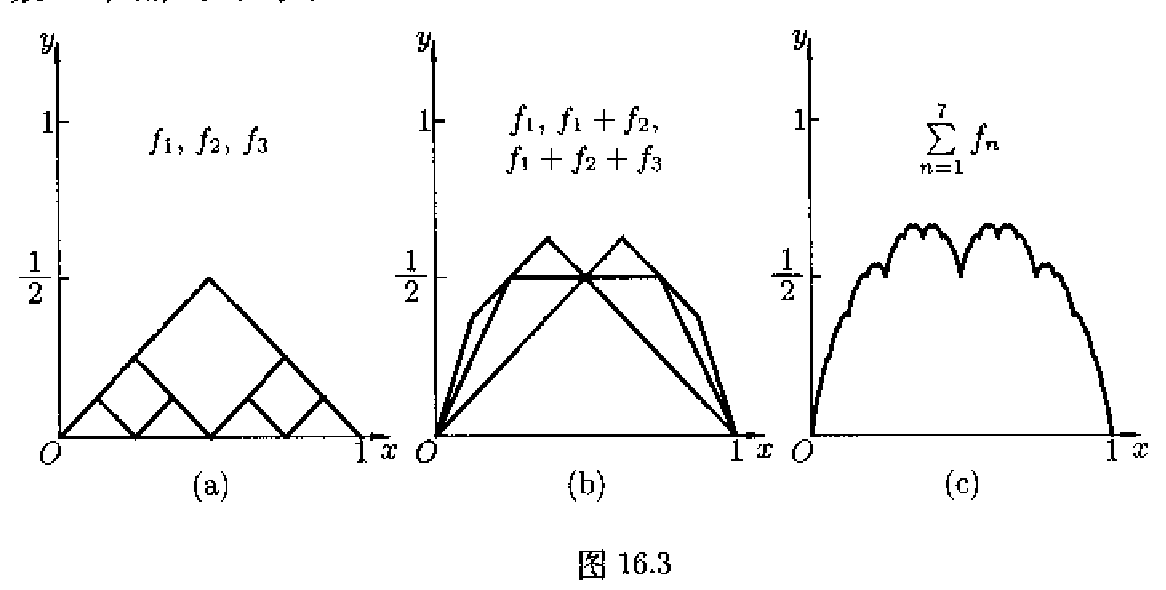


图 16.3

注 1 在图 16.3(b),(c) 中分别作出了 (16.28) 右边级数的前 3 个和第 7 个部分和函数. 读者可以结合证明来理解 van der Waerden 函数处处不可导的直观原因. 在 [19] 等著作中一般是证明两个单侧导数都不存在, 讨论比这里要更细致一点. 此外, 在定义 f_n 的公式 (16.25) 中的比例因子 2^n 改为 4^n 或 10^n 都是可以的. 在 [16] 中的证明则完全不依赖于几何直观, 也可供参考.

注 2 这方面的工作很多, 较近的发展见美国数学月刊 109 卷(2002) 378~380 页上的一文及其中的文献.

16.4.2 填满正方形的连续曲线

Cantor 首先证明: 直线上的所有点全体和平面上的所有点全体之间存在一一对应. 同样在区间 $[0, 1]$ 内的所有点全体和单位正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 内的所有点全体之间也存在一一对应.

填满正方形的连续曲线就是将区间 $[0, 1]$ 连续映射到单位正方形的满射. Peano 在 1890 年第一次构造出了这样的例子. 此后人们经常将这类曲线称为

Peano 曲线. 它使我们对于如何合理定义曲线的概念起了重要的推动作用 (参见 [5, 31]). 这里要注意, Peano 曲线一定有自交点. 这是因为在 $[0,1]$ 和 $[0,1;0,1]$ 之间的一一映射不可能是连续的.

下面这个例子是 1938 年由 Schoenberg 作出的. 显然, 这样的曲线需要用参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ x \in [0,1]$$

来表示. 定义

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/3], \\ 3t - 1, & t \in (1/3, 2/3], \\ 1, & t \in (2/3, 1]. \end{cases}$$

按照

$$\varphi(t) = \varphi(-t),\ \varphi(t+2) = \varphi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$$

将 $\varphi(t)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 再令

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-2}t)}{2^n},\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-1}t)}{2^n},\ t \in [0,1].$$

这就是所要作的曲线. 将正方形 $[0,1;0,1]$ 中每个点的座标 (x,y) 用二进制展开就不难证明存在 $t \in [0,1]$, 使得 $x(t) = x$, $y(t) = y$ (可以参看 [8, 16] 等).

§16.5 对于教学的建议

16.5.1 学习要点

本章只是对于前三章的补充, 在教学中可根据情况选用.

1. 在许多积分计算中无穷级数经常有用, 它在求出有限形式答案和近似计算方面都是不可缺少的手段. 这里的问题已经与含参积分有关, 但其中的参数只是离散的正整数.
2. 级数求和有很多内容, §16.2 列出的都是常用方法. 关于幂级数求和的材料见 14.3.3 小节的例题, 这里不再叙述.
3. Weierstrass 逼近定理在教科书中都有, 但一般只举出一种证法. §16.3 对此给出一个综述, 同时还对其应用举例.
4. 利用无穷级数构造具有特殊性质的函数是个经典问题. 这方面可用下面的几个参考题进行训练.

16.5.2 参考题

I. 求下列级数之和:

(1) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}+\cdots$.

2. 求 Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 之和.

3. 证明: $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{\pi^2}{8}$.

4. (Goldbach) 设 q 取遍所有大于 1 的正整数的乘幂, 且其指数均大于 1, 证明: $\sum\limits_{q}\frac{1}{q-1}=1$.

5. 设 $a_1=2$, $a_2=8$, $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$, $n=3,4,5,\cdots$, 证明:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot} a_n^2=\frac{\pi}{12}.$$

6. 证明: $\pi=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}$.

7. 设 $\{g_n\}$ 是 $[0,1]$ 上非负连续函数列, 且对每个 x^k $(k=0,1,\cdots)$ 存在极限
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^k g_n(x)\,\mathrm{d}x,$$
证明: 对任意的 $f\in C[0,1]$, 存在极限
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C[a,b]$, 证明: $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

9. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C^1[0,1]$ 且 $g'(x)>0$, 证明: 复合函数 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上有原函数.

10. 题 8 中 f 有界的条件不可去掉 (见 [59] 的第二册 340 页). 在 $[0,1]$ 上定义
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
验证它们满足题 8 中除 f 有界的所有条件, 但 $f\cdot g$ 在 $[0,1]$ 上无原函数.

11. 设函数 f 在有界开区间 (a,b) 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 必在 (a,b) 上一致连续.

12. 设 $f\in C[1,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得
$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon,\ x\in[1,+\infty).$$

13. 设 $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得
$$\left|f(x)-P\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\right|<\varepsilon,\ x\in(0,+\infty).$$

14. (处处连续处处不可导的函数) 将 $(0,1)$ 中的数 x 按照十进制小数展开为 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{10^k}$, 其中 x_k 为 0 到 9 的个位数字. 对于 x 有两种十进制表示的情况, 约定取从某位后全为 0 的一种表示. 定义函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k},$$

其中 $u_1=1$, 而当 $k\geqslant 1$ 时

$$u_{k+1}=\begin{cases}u_k, & \text{若 } x_{k+1}=x_k,\\ 1-u_k, & \text{若 } x_{k+1}\neq x_k.\end{cases}$$

证明: f 于 $(0,1)$ 中处处连续, 但处处不可微.

(本例见美国数学月刊 59 卷 (1952) 222～225 页, 又见 [29].)

15. 设对每个正整数 n, u_n 是区间 $[0,1]$ 上的非负单调增加函数且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)$ 收敛. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 则 S 的不连续点集等于所有 u_n的不连续点集之并.

16. (有稠密间断点的单调函数) 设数列 $\{x_n\}$ 是 $(0,1)$ 上的有理数全体, 又任取一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中要求每个 $a_n>0$. 然后对每个正整数 n 定义

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_n,\\ a_n, & x_n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

然后定义 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x), 0<x<1$, 并补充定义 $f(0)=-1$, $f(1)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 证明: f 是在 $[0,1]$ 上以所有有理点为其间断点的单调函数.

17. (有稠密间断点的导函数) 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\end{cases}$$

的导函数以 $x=0$ 点为其 (第二类)间断点 (见上册 164 页). 设 $\{r_n\}$ 为区间 $(0,1)$ 上的所有有理点, 构造在区间 $(0,1)$ 上的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n},$$

将其和函数记为 F, 用逐项微分定理求出导函数 F', 并证明: F' 在 $(0,1)$ 中以每个 r_n 为其第二类间断点, 而在其他点上连续.

第十七章 高维空间中的点集与基本定理

本章的内容是 $\mathbf{R}$ 中的点集与实数基本定理在 $\mathbf{R}^n$ 中的推广，这是研究多元函数的基础. 在 §17.1 节依照位置关系与密切程度进行点和集合的分类，并讨论其基本性质. §17.2 节是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本定理. 最后一节是学习要点和参考题.

§17.1 点与点集的定义及其基本性质

17.1.1 点的分类及其性质

1. **内点、外点、边界点** 先回忆一下 $\mathbf{R}^n$ 中的距离与邻域的定义. 我们知道 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的 **Euclid 范数** (又称**模**) $|\boldsymbol{x}|$ 定义为 $|\boldsymbol{x}|=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$. 由此可引进 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的 **Euclid 距离**为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}.$$

与距离有关的最重要的不等式是三角不等式 (参见上册第 6 页):

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|.$$

和 $\mathbf{R}$ 中的邻域定义相仿，可通过距离定义 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域. 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $\delta>0$, 称

$$O_\delta(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\ \big|\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta\}$$

是点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**，也称其为以点 $\boldsymbol{a}$ 为中心，以 δ 为半径的 n 维开球.

在 $\mathbf{R}^n$ 中给定一个集合 S, 按照点与集合 S 的位置关系可将 $\mathbf{R}^n$ 中的点分为三类: S 的内点、外点、边界点. 具体地说，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的某一点 $\boldsymbol{x}$, 若存在它的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\subset S$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**内点**; 若存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**外点**; 若在 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域中既有属于 S 的点，又有不属于 S 的点，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**边界点**.

S 的全体内点组成的集合称为 S 的**内部**，记为 $\mathrm{int}S$ 或 S°.

S 的全体边界点组成的集合称为 S 的**边界**，记为 ∂S.

2. **聚点** 上述分类是按照任一点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的邻域内的点是否属于 S 来进行的. 如果按照去心邻域进行分类，则可将 $\mathbf{R}^n$ 中的点分为 S 的聚点与非聚点两大类. 确切地说，对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 如果在 $\boldsymbol{x}$ 的任一去心邻域中总有 S 的点，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**聚点**. S 的全体聚点组成的集合记为 S^d, 称为 S 的**导集**. 显然内点一定是聚点，外点一定不是聚点.

如果 $\boldsymbol{x}\in S$, 且存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\{\boldsymbol{x}\}$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**孤立点**. 孤立点一定不是聚点，而边界点有可能是聚点也有可能是孤立点.

聚点是一个重要概念，它的下述两个等价定义是经常要用到的.

定义 (1) 设点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，如果在它的任何邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 内总会有 S 中的无穷多个点，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的一个聚点.

定义 (2) 设点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，如果存在由相异点组成的一个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset S$，$\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 使得 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的一个聚点，这里 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ 的含义是 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) \to 0$.

例题 17.1.1 证明集合 S 的导集的聚点是 S 的聚点，即 $(S^d)^d \subset S^d$.

证 设 $\boldsymbol{x} \in (S^d)^d$，则 $\exists S$ 的相异聚点 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$，且 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. 从而 $\forall \delta > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$\boldsymbol{x}_n \in O_\delta(\boldsymbol{x})$. 设 $n_0 > N$，由于 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 为 S 的聚点，于是在 $O_{\delta-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n_0}|}(\boldsymbol{x}_{n_0})$ 中含有无穷多个 S 中异于 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 的点. 显然 $O_{\delta-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n_0}|}(\boldsymbol{x}_{n_0}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$，所以 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有无穷多个异于 $\boldsymbol{x}$ 的 S 中的点，由等价定义 (1) 知 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的聚点. □

17.1.2 集合的分类及其性质

1. **开集、闭集** 如果 $\mathrm{int}S = S$，则称 S 为**开集**. 开集有如下重要性质：

(1) 任意多个开集的并集是开集；

(2) 有限多个开集的交集是开集；

(3) 全空间 $\mathbf{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 都是开集.

开集的余集定义为**闭集**. 又定义 S 的**闭包** $\overline{S}$ 为 $\overline{S} = S \cup S^d$. 易证 $\overline{S}$ 为闭集，且 $\overline{S} = S \cup \partial S$. 关于闭集，下列条件等价：

(1) S 是闭集；

(2) $S^d \subset S$ (即 $S = \overline{S}$)；

(3) $\partial S \subset S$ (即 $S = \overline{S}$).

例题 17.1.2 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合，则 ∂S 为闭集.

证 1 (按定义证) 设 $\boldsymbol{x} \in (\partial S)^c$，即 ∂S 的余集，则 $\boldsymbol{x}$ 只能是 S 的内点或外点.

若 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}S$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S$，由内点定义知 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset \mathrm{int}S$，从而 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset (\partial S)^c$；

若 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的外点，则 $\exists \delta > 0$，使得 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap S = \varnothing$，因此 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S^c$，而 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 本身是开集，这说明 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中的点都不是 S 的边界点，即 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset (\partial S)^c$.

由定义知 $(\partial S)^c$ 为开集，即 ∂S 为闭集. □

证 2 (证 $(\partial S)^d \subset \partial S$) 设 $\boldsymbol{x} \in (\partial S)^d$，由聚点的等价定义 (2) 知存在相异点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset \partial S$，$\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$，$n = 1, 2, \cdots$，使得 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$，于是 $\forall \delta > 0$，$\exists N$，

当 $n > N$ 时 $\boldsymbol{x}_n \in O_\delta(\boldsymbol{x})$, 取 $n_0 > N$, 由于 $\boldsymbol{x}_{n_0} \in \partial S$, 则由边界点的定义知 $O_{\delta-|\boldsymbol{x}_{n_0}-\boldsymbol{x}|}(\boldsymbol{x}_{n_0}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有 S 中的点, 也有不在 S 中的点, 所以 $\boldsymbol{x} \in \partial S$. □

证 3 (**证** $\partial(\partial S) \subset \partial S$) 设 $\boldsymbol{x} \in \partial(\partial S)$, 则 $\forall \delta > 0$, 在 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{x})$ 中有 ∂S 的点 $\boldsymbol{y}$. 又由边界点定义, 在 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{y})$ 中既有属于 S 的点, 也有不属于 S 的点. 由于 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{y}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$, 因此 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中既有属于 S 的点, 也有不属于 S 的点, 于是 $\boldsymbol{x} \in \partial S$. □

2. **紧集、凸集** 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果在 S 的任何一个无限开覆盖 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中总可以找出有限个开集 $O_1, \cdots, O_k$, 同样可以覆盖 S, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} O_i \supset S$, 则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个**紧集**. 容易证明紧集一定是有界闭集, 而且我们将会看到, 在 $\mathbf{R}^n$ 中紧集与有界闭集的定义是等价的 (紧性定理).

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 若 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 有 $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in E$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 则称 E 为**凸集**. 从几何上看, 以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 为端点的直线段位于 E 内.

例题 17.1.3 紧集的闭子集是紧集.

证 设 E 是一个紧集, F 是 E 的闭子集. 设 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 F 的任一开覆盖, 由于 $F^c = \mathbf{R}^n - F$ 是开集, 则 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 F^c 一起形成紧集 E 的一个开覆盖, 由紧集的定义知在 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 F^c 中存在有限个开集形成 E 的一个有限覆盖, 记这有限个开集为 $O_1, \cdots, O_k$, 不妨设 $F^c = O_k$. 由于 $F \subset E$, 则

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} O_i\right) \cup F^c \supset E \supset F.$$

但 $F^c \cap F = \varnothing$, 所以

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} O_i\right) \supset F,$$

由紧集的定义知 F 为紧集. □

3. **连通集、区域** 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果当 D 分解为两个不相交的非空子集的并集 $A \cup B$ 时, 有 $A^d \cap B \neq \varnothing$ 或者 $A \cap B^d \neq \varnothing$, 则称 D 为**连通集**. 当 D 是开集时, 我们有: 开集 D 是连通集的充分必要条件是 D 不能分解为两个不相交的非空子开集的并 (第二组参考题 1). 在 $\mathbf{R}$ 中, 连通集有特别直观的描述: $\mathbf{R}$ 中集合 D 是连通集的充分必要条件是 D 为区间 (第二组参考题 2).

连通的开集称为**区域**或**开区域**. 开区域的闭包称为**闭区域**.

更为直观并易于判断的概念是道路连通集. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果当 D 内任何两点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, 都可以找到连续曲线 $l \subset D$ 将 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 联结, 则称 D 为**道路连通集**. 这里的连续曲线是指 l 可以表示为参数方程

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中诸 φ_i 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 并且 $\boldsymbol{p}=(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\cdots,\varphi_n(0))$, $\boldsymbol{q}=(\varphi_1(1),\varphi_2(1),\cdots,\varphi_n(1))$. 可以证明道路连通集一定是连通集, 但连通集未必是道路连通集 (第二组参考题 5). 下面的命题说明了区域的道路连通性.

命题 17.1.1 $\mathbf{R}^n$ 中的区域都是道路连通的.

证 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个非空连通开集. 取 $\boldsymbol{x}\in D$, 设 $U(\boldsymbol{x})$ 为 D 中所有与 $\boldsymbol{x}$ 有 D 中连续曲线相联结的点的集合. 容易看到 $U(\boldsymbol{x})$ 是一个道路连通集. 我们证明 $U(\boldsymbol{x})=D$. 设 $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x})$, 并取 $\delta>0$ 使 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset D$. $\forall \boldsymbol{z}\in O_\delta(\boldsymbol{y})$ 存在 $O_\delta(\boldsymbol{y})$ 中的直线段联结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{y}$, 从而存在 D 中的连续曲线联结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$, 所以 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset U(\boldsymbol{x})$. 因而 $U(\boldsymbol{x})$ 是包含 $\boldsymbol{x}$ 的开集. 如 $D-U(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$, 则 $D-U(\boldsymbol{x})=\bigcup U(\boldsymbol{y}')$, 其中 $\boldsymbol{y}'$ 取遍 $D-U(\boldsymbol{x})$ 中的点. 按前面的证明, 每个 $U(\boldsymbol{y}')$ 都是开集, 因此 $D-U(\boldsymbol{x})$ 也是开集. D 有开集分解式 $D=U(\boldsymbol{x})\cup(D-U(\boldsymbol{x}))$, 与 D 是连通开集矛盾. 这就证明了 $D-U(\boldsymbol{x})=\varnothing$, 所以 $D=U(\boldsymbol{x})$ 是道路连通集. □

4. **距离概念的推广** 点与点的距离概念可推广到点 $\boldsymbol{x}$ 与集合 S, 集合 S_1 与集合 S_2 之间的距离:

$$d(\boldsymbol{x},S)=\inf_{\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|;$$

$$d(S_1,S_2)=\inf_{\boldsymbol{x}\in S_1,\boldsymbol{y}\in S_2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\inf_{\boldsymbol{x}\in S_1}d(\boldsymbol{x},S_2)=\inf_{\boldsymbol{y}\in S_2}d(\boldsymbol{y},S_1).$$

点与集合的距离可以看作是两个集合之间的距离的特殊情况. 同时还可以定义一个集合 S 的**直径** d_S 为

$$d_S=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

关于集合的运算有下列命题:

命题 17.1.2 (De Morgan 法则) 设 $A_\alpha\ (\alpha\in I)$ 为一族集合, 则有

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c,\quad \Big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c.$$

由命题 17.1.2 易证下述结论: 任意多个闭集的交集仍是闭集; 有限多个闭集的并集仍是闭集.

17.1.3 思考题

1. 按定义证明闭集的如下重要性质:

   (1) 任意多个闭集的交集是闭集; (2) 有限多个闭集的并集是闭集.

2. 证明聚点定义 (1), (2) 的等价性.

3. 在例题 17.1.1 的证明中, 我们使用的是聚点等价定义(1). 若使用原始定义, 证明是否能通过? 若不能, 应如何修改？

4. 无限多个开集的交是否一定是开集?

17.1.4 练习题

1. 证明 $\overline{S} = S \cup \partial S$.
2. 证明 $\partial S = \overline{S} - \mathrm{int}S$.
3. 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $\overline{A} \cap (\mathrm{int}B) = \varnothing$.
4. 证明 $S = S^d \iff S$ 闭, 且 S 无孤立点.
5. S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, 证明 $\overline{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, S) = 0\}$.
6. 若 S 为凸集, 则 $\overline{S}$ 也是凸集.
7. 对于集合 S 与任一组集合 $A_\alpha, \alpha \in I$, 恒有分配律:

$$S \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (S \cap A_\alpha).$$

§17.2 $\mathbf{R}^n$ 中的几个基本定理

17.2.1 综述

$\mathbf{R}$ 中的六个基本定理 (见第三章) 能推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ 上的是四个定理, 它们是:

(1) 闭矩形套定理;

(2) 凝聚定理: $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列一定有收敛子列 (或聚点定理: 有界无限点集一定有聚点);

(3) Cauchy 收敛准则: 收敛点列 $\iff$ 基本点列;

(4) 紧性定理: $\mathbf{R}^n$ 中的点集 S 是紧集的充要条件是 S 为有界闭集 (覆盖定理).

其他两个定理 (确界存在定理, 单调有界定理) 之所以不能推广到高维空间, 是因为它们与一维直线上的点的顺序有关.

紧性定理的叙述与一维的覆盖定理不同, 这可以从两方面进行解释:

(1) 如果在一维的情况下我们也定义闭集与紧集, 则覆盖定理就叙述为: 有界闭区间是紧集 (参见上册 81 页);

(2) 一维的覆盖定理不能以充要条件的形式叙述, 因为那时没有定义闭集, 而一维紧集是有界闭集但不一定是有界闭区间.

下面我们利用 De Morgan 法则给出紧性定理的另一种等价的表达形式.

定义 设集合 $S \in \mathbf{R}^n$, 称 $\mathbf{R}^n$ 中的子集族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 关于 S 具有**有限交性质**, 若对于 I 的任何有限子集 J 均有

$$S \cap (\bigcap_{\lambda \in J} F_\lambda) \neq \varnothing.$$

命题 17.2.1 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 S 是紧集的充要条件是任何关于 S 具有有限交性质的闭集族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 S 必有非空交, 即

$$S\cap(\bigcap_{\lambda\in I}F_\lambda)\neq\varnothing.$$

证 先证充分性. 设任一关于 S 具有有限交性质的闭集族与 S 有非空交. 任取 S 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$, 则由 De Morgan 法则, 从 $\bigcup\limits_{\lambda\in I}O_\lambda\supset S$ 得

$$\bigcap_{\lambda\in I}O_\lambda^c\subset S^c,$$

即

$$S\cap(\bigcap_{\lambda\in I}O_\lambda^c)=\varnothing.$$

由条件知, $\bigcap\limits_{\lambda\in I}O_\lambda^c$ 关于 S 无有限交性质, 即存在有限个 $O_1^c,\cdots,O_k^c$, 使得

$$S\cap(\bigcap_{i=1}^{k}O_i^c)=\varnothing,$$

从而

$$\bigcap_{i=1}^{k}O_i^c\subset S^c.$$

于是

$$\bigcup_{i=1}^{k}O_i\supset S.$$

这样的 $O_i\ (i=1,\cdots,k)$ 就是 S 的一个有限开覆盖, 所以 S 为紧集.

再证必要性. 设 S 为紧集, $\{F_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是任一关于 S 具有有限交性质的闭集族, 假设 $S\cap(\bigcap\limits_{\lambda\in I}F_\lambda)=\varnothing$, 即可由 De Morgan 法则推出矛盾. 从略. □

17.2.2 例题

例题 17.2.1 (闭集套定理) 设 $\{D_k\}$ 是一列非空闭集, 它满足:

(1) $D_{k+1}\subset D_k,\ k=1,2,\cdots,$

(2) D_k 的直径 $\delta_k=\sup\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D_k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to0\quad(k\to\infty)$,

则这列闭集 $\mathrm{D}_k\ (k=1,2,\cdots)$ 存在惟一的公共点.

证 1 (用凝聚定理) 在每个 D_k 中任取一点 $\boldsymbol{x}_k$, 则 $\{\boldsymbol{x}_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 为一有界无穷点列, 由凝聚定理存在 $\boldsymbol{x}$ 及 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i},\ i=1,2,\cdots\}$ 使得

$$\boldsymbol{x}_{k_i}\to\boldsymbol{x}\quad(i\to\infty).$$

下面证 $\boldsymbol{x}$ 为 $D_k\ (k=1,2,\cdots)$ 的公共点. 事实上, $\forall k_0\in\mathbf{N}_+$, 当 $k_i\geqslant k_0$ 时

$$\boldsymbol{x}_{k_i}\in D_{k_i}\subset D_{k_0}.$$

令 $i \to +\infty$, 由于 D_{k_0} 是闭集, 则 $\boldsymbol{x} \in D_{k_0}$.

下证惟一性. 用反证法, 若存在两个公共点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*$, 记 $d = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*|$, 则 $d > 0$, 由于 $\delta_k \to 0$, 于是 $\exists K$, 当 $k > K$ 时, $\delta_k < d$, 此与 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* \in D_k$ 矛盾. □

证 2 (用 Cauchy 收敛准则) 在每个 D_k 中取一点 $\boldsymbol{x}_k$, 则

$$|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l| \leqslant \max\{\delta_k, \delta_l\}.$$

由 Cauchy 收敛准则知存在 $\boldsymbol{x}$, 使得 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$. 又 $\forall k_0 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > k_0$ 时

$$\boldsymbol{x}_k \in D_k \subset D_{k_0}.$$

令 $k \to \infty$, 则 $x \in D_{k_0}$, 即 $\boldsymbol{x}$ 为 D_k $(k \geqslant 1)$ 的公共点. 惟一性的证明同证 1. □

例题 17.2.2 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的集合, 若 S 既开且闭, 则 $S = \mathbf{R}^n$ 或 $S = \varnothing$.

证 1 因 S 是闭集, 故 $\mathbf{R}^n - S$ 是开集. 于是 $\mathbf{R}^n = S \cup (\mathbf{R}^n - S)$ 是两个不相交开集的并. 由 $\mathbf{R}^n$ 的连通性可知 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中至少有一为空集, 故 $S = \mathbf{R}^n$ 或 $S = \varnothing$. □

证 2 (不用连通性概念的证明) 首先证明 $\partial S = \varnothing$. 因为 S 开, S 内的点都是内点, 所以 S 内无 S 的边界点. 同理 $\mathbf{R}^n - S$ 内也无 S 的边界点, 因此 $\partial S = \varnothing$. 如果 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 均非空, 则存在 $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n - S$. 设 L 是联结 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的直线段, 则 L 是有界闭集. 设 $\boldsymbol{z}$ 是 L 的中点, 则 $\boldsymbol{z} \in S$ 或 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n - S$. 因而 L 有子直线段 L_1 分别以 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中的点为其端点, 依此可构造由 L 的子直线段组成的有界非空闭集套 $L \supset L_1 \supset \cdots \supset L_i \supset \cdots$, 其集合半径趋于零, 且两端点分别为 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中的点. 由闭集套定理, 存在惟一的点 $\boldsymbol{p}$ 属于所有的直线段. 由边界点的定义可见 $\boldsymbol{p} \in \partial S$, 与 $\partial S = \varnothing$ 矛盾. □

例题 17.2.3 按 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) 的次序证明以下三个命题的等价性.

(1) S 是紧集;

(2) S 的任一无限子集必有聚点在 S 中;

(3) S 是有界闭集.

证 (1) $\Rightarrow$ (2). 用反证法. 设 F 是 S 的无限子集, $\forall x \in S$, 它都不是 F 的聚点 (这其中有两种可能, 一是 F 没有聚点, 二是 F 有聚点但不在 S 中). 由聚点的定义 $\exists \delta_{\boldsymbol{x}} > 0$, 使得在 $O_{\delta_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})$ 中没有异于 $\boldsymbol{x}$ 的 F 的点. 由于 $\bigcup\limits_{\boldsymbol{x} \in S} O_{\delta_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) \supset S \supset F$ 以及 S 是紧集, 从而存在有限个 $O_{\delta_1}(\boldsymbol{x}_1), \cdots, O_{\delta_k}(\boldsymbol{x}_k)$ 满足

$$\bigcup_{i=1}^{k} O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}_i) \supset S \supset F.$$

由此可看出 F 是有限集, 与 F 是无限集矛盾.

(2) ⇒ (3). 由已知条件知 $S^d \subset S$, 从而 S 闭. 下面用反证法证明 S 有界, 若不然在 S 中有子列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $|\boldsymbol{x}_k| \to \infty \ (k \to \infty)$, 可见 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 没有聚点, 与已知条件矛盾.

(3) ⇒ (1). 用闭矩形套定理. 其详细证明在很多教科书中都有, 从略. □

例题 17.2.4 设 S_1, S_2 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, 证明存在两个开集 O_1 和 O_2, 使得 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

分析 若 S_1 与 S_2 只是两个单点集 $\{\boldsymbol{x}_1\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}_2\}$, 则 $d = d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) > 0$, 令

$$O_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) < d/3\}, \quad i = 1, 2,$$

则 O_i 为开集, $O_i \supset S_i, \ i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. 由此启发我们对一般的有界闭集把证明分成两部分.

证 第一步: 证明 $d = d(S_1, S_2) > 0$.

用反证法. 若 $d(S_1, S_2) = 0$, 则由 $d(S_1, S_2)$ 的定义, $\exists \boldsymbol{x}_n \in S_1, \ \boldsymbol{y}_n \in S_2$, 使得

$$\lim_{n \to \infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0. \tag{17.1}$$

由 S_1, S_2 有界及凝聚定理知, $\{\boldsymbol{x}_n\}, \{\boldsymbol{y}_n\}$ 都有收敛子列, 不妨设 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$. 由 S_1, S_2 闭知 $\boldsymbol{x} \in S_1, \ \boldsymbol{y} \in S_2$. 在 (17.1) 中令 $n \to \infty$ 得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, 此与 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 矛盾.

第二步: 直接定义

$$O_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, S_i) < d/3\}, \quad i = 1, 2,$$

则 O_i 为开集, $O_i \supset S_i, \ i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

还有一种更有启发性 (可用于下面第一组参考题的第 5 题) 的构造 O_1, O_2 的办法是定义

$$O_1 = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in S_1} O_{d_x/3}(\boldsymbol{x}), \qquad O_2 = \bigcup_{\boldsymbol{y} \in S_2} O_{d_y/3}(\boldsymbol{y}), \quad \square$$

其中 d_x 是 $x \in S_1$ 到 S_2 的距离, d_y 是 $y \in S_2$ 到 S_1 的距离.

17.2.3 练习题

1. 设 A, B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个不相交的闭集, 其中一个有界, 证明: $d(A, B) > 0$. 如果 A, B 均是无界闭集, 是否仍有 $d(A, B) > 0$?
2. 设 S_1, S_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集, 其中一个有界. 证明: 存在开集 O_1, O_2 满足 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.
3. 由闭矩形套定理证明凝聚定理.
4. 由凝聚定理证明 Cauchy 收敛定理.
5. 由紧性定理证明聚点定理.

§17.3 对于教学的建议

17.3.1 学习要点

1. 本章有很多集合论的知识, 对于初学者来说是比较抽象的, 但它们却是进一步学习数学的基本语言之一. 在教学中最基本的要求是理解各类集合的概念. 根据我们的经验, 以聚点作为一个切入点来展开一些练习很有效果. 此外, 举例是理解概念的最有效的手段. 通常的教科书中有足够的例子供习题课选用.
2. 在上册第三章中的实数基本定理中, 除去单调有界定理和确界存在定理需要用到实数的有序性外, 其余四个基本定理都得到了推广, 其中闭区间套定理被推广成比较方便的闭集套定理的形式.
3. 在以后的学习中, 用得最多的集合概念是区域. 我们给出了它的比较正规的描述. 根据命题 17.1.1, 也可以道路连通开集来定义 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, 这样可以在现阶段避开连通与道路连通这两个易混淆的概念.
4. 多元基本定理延续了第三章的内容, 相对而言, 学生理解不是很困难. 因而有条件时可适当布置一些应用题, 如第一组参考题的题 2.
5. **对习题课的建议** 教师应该根据实际教学课时来选取材料, 确定教案. 一般来说, 本章的教学时段只有一次多一点的习题课. 因此, 习题课的安排首先要保证学生能理解概念, 能正确叙述多元基本定理的内容. 其次是一些初步的集合证明题和基本定理的应用题 (可集中于某一个定理, 如闭集套定理的应用). 至于连通性的讨论和紧性的等价描述完全是补充内容.

   学生们在证明某个集合 S 具有某种性质时, 有时采用如下错误证法: 先对 S 是开集时证明结论, 然后对 S 是闭集时证明结论. 由以上两步得到结论成立. 要告诉他们尽管开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集, 但这并不意味着集合只有开集和闭集两大类.

   在证明像练习题 17.2.3 中的题 1 时, 学生们往往不会下手, 或者是不会做, 或者是不得要领地写一大堆. 要引导他们从最简单的情况开始思考. 如果 A 为单点集 $\{x\}$ 时, 用反证法, 设 $d(x,B)=0$, 则存在 $y_n\in B$, 使得 $|x-y_n|\to 0$, $(n\to\infty)$, 因而 $\{y_n\}$ 是有界列, 有收敛子列. 然后如例 17.2.4 第一步那样推出矛盾. 当 A 为一般有界闭集时, 讨论是类似的 (此时如何证明 $\{y_n\}$ 也是有界列呢?).

17.3.2 参考题

第一组参考题

1. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.
2. 用闭集套定理证明三角形三边上的中线交于一点.
3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 证明 $E=\{(x,f(x))\mid x\in(-\infty,+\infty)\}$ 是平面上的闭集 (称为 f 的图).
4. 证明 $\mathrm{int}S$ 是开集, 而且是包含于 S 的最大开集.
5. ($\mathbf{R}^n$ 的正规性) 设 S_1,S_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集 (不一定有界). 证明存在开集 O_1,O_2 满足 $S_i\subset O_i, i=1,2$, 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.
6. (1) 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集合. 证明: $\forall\delta>0$, $\exists$ S 中有限个点 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2,\cdots$, $\boldsymbol{p}_k$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_\delta(\boldsymbol{p}_i)\supset S$;

   (2) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式: 若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则 $\exists\,\delta>0$, 使得 $\forall\boldsymbol{p}\in F$, 存在 $\{G_\alpha\}$ 中的一个开集 G, 满足 $O_\delta(\boldsymbol{p})\subset G$;

   (3) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式与通常的表述形式 (若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则存在 $\{G_\alpha\}$ 中的有限个开集 $G_1,\cdots,G_m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i\supset F$) 等价.

第二组参考题

1. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中开集 D 是连通集的充分必要条件是 D 不能分解为两个不相交的非空子开集的并.
2. 证明 $\mathbf{R}$ 中集合 D 是连通集的充分必要条件是 D 为区间.
3. 证明有公共点的连通集的并集是连通集.
4. 证明 $A=\{(x,y)\mid x,\ y$ 至少有一个是有理数$\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的道路连通集.
5. 证明道路连通集一定是连通集, 但连通集未必是道路连通集. (考察例子 $E=\{(x,\ y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},\ 0<x\leqslant\dfrac{2}{\pi}\}$, 证明 $\overline{E}$ 是连通而非道路连通的.)
6. 设 $A,\ B$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 定义 $A+B$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一切形如 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的点组成的集合, 其中 $\boldsymbol{x}\in A,\ \boldsymbol{y}\in B$.

   (1) 如果 K 为 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集, C 为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集, 证明 $K+C$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集;

   (2) 如果 $K,\ C$ 均为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集, $K+C$ 未必为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集. 考虑 K 为整数集合, C 为一切形如 αm 的数组成的集合, 其中 $m\in K$, α 是某个确定的无理数. 证明 $\overline{K+C}=\mathbf{R}$, 但 $K+C\neq\mathbf{R}$.

第十八章 多元函数的极限与连续

本章讨论多元函数的极限与连续性. 其中 §18.1 节引进重极限与累次极限的概念, 讨论了它们的相互关系, 并介绍了一些常用方法. §18.2 节讨论多元函数的连续性, 介绍了一些多元函数连续的充分条件及以集合语言刻画连续性的命题, 然后介绍紧集上的连续函数性质及其应用, 最后对于向量值函数介绍了 $\mathbf{R}^n$ 中的压缩映射原理. §18.3 节是学习要点和参考题.

§18.1 多元函数的极限

18.1.1 重极限

设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, n 元函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个去心邻域中有定义, A 为某一常数, 若

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 当\ 0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta\ 时,\ 有\ |f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon.$$

则称 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时以 A 为极限 (又称它是 n 重极限), 记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A\ \ 或简记为\ \ f(\boldsymbol{x})\to A\ \ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

用邻域的语言来描述, 就是

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 当\ \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\}\ 时,\ 有\ f(\boldsymbol{x})\in O_\varepsilon(A).$$

注 在定义重极限时, 可以放宽对函数定义域的要求, 只要 $\boldsymbol{a}$ 是定义域的聚点即可.

从邻域的观点看, 多元函数极限的定义与一元函数极限的定义完全一样. 但现在是在高维空间中讨论, $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 是指 $\boldsymbol{x}$ 以任何方式或沿任何曲线趋于 $\boldsymbol{a}$. 其趋近方式要比一元函数的情形复杂得多. 一个简单的例子是讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的二重极限是否存在. 容易看出, 当 (x,y) 沿直线 $y=mx$ (其中 m 为任意实数) 趋于 $(0,0)$ 点时, $f(x,y)$ 的极限为 $\dfrac{m}{1+m^2}$, 与 m 有关. 由此可以看出这个二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的二重极限不存在.

与一元函数相仿, 也可以定义自变量趋于 $\pm\infty$ 或 ∞ 时的极限, 但现在是多个自变量, 于是可以出现某一些自变量趋于一个定数, 而另一些自变量趋于 $\pm\infty$ 或 ∞ 的情形, 以两个自变量为例, 有下述几种极限:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}f(x,y)=A\iff\forall\varepsilon>0,\exists M>0,$ 当 $|x|>M,\ |y|>M$ 时,

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon;$$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,+\infty)}f(x,y)=A\iff\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\ M>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$,

$$y>M\ 时\ |f(x,y)-A|<\varepsilon;$$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,y_0)} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta, M>0$, 当 $x<-M$,

$0<|y-y_0|<\delta$ 时, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

还有其他一些情形, 在此不一一列举. 此外当 A 为 $\pm\infty$ 或 ∞ 时, 与一元函数类似, 我们称之为广义极限或极限不存在 (参见上册 98 页).

多元函数的极限的惟一性, 局部有界性, 局部保号性, 局部比较原理, 四则运算法则, Cauchy 收敛准则以及 Heine 归结原理的叙述与论证完全与一元函数相仿, 这里就不再重复了 (参见上册第四章).

求多元函数的极限有如下常用方法:

1. 利用函数的连续性和函数极限的运算性质 (多元函数的连续性将在下一节讨论);
2. 利用不等式缩放或使用夹逼定理;
3. 利用变量替换化简或化为已知极限. 对含有三角函数或幂指函数的二重极限可考虑它是否能通过变形或变量代换化为一元函数中的基本极限, 如
$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1,\quad \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=\mathrm{e}$$
等 (参见上册 116 页题 9), 然后利用这些基本极限去求重极限的值;
4. 利用初等变形, 如分母有理化、对指数形式取对数等等.

例题 18.1.1 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

分析 直观上看分子的多项式次数高于分母的多项式次数, 极限应该是 0. 这种题目一般用极坐标代换后可化为一个有界量与无穷小量的乘积.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.\quad \Box$$

例题 18.1.2 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

解 由于
$$|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x|^3+|y|^3\leqslant(|x|+|y|)(x^2+y^2),$$
从而
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0.$$
所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0.\quad \Box$$

注 也可对 $\sin(x^3+y^3)$ 用一元 Taylor 展式
$$\sin(x^3+y^3)=x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)\ (|x|+|y|\to0).$$

例题 18.1.3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & 当\ x\neq 0,\\ y, & 当\ x=0,\ y\neq 0.\end{cases}$$

解 由于

$$|f(x,y)|=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin xy}{x}\right|\leqslant |y|, & 当\ x\neq 0,\\ |y|, & 当\ x=0,\ y\neq 0,\end{cases}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0.$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.\quad \square$$

例题 18.1.4 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}.$$

解 先求其对数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$. 由于

$$|xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant r^2\ln r^2\to 0\quad (r\to 0^+),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln(x^2+y^2)=0,$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=1.\quad \square$$

例题 18.1.5 证明

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

证 此题底数的极限并不存在, 但可用夹逼方法. 注意到 $x>0,\ y>0$ 时

$$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$, 从而有

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.\quad \square$$

关于证明重极限不存在的方法, 我们将在累次极限之后介绍.

18.1.2 累次极限

为方便起见在 $\mathbf{R}^2$ 中讨论, 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个去心邻域内有定义, 称下列两个极限 (如果存在的话)

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

分别是函数 f 在 (x_0,y_0) 点的先 x 后 y 的二次极限和先 y 后 x 的二次极限, 统称它们是**累次极限**.

重极限与累次极限的关系反映在下面的命题中.

命题 18.1.1 当重极限存在且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 时,

(1) 如果 $y\neq y_0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$;

(2) 如果 $x\neq x_0$ 时, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$.

由此命题可见: 当重极限和某个累次极限都存在时, 则该累次极限的值应该等于重极限的值. 但在一般情况下, 重极限与累次极限没有什么必然的关系.

当重极限存在时, 两个二次极限可以都不存在, 也可以一个存在而另一个不存在, 例如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

当重极限不存在时, 可以是两个二次极限存在且相等, 也可以是两个二次极限存在但不相等, 还可以是两个二次极限中一个存在而另一个不存在. 例如

$$f(x,y)=\frac{y}{x},\quad 当\ x\neq 0.$$

显然有 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$, 但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

18.1.3 证明函数的重极限不存在的常用方法

1. 找两种特殊的趋近方式, 使得在两种方式下函数的极限值不同. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x^2\leqslant |y|\ 或\ y=0,\\ 1, & 其他.\end{cases}$$

当 (x,y) 沿过原点的任何直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

但 (x,y) 沿曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 趋于 $(0,0)$ 点时

$$\lim_{(x,y=x^2/2)\to(0,0)} f(x,y)=1,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的重极限不存在.

2. 证明两个累次极限存在但不相等, 例如

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=-1,$$

可见重极限不存在. 因为如果重极限存在, 两个累次极限又存在, 由命题 18.1.1 三个极限值应该相等.

18.1.4 思考题

1. 证明多元函数极限的 Heine 归结原理: 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n, A\in\mathbf{R}$, 则 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$ 的充分必要条件是: 对满足条件 $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{a}$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$ 的每个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\boldsymbol{x}_n)=A$. (参见上册 104~105 页.)
2. 证明多元函数极限的 Cauchy 收敛准则: 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 有极限的充要条件是对每一个 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对于 $O_\delta(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 中的每一对点 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$, 满足不等式 $|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.

18.1.5 关于累次极限换序

命题 18.1.1 告诉我们, 如果在某一点二元函数的重极限与两个累次极限都存在, 则对 x 和 y 取极限的顺序可以交换, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y).$$

如果我们并不知道重极限是否存在或者甚至知道重极限不存在, 那么在什么条件下, 累次极限可以交换次序呢? 下面的命题回答了这个问题.

命题 18.1.2 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域中有定义, 如果

(1) 对固定的 $x\neq x_0$, $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ 存在;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 关于 y 在 $0<|y-y_0|<\eta$ 上一致,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{y\to y_0}h(y)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y).$$

分析 这是一个极限换序问题, 而条件 (2) 已给出对 y 的一致性, 这使我们想到利用一致收敛的函数列与求极限的有关性质 (参见在 14.2.1 小节中的讨论).

证 1 根据 Heine 归结原则, 我们只要证明 $\forall x_n$, $n=1,2,\cdots$, $x_n\neq x_0$, $x_n\to x_0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{y\to y_0} h(y).$$

为此, 我们定义 $f_n(y) = f(x_n, y)$. 由条件 (2) 知函数列 $\{f_n(y)\}$ 在 y_0 的去心邻域 $0 < |y - y_0| < \eta$ 上一致收敛, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y) = h(y).$$

另一方面, 由条件 (1) 得到

$$\lim_{y\to y_0} f_n(y) = \lim_{y\to y_0} f(x_n, y) = g(x_n).$$

由一致收敛的函数列求极限的性质 (见命题 14.2.1) 知以下两个极限存在且相等:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{y\to y_0} h(y).$$

再由 Heine 归结原则, 得到

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{y\to y_0} h(y). \quad \square$$

证 2 直接证明. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = h(y)$ 在 $0 < |y - y_0| < \eta$ 上对 y 一致, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta$ 且 $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, $|f(x', y) - f(x'', y)| < \varepsilon$ 对 $y \in O_\eta(y_0) \setminus \{y_0\}$ 一致. 令 $y \to y_0$ 得到

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 记为 A. 由此可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时

$$|g(x) - A| < \varepsilon/3,$$

又由条件 (2) 知同时还可以成立

$$|h(y) - f(x,y)| < \varepsilon/3, \quad \forall y \in O_\eta(y_0) \setminus \{y_0\}.$$

取定 $\overline{x} \in O_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$. 由条件 (1) 知 $\exists \delta \in (0, \eta)$, 使得当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时

$$|f(\overline{x}, y) - g(\overline{x})| < \varepsilon/3,$$

从而当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时

$$|h(y) - A| \leqslant |h(y) - f(\overline{x}, y)| + |f(\overline{x}, y) - g(\overline{x})| + |g(\overline{x}) - A| < \varepsilon,$$

于是

$$\lim_{y\to y_0} h(y) = A. \quad \square$$

18.1.6 练习题

1. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$;

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ y, & \text{当 } x = 0; \end{cases}$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

2. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 不存在.

3. 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的重极限与累次极限:

(1) $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & 当x\neq 0,\\ 0, & 当x=0.\end{cases}$

4. 设一元函数 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续导数, 定义二元函数

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\qquad 当\ x\neq y,$$

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)$.

5. 叙述并证明二元函数极限存在的惟一性定理, 局部有界性定理与局部保号性定理.

6. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 且在 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

7. 证明: 在命题 18.1.2 中若 $f(x,y)$ 除直线 $x=x_0, y=y_0$ 外有定义, 其他条件不变, 则重极限与两个累次极限都存在, 并且相等.

§18.2 多元函数的连续性

18.2.1 定义与基本性质

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, f 是定义在 S 上的函数, $\boldsymbol{x}_0\in S$ 且是 S 的聚点, 若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**连续**, 否则就说 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**不连续**或**间断**, 如果 f 在 S 上的每一点都连续, 则称 f 在 S 上连续.

从定义可以看出, 在形式上多元函数的连续性的定义与一元函数的连续性的定义是相同的. 因此在连续性方面多元函数也有许多与一元函数相同的性质, 如保号性, 和、差、积、商的连续性, 复合函数的连续性等, 它们的叙述与证明都是和一元函数相同的 (参见上册第五章).

但与多元极限情况类似的是: 一个多元函数如果对每个变元都连续, 则并不能推出它是一个多元连续函数. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在全平面上对 x,y 都分别连续, 在原点当然也是如此, 但它作为二元函数在原点是不连续的 (见 147 页上的讨论).

例题 18.2.1 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在其定义域上是连续的.

证　显然 $f(x,y)$ 的定义域是 $xy>-1$ 且 $f(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续的, 所以只须证明 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上的每一点连续. 以下分两种情况讨论.

(1) 在 $(0,0)$ 点.

由于 $f(0,0)=0$, 而当 $x\neq 0$ 时

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}=\begin{cases}0, & y=0,\\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}, & y\neq 0.\end{cases}$$

又由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1,$$

从而 $\exists\,\delta_1>0$, 当 $0<|x|<\delta_1,\ 0<|y|<\delta_1$ 时

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right|\leqslant|y|\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right|\leqslant 2|y|.$$

由 $f(x,y)$ 的表达式知只要 $|x|<\delta_1,\ |y|<\delta_1$, 无论 $x=0$ 还是 $x\neq 0$ 都有

$$|f(x,y)|\leqslant 2|y|.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

(2) 在 $(0,y_0)$ 点, $y_0\neq 0$.

当 $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,y_0)|&=|y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-y_0|\\&=|y[\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1]+(y-y_0)|\\&\leqslant|y|\cdot|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1|+|y-y_0|.\end{aligned}$$

而当 $x=0$ 时

$$|f(x,y)-f(0,y_0)|=|y-y_0|.$$

注意到当 $y_0\neq 0$ 时

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1.$$

结合上述各式得

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(f(x,y)-f(0,y_0))=0.$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,y_0)$ 处连续, 从而在其定义域上是连续的. □

例题 18.2.2 (多元函数连续的若干充分条件) 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续. 证明: 当下列条件之一满足时 $f(x,y)$ 是 D 上的二元连续函数.

(1) $f(x,y)$ 在 D上对 x 连续且关于 y 一致, 即 $\forall x_0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$ (与 y 无关), $|x-x_0|<\delta$ 时, 对 $\forall y$, (x,y), $(x_0,y)\in D$ 恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon;$$

(2) $f(x,y)$ 在 D 上对 x 局部满足 Lipschitz 条件且关于 y 一致, 即: $\forall\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0)\in D$, $\exists r>0$ 及 $L>0$, 使得对 $\forall(x_1,y)$, $(x_2,y)\in D\cap B_r(\boldsymbol{p}_0)$, 恒有

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<L|x_1-x_2|;$$

(3) $f(x,y)$ 关于变量 y 是单调的.

证 (1) 由定义, 并用拆项补项的方法.

(2) 逐点连续是局部性质, 可由定义并用拆项补项的方法来证.

(3) 为证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 可找 (x_0,y_0) 的一个矩形邻域 $D_1=[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\times[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$. 先利用 $f(x_0,y)$ 在直线 $x=x_0$上的连续性, 可选取 δ_2 足够小, 使 f 在 D_1 的上下边中点 $(x_0,y_0\pm\delta_2)$ 的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 $\frac{1}{2}\varepsilon$; 然后再由 $f(x,y_0\pm\delta_2)$ 在直线 $y=y_0\pm\delta_2$ 上的连续性, 可取 δ_1足够小, 使 f 在 D_1 的上下边上的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 ε. 最后利用 f 关于 y 的单调性, 即可得 f 在 D_1 上的值与 $f(x_0,y_0)$的误差不超过 ε. □

连续性除了可用极限刻画之外, 也可用集合来刻画. 下面是一些等价描述.

命题 18.2.1 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$上的函数, 则下述几个条件等价:

(1) $f(\boldsymbol{x})$ 连续;

(2) 任何开集的原象是开集;

(3) 任何闭集的原象是闭集;

(4) 对 $\mathbf{R}^n$中的任意子集 E, 有 $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$.

证 我们采用循环证明的方法.

(1) $\Rightarrow$ (2): 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续, A 是 $\mathbf{R}$ 中的任一开集, 如果 $f^{-1}(A)$ 是空集, 结论自然成立; 若 $f^{-1}(A)$ 非空, $\forall\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(A)$, 则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in A$. 而 A 是 $\mathbf{R}$ 中

开集, 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的开邻域 $(f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon,\ f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon) \subset A$. 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续知 $\exists\, \delta > 0$ 当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时 $f(\boldsymbol{x}) \in (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon,\ f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon)$. 于是 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\} \subset f^{-1}(A)$, 从而 $f^{-1}(A)$ 为开集.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的任一集合, 则

$$f^{-1}(S^c) = [f^{-1}(S)]^c. \tag{18.1}$$

事实上, 由于 $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(S^c) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \in S^c$, 而 $\boldsymbol{x} \in [f^{-1}(S)]^c \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \notin f^{-1}(S) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \notin S$, 由此可以看出 (18.1) 成立.

设 F 是 $\mathbf{R}$ 中的任一闭集, 由 (18.1) 得

$$f^{-1}(F) = f^{-1}((F^c)^c) = [f^{-1}(F^c)]^c.$$

由条件 (2) 及 F^c 为开集知 $f^{-1}(F)$ 为闭集.

(3) $\Rightarrow$ (4) : 要证 $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$, 只要证 $\overline{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 事实上, 下面的包含关系显然成立,

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

又由条件 (3) 及 $\overline{f(E)}$ 是闭集知

$$\overline{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : 反证法. 若不然, $\exists\, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n, f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点不连续, 由 Heine 归结原则知, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ 及点列 $\{\boldsymbol{x}_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$ 但

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_0)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{18.2}$$

取 $E = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{E}$, $f(E) = \{f(\boldsymbol{x}_n)\}_{n\in\mathbf{N}_+}$. 由条件 (4) 知 $f(\boldsymbol{x}_0) \in \overline{f(E)} = \overline{\{f(\boldsymbol{x}_n)\}}_{n\in\mathbf{N}_+}$, 与 (18.2) 矛盾. □

例题 18.2.3 函数 $f(x,y)$ 定义在正方形 $I_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上, 在底边 $I_0 = \{(x,0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 上连续, 证明 $\exists\, \delta > 0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $I_\delta = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \delta\}$ 上有界.

证 1 (用凝聚定理) 用反证法. 若不然, 则 $\forall\, \delta > 0, f(x,y)$ 在 I_δ 上都无界, 于是 $\exists\, (x_n, y_n) \in I_{\frac{1}{n}}$ 使得

$$|f(x_n, y_n)| > n. \tag{18.3}$$

由于 $\{(x_n, y_n)\}$ 有界, 由凝聚定理知存在子列 $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x_0, y_0)$, 且 $x_0 \in [0,1]$, $y_0 = 0$, 由 $f(x,y)$ 在 $(x_0, 0)$ 点的连续性知

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, 0).$$

此与 (18.3) 矛盾.

证 2 (用紧性定理) $\forall\, x_0 \in [0,1]$, 由 $f(x,y)$ 在 $(x_0, 0)$ 的连续性知 $\exists\, \delta_0 > 0$, 使得 $f(x,y)$ 在 $V(x_0) = \{(x,y) \mid |x - x_0| < \delta_0, |y| < \delta_0\} \cap I_1$ 上有界, 由此得到一族开集覆盖有界闭集 I_0, 由紧性定理可选出有限个 $V(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V(x_i) \supset I_0$. 取 $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\delta_i\}$, 则 $f(x,y)$ 在 I_δ 上有界. □

例题 18.2.4 设 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 定义

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)f(\varphi+\theta)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi.$$

则对于任意 $\theta_0\in\mathbf{R}$, 有

$$\lim_{(\rho,\theta)\to(1^-,\theta_0)}u(\rho,\theta)=f(\theta_0).$$

证 首先要用一个结果

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi=1,$$

即 $f\equiv 1$ 时, $u\equiv 1$. 这个关系式可用多种方法证明, 例如通过万能代换 (参见上册 291 页) 求出下面的不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)\quad(|\varepsilon|<1)$$

来证明. 由这个结果就可以得到如下的表达式

$$u(\rho,\theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\left(f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)\right)\mathrm{d}\varphi.$$

$\forall\varepsilon>0$, 要找 $\delta>0$, 使得当 $1-\delta<\rho<1$, $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|u(\rho,\theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon.$$

为此先由 f 的连续性知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $|\varphi|<\delta$, $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将要估计的积分分为三部分, 即

$$u(\rho,\theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=I_1+I_2+I_3.$$

由于在 $(-\pi,-\delta)$ 上, $\cos\varphi\leqslant\cos\delta$. 于是

$$1-2\rho\cos\varphi+\rho^2\geqslant 1-2\rho\cos\delta+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos\delta)\geqslant 4\rho\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

又由 f 的连续性知 $\exists M>0$, 使得

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)|\leqslant M.$$

于是

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(1-\rho^2)M}{4\rho\sin^2\dfrac{\delta}{2}}(\pi-\delta)\leqslant\frac{(1-\rho^2)M}{8\rho\sin^2\dfrac{\delta}{2}}.$$

从而 $\exists\delta_1$, 使得当 $1-\delta_1<\rho<1$ 时, 有

$$|I_1|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

同理可证, 此时

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

最后估计 I_2, 有

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是 $\exists\delta,\ \delta_1$, 使得当 $1-\delta_1<\rho<1,\ |\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|u(\rho,\theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon. \quad \square$$

18.2.2 紧集上多元连续函数的性质

定义在紧集上的多元连续函数也具有与定义在有界闭集上的一元连续函数相同的性质: 有界性, 存在最大、最小值, 一致连续性以及值域也是紧集等.

命题 18.2.2 紧集上的连续函数的值域必是紧集 (有界闭集), 从而紧集上的连续函数必有界, 并存在最大、最小值.

命题 18.2.3 (Cantor 定理) 紧集上的连续函数必定一致连续.

例题 18.2.5 设 $f(x,y,z)$ 在 $a\leqslant x,y,z\leqslant b$ 上连续, 令

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\min_{a\leqslant z\leqslant b}f(x,y,z),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 我们将证明分成两步.

第一步: 设

$$\psi(x,y)=\min_{a\leqslant z\leqslant b}f(x,y,z),\quad a\leqslant x,y\leqslant b.$$

因为 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域上连续, 从而一致连续. 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时

$$f(x_0,y_0,z)-\varepsilon<f(x,y,z)<f(x_0,y_0,z)+\varepsilon.$$

对 z 在 $[a,b]$ 上取最小值得到

$$\psi(x_0,y_0)-\varepsilon<\psi(x,y)<\psi(x_0,y_0)+\varepsilon.$$

可见 $\psi(x,y)$ 在正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续.

第二步: 令 $y=a+k(x-a)$, 其中 $0\leqslant k\leqslant 1$, 则

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x,y)=\max_{0\leqslant k\leqslant 1}\psi(x,a+k(x-a)).$$

由 ψ 在 $\{a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant x\}$ 上连续知 $\psi(x,a+k(x-a))$ 在 $\{a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant k\leqslant 1\}$ 上连续, 用与第一步中相同的方法可以证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $\square$

注 从上面第二步所用的方法使我们想到一元函数中的一个题目:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$g(x)=\max_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi)\quad 与\quad h(x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi)$$

都在 $[a,b]$ 上连续 (见上册 155 页的题 10).

我们可以证明如下: 设 $\xi=a+k(x-a),0\leqslant k\leqslant 1$, 则

$$g(x)=\max_{0\leqslant k\leqslant 1}f(a+k(x-a)).$$

由于二元函数 $f(a+k(x-a))$ 在 $\{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant k \leqslant 1\}$ 上连续, 用例题 18.2.5 中的第一步中的证明方法可以证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 同理 $h(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续.

从上例可见, 有些一元函数的问题可以在多元函数理论中得到较好的解决.

例题 18.2.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵, 它的行列式 $\det\boldsymbol{A} \neq 0$. 证明存在 $\alpha > 0$, 使对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 都有 $|\boldsymbol{Ax}| \geqslant \alpha|\boldsymbol{x}|$.

证 容易证明 $|\boldsymbol{Ay}|$ 是定义在有界闭集 $S^1 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{y}| = 1\}$ 上的连续函数. 因为 $\det\boldsymbol{A} \neq 0$, 故对 $\boldsymbol{y} \in S^1$, 有 $|\boldsymbol{Ay}| > 0$. 因此由命题 18.2.2, $\min\limits_{\boldsymbol{y}\in S^1} |\boldsymbol{Ay}| = \alpha > 0$. 从而当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)| \geqslant \alpha$, 即 $|\boldsymbol{Ax}| \geqslant \alpha|\boldsymbol{x}|$. 当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 不等式显然. □

例题 18.2.7 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $d(\boldsymbol{x},E)$ 是上一章所定义的 $\boldsymbol{x}$ 和 E 的距离. 证明 $d(\boldsymbol{x},E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

证 任取 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{z} \in E$, 则

$$d(\boldsymbol{x},E) \leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

对所有 $\boldsymbol{z} \in E$ 取下确界得 $d(\boldsymbol{x},E) \leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},E)$. 同理得到 $d(\boldsymbol{y},E) \leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{x},E)$. 因而

$$|d(\boldsymbol{x},E) - d(\boldsymbol{y},E)| \leqslant |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

取 $\delta = \varepsilon$, 则由 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < \delta$ 推出 $|d(\boldsymbol{x},E) - d(\boldsymbol{y},E)| < \varepsilon$. 所以 $d(\boldsymbol{x},E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续. □

例题 18.2.8 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 E 上. 对于点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{a})$ 定义 f 在这个邻域上的振幅为

$$\omega_f(\boldsymbol{a},\delta) = \sup_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}\{f(\boldsymbol{x})\} - \inf_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}\{f(\boldsymbol{x})\}.$$

然后令

$$\omega_f(\boldsymbol{a}) = \lim_{\delta\to0+} \omega_f(\boldsymbol{a},\delta),$$

称为函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 的**振幅**. 证明:

(1) 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 E 上有界, 则 $\forall\boldsymbol{a} \in E$, $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 存在;

(2) $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点连续的充要条件是 $\omega_f(\boldsymbol{a}) = 0$.

(参见上册 124 页的定义和 129 页的题 12).

证 (1) 对固定的 $\boldsymbol{a} \in E$, 由定义知 $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}\{f(\boldsymbol{x})\}$ 与 $\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}\{f(\boldsymbol{x})\}$ 分别是 δ 的单调增加与单调减少函数. 由 $f(x)$ 的有界性, 知当 δ 充分小时, $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}\{f(\boldsymbol{x})\}$

与 $\inf\limits_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}$ 都是 δ 的有界函数, 于是 $\omega_f(a,\delta)$ 是 δ 的单调增加有界函数, 从而 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(a,\delta)$ 存在.

(2) 若 $f(x)$ 在 a 点连续. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x\in O_\delta(a)$ 时, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. 此时应有

$$\omega_f(a,\delta)\leqslant\sup_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}-f(a)+f(a)-\inf_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}\leqslant 2\varepsilon,$$

于是

$$\omega_f(a)=\lim_{\delta\to0^+}\omega_f(a,\delta)=0.$$

反之, 若 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(a,\delta)=0$. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $\delta\leqslant\delta_0$ 时

$$\sup_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}-\inf_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}=\omega_f(a,\delta)<\varepsilon,$$

于是当 $x\in O_{\delta_0}(a)$ 时

$$|f(x)-f(a)|\leqslant\sup_{x\in O_{\delta_0}(a)}\{f(x)\}-\inf_{x\in O_{\delta_0}(a)}\{f(x)\}<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 a 点连续. □

18.2.3 多元连续函数的介值定理

一元连续函数的介值定理 (上册 §5.2 节) 建立在区间的连通性上. 多元连续函数也有类似的讨论.

命题 18.2.4 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中连通集合 D 上的连续函数, $a,\ b\in D$, 则对任意数 $C\in(f(a),\ f(b))$, 存在 $c\in D$, 使得 $f(c)=C$.

证 首先证明连续函数把 $\mathbf{R}^n$ 中连通集合 D 映到 $\mathbf{R}$ 中的连通集 $f(D)$. 设有分解式 $f(D)=A\cup B$, 其中 $A,\ B$ 为两个不相交的非空子集. 于是

$$D=E\cup F,$$

其中 $E=f^{-1}(A)$, $F=f^{-1}(B)$. 易知 E, F 非空且不相交. 由 D 的连通性, 可设 E 中有 F 的聚点, 即存在点列 $\{x_i\}\subset f^{-1}(B)$ 收敛到 $x\in f^{-1}(A)$. 由 f 的连续性, $\{f(x_i)\}$ 收敛到 $f(x)\in A$. 这表明 A 中有 B 的聚点. 故 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的连通集.

不难证明 $f(D)$ 是区间 (见第十七章的第二组参考题 2). 因此由 $f(a),\ f(b)\in f(D)$ 得 $[f(a),\ f(b)]\subset f(D)$. 故 $C\in f(D)$, 即存在 $c\in D$, 使 $f(c)=C$. □

18.2.4 向量值函数

向量值函数是一个从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射 $(n,\ m\geqslant1)$. 对应于每一个自变量 $x\in\mathbf{R}^n$, 函数值是一个向量, 即它的每一个分量是一个多元函数 (或一元函数), 因此多元函数的极限与连续的概念都可以推广到向量值函数上来.

定义 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbf{R}^n$, 满足

(1) $\boldsymbol{f}(\Omega) \subset \Omega$;

(2) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$, 有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)| \leqslant L|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|,$$

其中 $0 < L < 1$, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是 Ω 上的一个**压缩映射** (参见上册 77 页).

从以上定义可以看出, 有关向量值函数的压缩映射的定义是一元函数压缩映射定义的推广. 类似于一元函数, 我们也有下面的压缩映射原理.

命题 18.2.5 (压缩映射原理) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集, $\boldsymbol{f}$ 是 Ω 上的一个压缩映射, 则在 Ω 中存在 $\boldsymbol{f}$ 的惟一不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*.$$

证明与一维情况的命题 3.4.4 类似, 从略. 压缩映射原理有许多重要的应用, 这将在后面的章节中介绍 (例如在 §20.2 节中用于证明反函数组存在定理).

18.2.5 练习题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b] \times [c,d]$ 上连续, 函数列 $\varphi_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛并满足条件 $c \leqslant \varphi_n(x) \leqslant d$, 证明函数列 $F_n(x) = f(x,\varphi_n(x))$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
2. 证明: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.
3. 在命题 18.2.1 中, 由 (1) 直接证 (4).
4. 如果 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意开集映为开集, 问 $\boldsymbol{f}$ 是否是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.
5. $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续, 且 $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y)$ 存在. 证明 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有界, 且一致连续.
6. 证明: 若 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭域, f 为 D 上连续函数, 则 $f(D)$ 是一个有界闭区间.
7. 利用命题 18.2.1 和例题 18.2.7 重新证明上一章的第一组参考题 5.
8. (14.1.1 小节中 Dini 判别法的推广) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, $\{f_k\}$ 是 D 上的连续函数列, 且对每一点 $\boldsymbol{x} \in D$ 有 $f_1(\boldsymbol{x}) \geqslant f_2(\boldsymbol{x}) \geqslant \cdots \geqslant f_k(\boldsymbol{x}) \geqslant \cdots$ 以及 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = 0$. 证明函数列 $\{f_k\}$ 在 D 上一致收敛.
9. 证明: 在例题 18.2.8 中的 $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 可改用 $\lim\limits_{\delta\to0^+} \sup\limits_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$.
10. 证明连续映射把紧集映为紧集.

§18.3 对于教学的建议

18.3.1 学习要点

1. 学生在学习多元函数极限与连续性时, 面临着两个任务: 一方面要复习, 巩固以前学到的 ε-δ 方法, 这是数学分析的基本功; 另一方面, 多元函数的情况更为复杂, 有许多新的问题产生, 如何对以前的方法进行调整, 有那些新的注意事项, 都要一一弄清. 为此, 要十分注意习题课内容的条理性.
2. 例子在这一章的学习中有着十分重要的地位. 学生首先是模仿, 然后自己要能举出一些说明问题的反例. 比如, 针对重极限与累次极限的关系, 多元函数连续与一元函数连续的相同点与不同点的一些例子.
3. **对习题课的建议** 关于求极限. 极坐标代换是讨论二元函数极限的有效手段, 学生们很喜欢用, 但在使用时必须小心. 例如
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$
的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在, 但如果用极坐标代换, 则
$$f(x,y)=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\to 0,\quad 如果\ \theta\neq 0,\ \pi;$$
而当 $\theta=0,\pi$ 时, $y=0$, 故 $f(x,y)=0$, 因此容易误认为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 产生错误的原因在于忽视了用极坐标代换计算二元函数极限时, 要求极限过程对 $\theta\in[0,2\pi)$ 一致地成立. 而上述计算中极限过程与 θ 有关. 事实上, 如果我们选择一条特殊的趋于原点的曲线
$$L=\{(r,\theta)\mid \sin\theta=r\cos^2\theta\},$$
则
$$f(x,y)|_L=\left.\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right|_L=\frac{1}{2},$$
从而二元函数极限不存在.

关于连续性. 在证明函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续时, 如果需要的话, 学生们都会将 $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 写为
$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=[f(x,y)-f(x_0,y)]+[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)].$$
但经常会犯的错误是, 由 f 对 x 的连续性得出 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时
$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon/2.$$
要提醒他们对每一个 y, $f(x,y)$ 是一个关于 x 的一元函数, 但含有 y. 因此 $f(x,y)$ 是一族含参数 y 的关于 x 的一元函数, 所以上述 δ 应该与 y 有关. 这还不是我们在二元连续时需要的 δ.

可以要求学生总结一下: 如果一个二元函数对每个变元分别连续, 还须加何种条件可保证二元函数连续 (结合例题 18.2.2). 这个问题可以作为习题课上进一步深入的一个内容.

18.3.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 且关于 y 单调增加. 如果
$$\lim_{y\to d^-} f(x,y)=f(x,d),$$
证明这一收敛关于 $x\in[a,b]$ 是一致的, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<d-y<\delta$ 时, 对所有的 $x\in[a,b]$, 都有
$$|f(x,y)-f(x,d)|<\varepsilon.$$
2. 设 f 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 定义
$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant\xi\leqslant x}\max_{a\leqslant y\leqslant\xi}f(\xi,y),$$
证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集, f 为定义在 D 上的函数, 证明 f 在 D 上连续的充要条件是下列集合
$$\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbf{R}^{n+1}\ \big|\ y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}$$
是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的紧集.
4. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $[0,1]$ 上的 n 个连续函数, 称 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $[0,1]$ 上**线性相关**, 若存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得
$$\sum_{j=1}^n c_jf_j(x)\equiv 0,\ x\in[0,1].$$
证明: $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $[0,1]$ 上线性相关的充要条件是
$$\det\left(\left(\int_0^1 f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\times n}\right)=0,$$
其中 $\det(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.
5. 设 $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\cdots,\ \boldsymbol{p}_k$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 k 个相异的点, 证明存在一个最小半径的圆盘 B, 把这 k 个点覆盖. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点, 也有类似的命题.
6. 设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶的实对称方阵, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 设函数 $G(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ 定义在 $E=\mathbf{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上, 其中 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的转置. 证明:

   (1) $G(\boldsymbol{x})$ 可以在 E 上取到最大值;

   (2) $G(\boldsymbol{x})$ 的最大值点是与 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 有关的某个矩阵的特征向量. 请写出这个矩阵.

第二组参考题

1. 设 T 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个映射, 如果存在常数 θ, $0 \leqslant \theta < 1$ 以及自然数 n_0, 使得
$$|T^{n_0}\boldsymbol{x} - T^{n_0}\boldsymbol{y}| \leqslant \theta|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \quad \forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$$
证明映射 T 有惟一的不动点.

2. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, $\boldsymbol{f}$ 是 Ω 到 Ω 的一个映射, 满足
$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \quad \forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \Omega,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}.$$
证明 $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 中存在惟一的不动点. 能否把命题中有界闭集的假设减弱为一般的有界集或无界的闭集?

3. 证明连续映射将连通集映为连通集.

4. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, 函数 f 定义在 Ω 上, 对于 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 且 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时
$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon \quad (\text{或 } f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon),$$
则称 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**上半连续** (或**下半连续**). 证明:

   (1) f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处上半连续的充要条件是 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻近有上界, 且
$$\varlimsup_{\Omega \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0);$$
   (2) f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处下半连续的充要条件是 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻近有下界, 且
$$\varliminf_{\Omega \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0).$$

5. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, f 是 Ω 上的上半连续函数 (下半连续函数), 则 f 在 Ω 上有上界并达到最大值 (有下界并达到最小值).

6. 设 $\{f_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧集 Ω 上的连续函数列, 如果对每个 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 均有
$$\sup_k f_k(\boldsymbol{x}) < +\infty,$$
证明函数
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sup_k \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x})$$
在 Ω 上达最小值.

7. (Peano 曲线)[①] 设 Δ 是 $\mathbf{R}^2$ 中由 $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ 和 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 所围成的正三角形闭区域. $\boldsymbol{f}_0$: $[0,1] \to \Delta$ 定义为 $\boldsymbol{f}_0(0) = (0,0)$, $\boldsymbol{f}_0(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, $\boldsymbol{f}_0(1) = (1,0)$, 其余线性联结. 则 $\boldsymbol{f}_0([0,1])$ 是 Δ 中从端点 A 到重心 K 再到端点 B 的一条折线 L (见图 18.1(a)).

① 关于 Peano 曲线的另一个例子见 16.4.2 小节.

然后将 Δ 等分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形区域 Δ_i, $i=1,2,3,4$, L 等分成长度为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的四段 L_i, $i=1,2,3,4$. 设 g_0 : $L\to\Delta$ 以类似于 $\boldsymbol{f}_0$ 的方式依次把 L_i, $i=1,2,3,4$ 映到 Δ_i, $i=1,2,3,4$ 中. 令 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{g}_0\circ\boldsymbol{f}_0$, 则 $\boldsymbol{f}_1([0,1])$ 就是 Δ 中一条联结 A, B 的折线, 由 2×4 段直线段连成 (见图 18.1(b)).

再设 $\boldsymbol{g}_1$ 把 $\boldsymbol{f}_1([0,1])$ 的每一段作类似于 g_0 那样的变换. 令 $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{g}_1\circ\boldsymbol{f}_1$, 则 $\boldsymbol{f}_2([0,1])$ 就如图所示是一条由 2×4^2 段直线段连成的折线 (见图 18.1(c)). 依类似的方式定义 $\boldsymbol{f}_k=\boldsymbol{g}_{k-1}\circ\boldsymbol{f}_{k-1}$: $[0,1]\to\Delta$, $k=3,4,\cdots$, 使得 $\boldsymbol{f}_k([0,1])$ 是一条由 2×4^k 段直线段连成的折线, 每段直线分别位于边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的小正三角形区域中, 且 $\boldsymbol{g}_{k-1}$ 保持 $\boldsymbol{f}_{k-1}([0,1])$ 的点在它所在的小正三角形区域中.

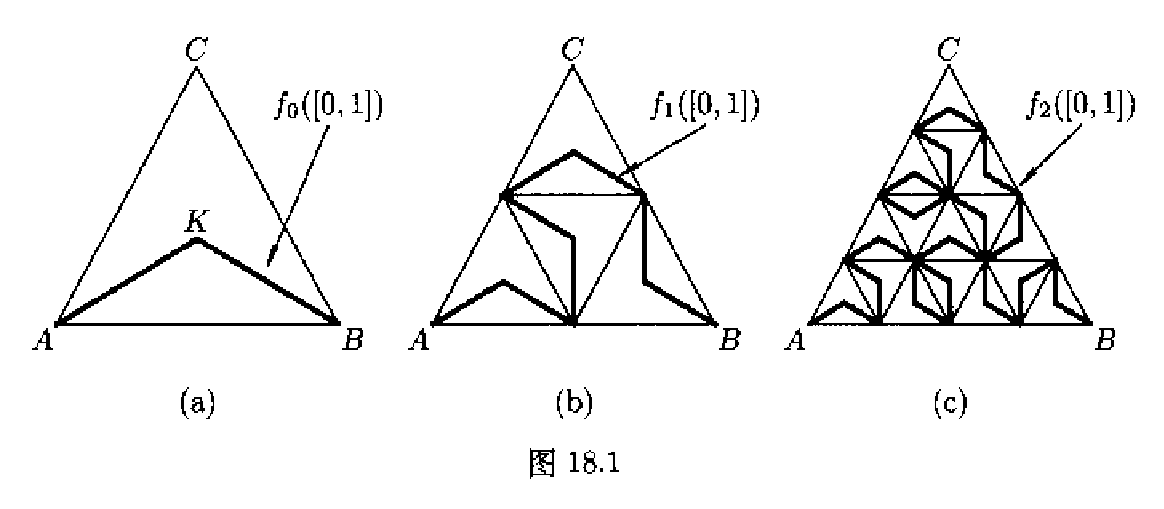


图 18.1

(1) 证明任取 $n>m$, 有 $|\boldsymbol{f}_n(t)-\boldsymbol{f}_m(t)|\leqslant\frac{1}{2^m}$, 从而 $\boldsymbol{f}_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 设其极限映射为 $\boldsymbol{f}$. 证明 $\boldsymbol{f}$: $[0,1]\to\Delta$ 连续;
(2) 证明 $\boldsymbol{f}([0,1])=\Delta$, 即连续映射 $\boldsymbol{f}$ 把一个区间 $[0,1]$ 映为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的区域 Δ.

8. (Tietze 扩张定理) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为闭子集, $\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}$ 为连续函数, 且 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant M$, $\boldsymbol{x}\in D$. 设 $g_0(\boldsymbol{x})=0$, $g_k(\boldsymbol{x})$ 归纳定义为

$$g_k(\boldsymbol{x})=\frac{2^{k-1}d(\boldsymbol{x},A_k)}{3^k(d(\boldsymbol{x},A_k)+d(\boldsymbol{x},B_k))}-\frac{2^{k-1}d(\boldsymbol{x},B_k)}{3^k(d(\boldsymbol{x},A_k)+d(\boldsymbol{x},B_k))},$$

其中

$$A_k=\{\boldsymbol{x}\in D\,|\,\varphi_k(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M\},$$
$$B_k=\{\boldsymbol{x}\in D\,|\,\varphi_k(\boldsymbol{x})\leqslant-\frac{2^{k-1}}{3^k}M\},$$

而 $\varphi_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-(g_0(\boldsymbol{x})+\cdots+g_{k-1}(\boldsymbol{x}))$, $k=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $g_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ 连续, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 并且当 $x\in D$ 时 $g(x)=f(x)$. 因此 g 称为 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续扩张, 也称连续开拓;

(2) 证明 (1) 的结论当 f 并不有界时也成立.

(以上两题取自 [2].)

9. 是否能把开集上的连续函数连续扩张到全空间? 一致连续函数呢? 考察 $\mathbf{R}$ 中的例子.

10. 证明可以把定义在 $\mathbf{R}^n$ 中有理点集上的一致连续函数惟一扩张到全空间.

第十九章 偏导数与全微分

本章前两节分别讨论多元函数的偏导数与全微分. 在 §19.3 节介绍求多元函数偏导数的链式法则. §19.4 节是向量值函数的微分学定理. 最后一节是学习要点和参考题. 方向导数, 梯度, Taylor 公式等将在第二十一章 (偏导数的应用) 中介绍.

§19.1 偏导数

19.1.1 偏导数的定义

以二元函数为例. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义. 固定 $y=y_0$ 将 $f(x,y)$ 视为 x 的一元函数. 如果它在 x_0 点可导, 则称此导数是二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点关于 x 的**偏导数**, 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地可以定义 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 以及任意个变元的多元函数的偏导数.

例题 19.1.1 求

$$f(x,y)=\begin{cases}y\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 (0,0) 的偏导数.

解 由于

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{\Delta y\ln(\Delta y)^2}{\Delta y}=\ln(\Delta y)^2,$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \text{不存在.}\quad \square$$

由于多元函数的偏导数是用一元函数的导数来定义的, 因此它具有导数的基本性质与运算法则, 例如偏导数的四则运算, 对复合函数求偏导数的链式法则等.

偏导数的几何意义 设 $z=f(x,y)$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数存在, 则它与平面 $y=y_0$ 的交线 l_x 在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}_x$ 为 $(1,0,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$, 与平面 $x=x_0$ 的交线 l_y 在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}_y$ 为 $(0,1,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$.

19.1.2 偏导数与连续

在一元函数中，可导可以推出连续. 但在多元函数中，若 f 在某一点对每一个变元的偏导数都存在，却不能断言 f 在该点连续，甚至不能断言 f 在该点的极限存在，最简单的例子是

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xy\neq 0,\\ 0, & \text{当 } xy=0.\end{cases}$$

显然 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 f 在 $(0,0)$ 点不连续，甚至极限也不存在.

下面的命题说明，如果偏导数在某一点的邻域内存在而且有界，则可推出函数在该点连续.

命题 19.1.1 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域内存在且有界，则 f 在 (x_0,y_0) 点连续.

证 注意到

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

利用一元函数的微分中值定理，得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 已知 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有界，所以

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0,$$

即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续. □

19.1.3 高阶偏导数

就二元函数而论，若 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都存在，则它们都是二元函数，如果它们关于 x 的偏导数存在或者关于 y 的偏导数存在，就称这些偏导数是 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**:

f 关于 x 的二阶偏导数，记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 或 f_{xx};

f 关于 y 的二阶偏导数，记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 或 f_{yy};

f 先关于 x 后关于 y 的二阶混合偏导数，记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 或 f_{xy};

f 先关于 y 后关于 x 的二阶混合偏导数，记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 或 f_{yx}.

更高阶的偏导数也可以同样定义. 请注意两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 并不总是相等的，例如设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则有

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

从而在原点处有

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=1.$$

由此可见

$$f_{yx}(0,0)\neq f_{xy}(0,0).$$

注 上面定义的函数 $f(x,y)$ 连续可微 (关于可微的定义见下一小节), 因为 f_x 和 f_y 都是处处连续的. 但如果混合偏导数 f_{yx} 和 f_{xy} 连续, 则构造上述反例是不可能的. 事实上, 如果在某一点 (x_0,y_0) 的邻域内 f_x, f_y 都存在, 且 f_{yx} 与 f_{xy} 都在该点连续, 那么在 (x_0,y_0) 点一定成立 $f_{yx}=f_{xy}$. 在一般的分析教科书上都有这个结论及其证明. 我们可以证明下述更强的结论.

命题 19.1.2 设 f_x, f_y 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在且 f_{xy} 在 (x_0,y_0) 连续, 则 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 存在, 且

$$f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0).$$

证 定义

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0).$$

由于函数 f 存在关于 x 的偏导数, 所以 $\varphi(x)$ 可导, 应用一元函数的中值定理, 有

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)&=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x\\ &=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1<1$, 又由 f_x 存在关于 y 的偏导数, 故对以 y 为自变量的函数 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y)$ 应用一元函数中值定理, 上式化为

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 因此

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)\\ &=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

在上式两边同除以 Δy, 并令 $\Delta y \to 0$, 由偏导数的定义以及 f_{xy} 在点 (x_0, y_0) 连续就得到

$$f_y(x_0+\Delta x, y_0) - f_y(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x.$$

再在上式两边同除以 Δx, 并令 $\Delta x \to 0$, 由 f_{xy} 在 (x_0, y_0) 点连续得到

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0). \quad \square$$

例题 19.1.2 证明: 函数 $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ 在上半平面 $\mathbf{R}_+^2 = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \mid t > 0\}$ 上满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{19.1}$$

其中 a 为正常数.

证 $\forall (x,t) \in \mathbf{R}_+^2$, 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + \frac{1}{t^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\frac{x^2}{4a^2t^2}\right) \\
&= \frac{1}{4a\sqrt{\pi}t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-1 + \frac{x^2}{2a^2t}\right), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\frac{x^2}{4a^4t^2} - \frac{1}{2a^2t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right) \\
&= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(\frac{x^2}{2a^2t} - 1\right),
\end{aligned}$$

所以方程 (19.1) 在 $\mathbf{R}_+^2$ 上成立. $\square$

例题 19.1.3 设 $\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, 则

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[(x-\xi)+(y-\eta)\right]^{-1/2},$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[(x-\xi)+(y-\eta)\right]^{-1}.$$

证 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\
\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\pi}\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2},
\end{aligned}$$

从而结论成立. $\square$

§19.2 全微分

19.2.1 全微分的定义与基本性质

为方便起见, 这里仅讨论二元函数. 设 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域上有定义, 如果 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(r),$$

其中 A, B 是两个仅与点 (x_0,y_0) 有关而与 Δx, Δy 无关的常数, $o(r)$ 是当 $r \to 0$ 时关于 r 的高阶无穷小量, $r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 f 在点 (x_0,y_0) **可微**, 且称 $A\Delta x + B\Delta y$ 是函数 f 在 (x_0,y_0) 点的**全微分**. 记作

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

习惯上, 记 $\Delta x = \mathrm{d}x, \Delta y = \mathrm{d}y$, 于是全微分 $\mathrm{d}z$ 又可以写为

$$\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y.$$

从全微分的定义可知, 如果函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 那么在 (x_0,y_0) 点附近有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + A\Delta x + B\Delta y.$$

上式右端是一个线性函数, 因此可微的意义在于在 (x_0,y_0) 附近函数可用一个 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

全微分具有下列性质:

(1) 如果 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0);$$

(2) 若 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 f 在点 (x_0,y_0) 连续.

由性质 (1) 知, 如果 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 f 在点 (x_0,y_0) 的全微分是

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

类似地可定义高阶全微分

$$\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f) = (\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y})^n f,$$

其中 $(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y})^n$ 是将 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 视为通常的量按照二项式定理展开而得到的对 f 的一个形式记号, 实际上是一个微分算子.

全微分的几何意义 设 $z = f(x,y)$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, 如果 f 可微, 那么在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 附近, 曲面可以用它在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切平面近似代替. 其差是关于 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 的一个高阶无穷小量, 切平面由两个线性无关的切向量 $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$ 张成, 其法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1).$$

与一元函数的情况类似, 全微分可用于近似计算与估计误差. 以二元函数为例,

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

就是 (x_0,y_0) 附近的一个近似公式 (参见 6.4.3 小节中的例题),

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

就是 (x_0,y_0) 附近的一个近似的误差估计式 (参见 6.4.3 小节中的例题).

例题 19.2.1 求 $A=\sqrt{1-(1.004)^2+(1.994)^2}$ 的近似值.

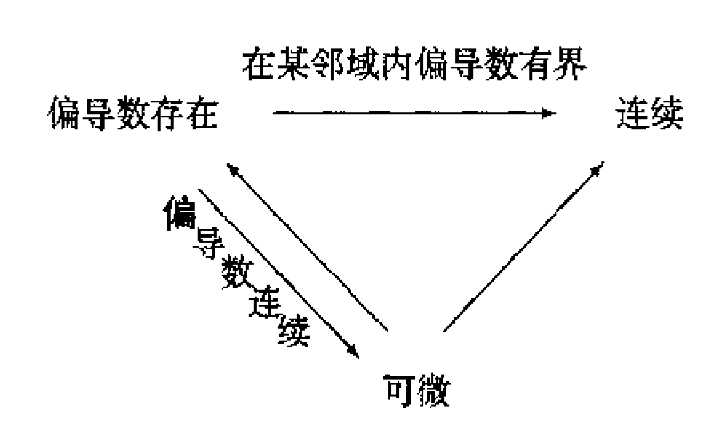
解 取 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}$, $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0.004$, $\Delta y=-0.006$. 计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-\frac{1}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1.$$

于是 $A=f(1.004,1.994)\approx f(1,2)-\frac{1}{2}\cdot(0.004)+1\cdot(-0.006)=1.992.$ □

19.2.2 多元函数的连续性、偏导数存在性及可微性之间的关系

多元函数在一个点处的的连续性、偏导数存在性及可微性之间有下列关系:



由此可得到证明一个函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微的常用方法如下:

(1) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点至少有一个偏导数不存在;

(2) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不连续;

(3) 从定义出发证明 $\Delta f-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y\neq o(r)$.

例题 19.2.2 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 证明:

(1) $f(x,y)$ 在 (0,0) 点连续;

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 都存在;

(3) $f(x,y)$ 在 (0,0) 点不可微.

证 (1) 由于 $|\Delta f|=|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}$, 于是

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(f(0,0)+\Delta f)=0=f(0,0).$$

(2) 直接按定义计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

(3) 由于

$$\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2},$$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$, 则

$$\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{r}=\frac{|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点不可微. □

注 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微时, 成立**有限增量公式**:
$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|)$.
上述例子说明仅有 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 存在还不足以保证二维有限增量公式成立 (这与一维有限增量公式 (上册 159 页 (6.1)) 成立的条件是不一样的, 由此可以体会一元导数与多元偏导数的区别).

例题 19.2.3 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的一个邻域上有定义, 要求给函数 $\varphi(x,y)$ 加上适当的条件, 使得

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续;

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数;

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

解 (1) 由于 $f(0,0)=0$, 而在 $(0,0)$ 点附近

$$|f(x,y)|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}|\varphi(x,y)|,$$

于是当

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)=0$$

时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

特别地当 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点附近有界时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(2) 由于单侧导数

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\pm}(0,0)=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{\pm x\varphi(x,0)}{x}=\pm\lim_{x\to 0^{\pm}}\varphi(x,0),$$

从而当 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)=-\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x,0)$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)$.

同理当 $\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)=-\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi(0,y)$时, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)$.

特别地当 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
& f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\
=& |x-y|\varphi(x,y)-[\lim_{x\to0^+}\varphi(x,0)]x-[\lim_{y\to0^+}\varphi(0,y)]y \\
=& \begin{cases} [\varphi(x,y)-\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x,0)]x-[\varphi(x,y)+\lim\limits_{y\to0^+}\varphi(0,y)]y, & 若\ x>y, \\ -[\varphi(x,y)+\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x,0)]x+[\varphi(x,y)-\lim\limits_{y\to0^+}\varphi(0,y)]y, & 若\ x<y, \end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可以推出, 当

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$$

时 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微. □

19.2.3 思考题

1. 为什么说 $f_x(x_0,y_0)$ 存在就能保证一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 连续? 由此能否进一步断言: 对充分接近 y_0 的 y_1, 一元函数 $f(x,y_1)$ 在点 x_0 连续?
2. 证明全微分的性质 (1), (2).
3. 举例说明:
   (1) $f(x,y)$ 在某一点的邻域内存在偏导数, 但在该点不一定连续, 从而不一定可微;
   (2) $f(x,y)$ 在某一点连续, 但在该点偏导数不一定存在, 从而不一定可微;
   (3) $f(x,y)$ 在某一点可微, 但在该点偏导数不一定连续.
4. 证明: 若 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.
5. 设 $z=f(x,y)$ 在开集 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上可微, 且全微分 $\mathrm{d}z$ 恒为零. 问 $f(x,y)$ 在 D 内是否应取常数值? 证明你的结论.

19.2.4 练习题

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x-y|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0, \\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

   讨论:
   (1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续 ?
   (2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微 ?

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0, \\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

   证明:

(1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在;

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 在 $(0,0)$ 点不连续;

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

(本题也说明从可微不能推出偏导数连续.)

3. 设 $f(x,y,z)$ 在开集 D 上有定义, $f_x(x,y,z)$ 与 $f_y(x,y,z)$ 在 D 上有界, 且对固定的 (x,y), $f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数. 证明 $f(x,y,z)$ 在 D 上连续.

4. 求 $u=\ln(1+x^2+y^2)$ 在 $(x,y)=(1,2)$ 处的全微分.

5. 已测得一圆柱体的底圆直径 $D_0=10.44$, 高 $H_0=18.36$, 且测量误差 $|\Delta D|\leqslant 0.02$, $|\Delta H|\leqslant 0.01$. 试估计用体积公式 $V=\dfrac{1}{4}\pi D^2H$ 计算时的绝对误差 ΔV 与相对误差 $\Delta V/V$.

6. $f(x,y)$ 定义在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上, 且 f_y 在 I 上连续, 证明 $f(x,y)$ 对 y 满足一致 Lipschitz 条件, 即 $\exists\, L>0$, 使得 $\forall\,(x,y_1),(x,y_2)\in I$, 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 与 x 无关.

7. 若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 在区域 D 内存在, 且 $\forall\,(x,y)\in D$, $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上为常数.

8. 设 $\Omega\in\mathbf{R}^2$ 是开区域, $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 内满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad u^2+v^2=C,$$

其中 C 为常数, 证明 $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 内恒为常数.

9. 设 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 上有定义. 若 $f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $f_y(x,y)$ 在 G 上有界. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

§19.3 复合函数求导 (链式法则)

19.3.1 复合函数偏导数的链式法则

若 $z=f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微, $u_i=g_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,m)$ 在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 有关于 x_j $(j=1,\cdots,n)$ 的偏导数, 则复合函数

$$z=f[g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n)]$$

关于自变量 x_j 的偏导数存在且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n. \tag{19.2}$$

写成矩阵的形式为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

特款 1 若 $z=f(x,y)$, 而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(t). \tag{19.3}$$

特款 2 若 $z=f(x,y,t)$, 而 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{19.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{19.5}$$

注意: 最后一个等式左边的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 与等式右边的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 不一样, $\frac{\partial z}{\partial t}$ 表示函数

$$z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t),t]$$

对 t 求偏导, 此时视 s 为常数, 而 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 是 $z=f(x,y,t)$ 对 t 求偏导, 把 x,y 视为常数. 为了避免混乱, 有时引入下面的记号

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t),\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t),\quad f_3=\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t),$$

其中下标 i $(i=1,2,3)$ 表示对第 i 个自变量求偏导, 于是可将 (19.4), (19.5) 写为

$$z_s=f_1\varphi_s+f_2\psi_s,\quad z_t=f_1\varphi_t+f_2\psi_t+f_3.$$

写成矩阵的形式为

$$(z_s,z_t)=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}\varphi_s & \varphi_t\\ \psi_s & \psi_t\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

19.3.2 例题

例题 19.3.1 对于幂指函数 $u=x^y$, 令 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 由 (19.3) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)\\&=yx^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\psi'(t)\\&=x^y(\frac{y}{x}\varphi'+\ln x\psi')\\&=[\varphi(t)]^{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi'(t)+[\ln\psi(t)]\psi'(t)\right).\quad\square\end{aligned}$$

(以前我们曾用另外的方法证明过它, 参见上册 165～166 页的对数求导法.)

作为公式 (19.3) 的另一个应用, 讨论行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的求导, 其中假定元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是 t 的一元函数, 它们关于 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}$ 都存在.

例题 19.3.2 证明行列式 Δ 的导数等于把 Δ 内的第 1, 第 2, $\cdots$, 第 n 行元素依次换成它们的导数而得出的 n 个行列式之和.

证 回忆行列式关于第 i 行元素的展开式

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}a_{ij},$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 容易看出 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 中不含有元素 a_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant n$, 于是

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij}.$$

按照公式 (19.3) 有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}.$$

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}\dfrac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}$ 也表示一个行列式的展开式, 它同已知行列式 Δ 的差别仅在于把 Δ 中第 i 行的元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 换成它们的导数 $\dfrac{\mathrm{d}a_{i1}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}a_{i2}}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}a_{in}}{\mathrm{d}t}$, 由此可知结论成立. □

注 在使用链式法则 (19.2) 时, 要求 $f(u_1, \cdots, u_m)$ 在点 $(u_1, \cdots, u_m)$ 可微, 否则公式 (19.2) 有可能失效, 请看下面的例子:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{当 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{当 } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

由于

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{当 } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{当 } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

可以看出 f_x 与 f_y 都在 $(0,0)$ 点不连续, 容易证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

令 $x = y = t$, 则 $f(t,t) = \dfrac{1}{2}t$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}$. 如果用链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=f_x x_t'+f_y y_t'.$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$, 问题出在 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微, 也就是不满足链式法则的条件.

例题 19.3.3 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数, 且 $f(x,x^2)\equiv 1$.

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$;

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$.

解 (1) 对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两边求导得

$$f_x+2xf_y=0.$$

由条件得

$$x+2xf_y=0,$$

所以当 $x\neq 0$ 时, $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$. 由 f_y 的连续性知当 $x=0$ 时也有 $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$.

(2) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$, 则 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微, 且

$$F_y(x,y)=0.$$

于是 $F(x,y)$ 只是 x 的函数, 即 $F(x,y)=\varphi(x)$, 从而

$$f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

再由 $f(x,x^2)\equiv 1$ 得 $\varphi(x)=1-2x^4$, 所以

$$f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4.\quad\square$$

例题 19.3.4 设 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y,u)$, $w=h(x,u,v)$, 求 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$.

解 复合这几个函数得到

$$w=h[x,f(x,y),g(x,y,f(x,y))].$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial x}=h_1+h_2\frac{\partial f}{\partial x}+h_3(g_1+g_3\frac{\partial f}{\partial x}),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=h_2\frac{\partial f}{\partial y}+h_3(g_2+g_3\frac{\partial f}{\partial y}).\quad\square$$

例题 19.3.5 设二元连续可微函数 F 在直角坐标下可写为 $F(x,y)=f(x)g(y)$, 在极坐标系中可写为 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$. 若 $F(x,y)$ 无零点, 求 $F(x,y)$.

解 注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\&=f'(x)g(y)(-r\sin\theta)+f(x)g'(y)r\cos\theta\\&=-yf'(x)g(y)+xf(x)g'(y).\end{aligned}$$

另一方面有

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=\frac{\partial h(r)}{\partial \theta}=0.$$

于是 $-yf'(x)g(y)+xf(x)g'(y)=0$. 当 $x\neq 0,\ y\neq 0$ 时有

$$\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}. \tag{19.6}$$

由于上式对任意的 $x\neq 0, y\neq 0$ 恒成立, 于是

$$\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}=\lambda, \tag{19.7}$$

其中 λ 为任一常数. 由 (19.7) 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda x,$$

即 $(\ln f)'=(\frac{\lambda}{2}x^2)'$, 所以

$$\ln f(x)=\frac{\lambda}{2}x^2+C, \tag{19.8}$$

其中 C 为任意常数. 由 (19.8) 得到

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{\frac{\lambda x^2}{2}},$$

其中 C_1 为任意常数. 由 (19.7) 还可得到

$$g(y)=C_2\mathrm{e}^{\frac{\lambda y^2}{2}},$$

其中 C_2 为任意常数. 最后得到

$$F(x,y)=C\mathrm{e}^{\frac{\lambda(x^2+y^2)}{2}},$$

其中 C,λ 为任意常数. $F(x,y)$ 在 $x=0$ 或 $y=0$ 的值由连续性得到. □

例题 19.3.6 设 $a,b\neq 0$, f 具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \tag{19.9}$$

$$f(ax,bx)=ax, \tag{19.10}$$

$$f_x(ax,bx)=bx^2. \tag{19.11}$$

求 $f_{xx}(ax,bx)$, $f_{xy}(ax,bx)$, $f_{yy}(ax,bx)$.

解 对 (19.10) 两边求导, 得

$$af_x(ax,bx)+bf_y(ax,bx)=a. \tag{19.12}$$

对 (19.11), (19.12) 两边求导得

$$af_{xx}(ax,bx)+bf_{xy}(ax,bx)=2bx, \tag{19.13}$$

$$a^2f_{xx}(ax,bx)+2abf_{xy}(ax,bx)+b^2f_{yy}(ax,bx)=0. \tag{19.14}$$

由 (19.9), (19.14) 得

$$f_{xy}(ax,bx)=0. \tag{19.15}$$

将 (19.15) 代入 (19.13) 得

$$f_{xx}(ax,bx)=\frac{2b}{a}x. \tag{19.16}$$

最后将 (19.16) 代入 (19.9) 得

$$f_{yy}(ax,bx)=-\frac{2a}{b}x. \quad \square$$

19.3.3 齐次函数

定义 如果函数 $f(x,y)$ 满足 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, 其中 $t>0$, 则称 f 是 n 次**齐次函数**. 齐次函数有如下性质:

命题 19.3.1 设 f 有连续偏导数, 则 f 是 n 次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y).$$

命题 19.3.2 设 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数, 则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=n(n-1)f(x,y),$$

这里 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+2xy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+y^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ 是一种缩写的记号, 即把 $x,y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 都看成为常数, 按二项式展开.

命题 19.3.3 若 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数, 则 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 是 $(n-1)$ 次齐次函数.

命题 19.3.4 若 $f(x,y)$ 是在 $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 上连续的 n 次齐次函数, 则

$$|f(x,y)|\leqslant C(x^2+y^2)^{n/2},$$

其中 C 为正常数.

以上命题都可以推广到任意个自变量的情形. 它们的证明都不难, 留给读者.

例题 19.3.7 证明 $u=\varphi(\frac{y}{x})+y\psi(\frac{y}{x})$ 满足方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{19.17}$$

其中 φ,ψ 均为二次连读可微函数.

分析 当然可以通过复合函数求导数来验证方程, 但观其特点, 首先是由 φ 和 ψ 的任意性知 $\varphi(\frac{y}{x})$ 与 $y\psi(\frac{y}{x})$ 都应该满足方程. 又注意到 $\varphi(\frac{y}{x})$ 为零次齐次函数, $y\psi(\frac{y}{x})$ 为一次齐次函数, 且方程 (19.17) 可写为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u=0.$$

证 由命题 19.3.2 知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\varphi(\frac{y}{x})=0(0-1)\varphi(\frac{y}{x})=0,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left[y\psi(\frac{y}{x})\right]=1\cdot 0\cdot\left[y\psi(\frac{y}{x})\right]=0.$$

于是

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left[\varphi(\frac{y}{x})+y\psi(\frac{y}{x})\right]=0.$$

这就是所要证明的. □

19.3.4 练习题

1. 设 $u=\mathrm{e}^x+\sin y+t$, $x=st$, $y=s+t$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
2. 设 $u=f(s,t)$, $s=\dfrac{x}{y}$, $t=\dfrac{y}{z}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.
3. 设 $u=f(s,t,y)$, $s=\varphi(x,y)$, $t=\psi(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.
4. 设 $u=\mathrm{e}^x\sin y$, $x=2st$, $y=t+s^2$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
5. 设 $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$, 求 $\mathrm{d}u$.
6. 设 $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{y})^{1/z}$, 求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$.
7. 设 $w=F(xy,yz)$, F 为有连续偏导数的二元函数, 证明
$$x\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z}=y\frac{\partial w}{\partial y}.$$
8. 设 $z=f(xy)$, f 为可微的一元函数, 证明
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$
9. 设二元函数 $u=F(x,y)$ 满足方程
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$
证明: $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数.
10. 设二元函数 F 在直角坐标系中可写成 $F(x,y)=f(x)g(y)$, 在极坐标中可写成 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(\theta)$, 求 $F(x,y)$.
11. 证明 $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$
其中 φ,ψ 为具有二阶连续导数的一元函数.
12. 设 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 满足
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$
又设 $w=w(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$
证明:

(1) $w = w(x(u,v), y(u,v))$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$;

(2) $\dfrac{\partial^2 (xy)}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 (xy)}{\partial v^2} = 0$.

13. 证明: 可微函数 $z = f(x,y)$ 仅是 $ax + by$ $(ab \neq 0)$ 的函数的充要条件是

$$b\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}.$$

14. 设 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数, $F(s,t)$ 有连续一阶偏导数, 且满足

$$F(u_x, u_y) = 0, \qquad F_s^2 + F_t^2 \neq 0,$$

证明: $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$.

15. 设 $u = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 有连续二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 试求 $u(x,y)$.

§19.4　向量值函数的微分学定理

19.4.1　有限增量公式与拟微分平均值定理

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 是一个向量值函数, 即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)),$$

其中 $f_1,\cdots,f_m$ 均是 n 元实函数. 当 $f_1,\cdots,f_m$ 均是 D 上的可微函数时, 称 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的**可微向量值函数**, 或者是 D 上的**可微映射**. 当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处可微时, 称 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)_{m\times n}$$

为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**全导数**, 记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ (又记为 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$), 它表示了一个自 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性变换. 当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时, 我们有如下**有限增量公式**, 它给出了向量值函数的差的局部估计.

命题 19.4.1 设开区域 $D \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 在 D 上可微, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x} \in D$, 则

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$

其中 $o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 表示当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \to 0$ 时, 模为高阶无穷小量的向量.

所以, 可微映射在局部可以线性化, 它是一个常值映射与一个线性变换的和. 例子 19.2.2 说明偏导数存在还不足以保证有限增量公式成立.

在一元微分学中, Lagrange 中值定理给出了一元函数的差 (即增量) 的大范围估计. 对于定义在凸区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的 n 元可微函数 $f(\boldsymbol{x})$, 也有类似的**微分中值定理**, 即当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in D$ 时, $\exists \theta \in (0,1)$, 使

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

其中 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, "·" 表示内积. 事实上我们可以证明:

例题 19.4.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集 G 到 $\mathbf{R}^m$ 的可微映射 (向量值函数), $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in G$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, 证明: 若线段 $\overline{\boldsymbol{xy}} \in G$, 则 $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$, $\exists \boldsymbol{z} \in \overline{\boldsymbol{xy}}$, 使得

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{a} \cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}). \tag{19.18}$$

解 定义一元函数

$$f(\lambda) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})),$$

则 $f(1) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$, $f(0) = 0$, 由一元函数的中值定理得

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = f(1) - f(0) = f'(\xi) = \boldsymbol{a} \cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + \xi(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),$$

其中 $0 < \xi < 1$. 令 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \xi(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$, 则 $\boldsymbol{z} \in \overline{\boldsymbol{xy}}$, (19.18) 得证. □

但不含内积的向量值函数的中值定理是不成立的, 下面是一个反例.

例题 19.4.2 设 $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 1]$, 则 $J\boldsymbol{f}(t) = (-\sin t, \cos t)$. 注意到 $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{f}(2\pi)$, 故不存在 $\theta \in (0, 1)$, 使 $\boldsymbol{f}(2\pi) - \boldsymbol{f}(0) = J\boldsymbol{f}(\theta \cdot 2\pi)(2\pi - 0)$. 事实上, $J\boldsymbol{f}(t)$ 恒不为零向量.

不过我们仍然有如下的向量值函数的差的全局估计.

命题 19.4.2 (拟微分平均值定理) 设凸区域 $D \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可微, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in D$, 则 $\exists \theta \in (0, 1)$, 使

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| \leqslant \|J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))\| \cdot |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|,$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模, 即若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 则 $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} |a_{ij}|$.

证 第一步. 先对 $n = 1$ 的情况证明, 即 a, b 为数. 设

$$\varphi(t) = \boldsymbol{f}(t) \cdot (\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)), \quad t \in [a, b].$$

由一元函数的微分中值定理得到

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(a + \theta(b - a))(b - a) = J\boldsymbol{f}(a + \theta(b - a)) \cdot (\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a))(b - a).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)|^2 &= |J\boldsymbol{f}(a + \theta(b - a)) \cdot (\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a))| \cdot |b - a| \\ &\leqslant \|J\boldsymbol{f}(a + \theta(b - a))\| \cdot |\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)| \cdot |b - a|. \end{aligned}$$

所以得到

$$|\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)| \leqslant \|J\boldsymbol{f}(a + \theta(b - a))\| \cdot |b - a|.$$

第二步. 对于 $n > 1$ 的情况. 设 $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{f}((1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})$, $t \in [0, 1]$, 则 $\boldsymbol{g}(t)$ 为定义在 $[0, 1]$ 上的向量值函数, $\boldsymbol{g}(0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{g}(1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$. 利用复合函数求导及第一步的讨论可得到所需的不等式. □

例题 19.4.3 设 $\boldsymbol{f}$ 是凸域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的可微映射, 并且全导数 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 处处为 $\mathbf{0}$ (取值为零向量的零变换), 则 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的常值映射.

证 取定 $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 任取另一点 $\boldsymbol{x} \in D$, 则由拟微分平均值定理有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \|\mathbf{0}\| \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = 0.$$

由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\ \forall \boldsymbol{x} \in D$, 所以 $\boldsymbol{f}$ 是常值映射. □

注 可以把凸域 D 的结论推广到一般的开区域 D. 证明留给读者.

在第二十一章, 我们还将介绍一些向量值函数中值定理的几何形式.

19.4.2 练习题

1. 设 $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 且存在矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内有
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$
其中 $o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 表示当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \to 0$ 时, 模为高阶无穷小量的向量. 证明 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}$.
2. 设 $\boldsymbol{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ 是可微的向量值函数, 满足条件 $|\boldsymbol{f}(t)| = 1\ \forall t \in \mathbf{R}$. 证明 $\boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{f}(t) = 0$, 并对这个结果进行几何上的解释.
3. 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在区域 $\mathbf{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且存在 $C > 0$, 对任意的 $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2\ (i = 1,2)$ 均成立
$$(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \geqslant C[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2],$$
其中 $u_i = u(x_i, y_i),\ v_i = v(x_i, y_i)\ (i = 1,2)$. 则 $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$ 有
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0.$$

§19.5 对于教学的建议

19.5.1 学习要点

1. 在多元函数中, 让一个自变量变化, 其他自变量固定, 就成为一元函数. 这个一元函数的导数就是原来函数的偏导数. 偏导数反映了函数在某个坐标轴方向的变化率, 并不完全反映函数在一点附近的全面变化. 反映函数在一点附近的全面变化的量是全微分, 它是函数在一点附近的线性逼近和线性主部. 有些教科书是先引入全微分的概念, 如 [25]. 这就是沿着线性逼近或线性主部的线索来展开. 我们先讨论偏导数, 从计算上讲更具体些.
2. 在一元函数中, 可导等价于可微 (参见上册 177 页 6.3.1 小节), 很多学生对两者不予区分. 故这一章在概念上的重点是微分, 要求学生能从可微的定

义出发去证明一个函数在一点可微或不可微. 同时能清楚多元函数连续与偏导数存在, 偏导数连续与可微之间的关系, 并能举出反例.

3. 复合函数求导的链式法则是计算训练的重点, 初学者最容易犯的错误是漏项. 批改作业时要注意学生的计算过程.

4. **对习题课的建议** 在强调多元函数连续性, 可微性的条件时, 也要注意另一种倾向, 即学生太小心以至不敢用一元函数的有关定理. 例如学生们往往不能确定如下结论:

(1) 若 $f_x(x_0,y_0)$ 存在, 就能保证一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 点连续;

(2) 若 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有界, 则 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的邻域内连续.

又如, 他们在证明命题 19.1.1 时, 知道要将 Δf 写成如下形式:

$$\Delta f=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],$$

但再往下有些同学不敢应用一元函数的微分中值定理, 因为他们知道微分中值定理要求函数在闭区间上连续, 在开区间上可导. 但现在是要证明函数的连续性, 怎么可以应用中值定理呢? 事实上, 他们混淆了一元函数和多元函数的连续性.

有些同学错误地认为偏导数连续是可微的必要条件, 因此应该告诉他们一个反例, 例如练习题 19.2.4 的题 2 就是一个反例. 思考题 19.2.3 的题 4 表明两个偏导数中只需要一个连续, 便可证出可微性. 因此如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不可微, 则任何一个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 不可能在 (x_0,y_0) 点连续.

对于多元函数连续、偏导数存在、偏导数连续和可微之间的关系, 最好组织学生自己进行小结.

要引导学生选择简捷的方法进行计算, 以达到快速准确的目的. 下面是一个很好的例子.

例题 19.5.1 设 $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$, 求 $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$, 其中 $p+q+r=k$.

解 由于

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(x\mathrm{e}^x)\frac{\partial^q}{\partial y^q}(y\mathrm{e}^y)\frac{\partial^r}{\partial z^r}(z\mathrm{e}^z),$$

而

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(x\mathrm{e}^x)=(p+x)\mathrm{e}^x,$$

从而

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(p+x)(q+y)(r+z)\mathrm{e}^{x+y+z}.\quad\square$$

建议将例题 19.2.3 或类似的题布置为学生的课外题, 该类题可引导学生自己去推导出必要条件, 而不是在某种预先给定的条件下去证明结论.

19.5.2 参考题

1. 设 $u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$, 证明当 $t>0$ 时 $\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant Ct^{-3/2}e^{-\lambda\frac{x^2}{t}}$, 其中 C 为正常数, λ 为不超过 $\dfrac{1}{4}$ 的正常数.

2. 设 $\Gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1/2}$, 证明
$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1},$$
$$\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y\partial z}\right|\leqslant\frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2},$$
$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right|\leqslant C\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-2},$$
其中 C 为正常数.

3. 设 $u(x,y)$ 有二阶偏导数, 无零点. 证明 u 满足方程
$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$
的充要条件是 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

4. 证明关于 n 次齐次函数的命题 19.3.1–19.3.4.

5. 设 $u=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, 证明:

 (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$;

 (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{n(n-1)}{2}u$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵, $f(\boldsymbol{y})$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的二次可微函数, $F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$. 证明: 当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 时有

 (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$;

 (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

7. 求下列变换的 Jacobi 行列式:

 (1) $x_1=r\cos\theta, x_2=r\sin\theta$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}$;

(2) $x_1=r\cos\theta_1, x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2, x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2)}$;

(3) $$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1, \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{m-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1}, \\ x_m=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1}, \end{cases}$$

这里 $r\geqslant 0, 0\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_{m-2}\leqslant\pi, 0\leqslant\theta_{m-1}\leqslant 2\pi$, 试用数学归纳法求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m-1})}$.

8. 函数值计算的相对误差估计:

(1) 利用可微函数定义与近似等式 $\Delta f(x;h)\approx \mathrm{d}f(x)h$, 证明: 设 $f(x)=x_1\cdot\cdots\cdot x_m$ 是 m 个不为零的因子的乘积, 若 δ_i 是第 i 个因子的相对误差, 则它们乘积的相对误差为 $\delta=\delta(f(x);h)\approx\sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i$;

(2) 利用等式 $\mathrm{d}\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)$, 再次得到上题结果并证明: 一般的分式 $\dfrac{f_1\cdots f_n}{g_1\cdots g_n}(x_1,\cdots,x_m)$ 的相对误差是函数 $f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_n$ 的值的相对误差的和.

9. 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可微函数, 满足:

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t), \\ \cdots\cdots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

其中 $a_{ij}\geqslant 0, i,j=1,\cdots,n$. 假如对任何 i, 当 $t\to+\infty$ 时, $x_i(t)\to 0$. 问函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ 必定是线性相关的吗 (这里函数线性相关的定义见上一章的第一组参考题 4)?

10. 设 $\boldsymbol{f}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 C^2 映射. $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 Jacobi 矩阵, 它的元素为 $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 在 Jacobi 行列式 $\det(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 中对应的代数余子式为 $A_{i,j}(\boldsymbol{x})$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 证明如下的 Hadamard 恒等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

本章在 §20.1 节讨论一个方程所确定的隐函数. 在 §20.2 节讨论方程组所确定的隐函数组, 并用压缩映射原理证明了反函数组存在定理. 在 §20.3 节讨论微分式的变量替换. 在 §20.4 节讨论隐函数 (组) 的整体存在性, 这可以作为习题课的补充材料. 最后一节是学习要点和参考题.

§20.1 一个方程的情形

20.1.1 隐函数存在定理

命题 20.1.1 (隐函数存在定理) 设二元函数 $F(x,y)$ 满足下列条件:

(1) 在矩形区域 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$ 内有关于 x, y 的连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则有:

(1) 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y)=0$ 可以确定惟一的函数 $y=f(x)$, 也就是说, 存在 $\eta>0$, 当 $x\in O_\eta(x_0)$ 时有
$$F(x,f(x))=0, \quad \text{并且} \ y_0=f(x_0);$$

(2) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内连续;

(3) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内有连续的导数
$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{20.1}$$

称 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

注 1 视 $F(x,y)=0$ 为方程, 我们知道一个方程只能解出一个未知量, 若我们视 x 为已知, y 为未知, 隐函数存在定理就是告诉我们在什么条件下可解出 $y=f(x)$. 但一般教科书上定理的证明是非构造性的, 只是证明了存在性, 并没有说明如何由 $F(x,y)$ 的表达式去得到 $f(x)$ 的表达式. 事实上, 即使 $F(x,y)$ 的表达式很简单, 也未必能将隐函数从 $F(x,y)=0$ 中具体解出来. 如天体力学中著名的 Kepler 方程 (见上册 80, 146, 172 页):
$$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0, \quad 0<\varepsilon<1.$$
$F(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点附近满足定理所述条件, 从而隐函数 $y=f(x)$ (Kepler 函数) 存在、连续、可导, 且按 (20.1) 可求出隐函数 $y=f(x)$ 的导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}. \tag{20.2}$$

然而 $F(x,y)=0$ 的隐函数不能解成初等函数.

注意在公式 (20.1) 的右端的表达式中, 隐函数的导数同时含有 x 与 y. 这一点与显函数的导数是不相同的[①], 它应该理解为 $f'(x)=-\left.\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right|_{y=f(x)}$. 但这并不妨碍我们研究隐函数的性质. 如根据 (20.2) 可知 Kepler 函数是单调增加的. 由 y 的可导性还可推知 y'' 的存在性等. 一般地若 $F(x,y)$ 二阶连续可微, 且满足隐函数存在定理的条件, 则对 (20.1) 两边对 x 求导得

$$y''(x)=-\frac{1}{F_y^2}[(F_{xx}+F_{xy}y')F_y-(F_{xy}+F_{yy}y')F_x].$$

将 (20.1) 代入得

$$y''(x)=\frac{1}{F_y^3}(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}).$$

注 2 定理的结论是局部的, 即在 (x_0,y_0) 的某个邻域内由方程 $F(x,y)=0$ 可以惟一确定一个可微的满足 $y_0=f(x_0)$ 的隐函数 $y=f(x)$, 但定理并没有告诉我们这个邻域有多大.

注 3 对于方程 $F(x_1,\cdots,x_n,u)=0$ 在某点 $(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},u_0)$ 附近确定一个 n 元的隐函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 也有类似的结果.

注 4 从一般教科书上给出的隐函数定理的证明中可以看出, 如果只要求隐函数连续, 则命题 20.1.1 的条件可减弱. 对此, 我们有下面的结论.

命题 20.1.2 如果

(1) $F(x,y)$ 在矩形 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|<a,|y-y_0|<b\}$ 内连续,

(2) $F(x_0,y_0)=0$,

(3) $F(x,y)$ 对每一个 $x\in(x_0-a,x_0+a)$ 关于 y 严格单调;

则有:

(1) 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y)=0$ 可以确定惟一的函数 $y=f(x)$, 也就是说, 存在 $\eta>0$, 当 $x\in O_\eta(x_0)$ 时有

$$F(x,f(x))=0, \quad 并且\ y_0=f(x_0);$$

(2) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内连续.

例题 20.1.1 证明在点 (1,1) 的某一邻域内存在惟一的连续可微函数 $y=f(x)$, 满足 $f(1)=1$, $xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)-1=0$, 并求 $f'(x)$.

证 令 $F(x,y)=xy+2\ln x+3\ln y-1$, 则

(1) $F(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 点的邻域内有关于 x,y 的连续偏导数;

(2) $F(1,1)=0$; (3) $F_y(1,1)=(x+\frac{3}{y})\big|_{(x,y)=(1,1)}\neq 0$.

---

① 参看第六章 6.2.2 小节的 "隐函数求导法".

由隐函数存在定理, 在 $(1,1)$ 的某邻域内存在惟一的连续可微函数 $y=f(x)$, 满足 $f(1)=1, xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)-1=0$ 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{y+\dfrac{2}{x}}{x+\dfrac{3}{y}}=-\frac{xy^2+2y}{x^2y+3x}.\quad \square$$

例题 20.1.2 设 (x_0,y_0,u_0) 满足 $u_0=y_0+x_0\varphi(u_0)$, 根据隐函数存在定理给函数 φ 加上适当条件, 使方程 $u=y+x\varphi(u)$ 可在 (x_0,y_0) 的某一个邻域内惟一确定一个连续可微函数 $u=f(x,y)$.

解　令 $F(x,y,u)=u-y-x\varphi(u)$, 则 $F(x_0,y_0,u_0)=0$. 由复合函数的性质知, 当 $\varphi(u)$ 连续可微时, $F(x,y,u)$ 连续, 有关于 x,y,u 的连续偏导数, 且

$$F_u=1-x\varphi'(u).$$

从而当 $\varphi(u)$ 连续可微且

$$x_0\varphi'(u_0)\neq 1$$

时, 方程 $u=y+x\varphi(u)$ 可在 (x_0,y_0) 的某一邻域内惟一确定一个连续可微函数 $u=f(x,y)$. $\square$

20.1.2　隐函数求导

若已知由方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定连续可微的隐函数 $y=f(x)$, 或由方程 $F(x,y,z)=0$ 可惟一确定连续可微隐函数 $z=f(x,y)$, 则在求导时既可直接应用公式, 也可用复合函数求导法则解出欲求之导数. 一般在隐函数求导中, 总认为连续可微的隐函数已存在, 故若无特殊声明, 不必再验证条件.

例题 20.1.3 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数, 试求 z_x, z_y 及 z_{xy}.

解　先求 z_x. 在 $F(x-y,y-z)=0$ 两边对 x 求导, 得

$$F_1-z_xF_2=0, \tag{20.3}$$

于是得 $z_x=\dfrac{F_1}{F_2}$.

求 z_y. 可用公式

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-F_1+F_2}{-F_2}=\frac{F_2-F_1}{F_2}.$$

求 z_{xy}. 在 (20.3) 两边对 y 求导, 得

$$-F_{11}+F_{12}(1-z_y)-\{[-F_{21}+F_{22}(1-z_y)]z_x+F_2z_{xy}\}=0. \tag{20.4}$$

将 z_x, z_y 的表达式代入 (20.4), 得到

$$-F_{11}+F_{12}\frac{F_1}{F_2}-[(-F_{21}+F_{22}\frac{F_1}{F_2})\frac{F_1}{F_2}+F_2z_{xy}]=0.$$

解出 z_{xy} 得

$$z_{xy}=\frac{1}{F_2^3}(2F_1F_2F_{12}-F_2^2F_{11}-F_1^2F_{22}).$$

也可先在 $F-1-F_2+F_2z_y=0$ 两边对 x 求导, 然后解出 z_{xy}. □

注意隐函数求导时, 涉及一系列的复合的隐函数. 必须明辨函数关系, 弄清哪些是自变量, 哪些是因变量, 以免漏项.

20.1.3 思考题

1. 证明方程 $F(x,y)=(x-y)^2=0$ 在 $(0,0)$ 处有 $F_y(0,0)=0$, 但在 $x=0$ 附近仍存在惟一解 $y=x$ 且是连续可微的. 这与隐函数存在定理的结论是否矛盾?
2. 设有方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$, 证明:
   (1) 可确定 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $z=z(x,y)$, 并求 $z_x(1,1)$;
   (2) 可确定 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $y=y(x,z)$, 并求 $y_x(1,1)$.

20.1.4 练习题

1. 设 $y=y(x)$ 由下述方程确定, 求 y', y'':
   (1) $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$;
   (2) $x^y=y^x$;
   (3) $xy-2^x\ln 2+2^y=0$.
2. 求在指定点的导数:
   (1) $y^3+y-x^2=0$, 求 $y'(0)$;
   (2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-4=0$, 求 $(1,3\sqrt{3})$ 处的导数 y';
   (3) $\sin x+2\cos y-1=0$, 求在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 处的 y', y''.
3. 设 $z=z(x,y)$ 是由下列方程确定的隐函数, 求指定的导数或微分:
   (1) $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
   (2) $x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$, 求在 $(1,1,2)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;
   (3) $z=\sqrt{x^2-y^2}\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;
   (4) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\mathrm{d}z$;
   (5) $xy+yz+zx=1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. 设 $z=z(x,y)$ 由下列方程确定, 求指定的导数或微分:

(1) $f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$, 求 $\mathrm{d}z$;

(2) $f(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $f(x+y, y+z, z+x)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 验证下列各题中给出的隐函数满足指定的方程:

(1) $xz_x-yz_y=2x$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(xy, z-2x)=0$ 确定的隐函数;

(2) $(x^2-y^2-z^2)z_x+2xyz_y=2xz$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$ 确定的隐函数;

(3) $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\varphi(\dfrac{y}{z})$ 确定的隐函数, φ 二次连续可微, 且 $x-y\varphi'(\dfrac{y}{z})\neq 0$;

(4) $u_x^2+u_y^2+u_z^2=2(xu_x+yu_y+zu_z)$, 其中 $u=u(x,y,z)$ 是由方程

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$$

确定的隐函数.

§20.2　隐函数组

20.2.1　存在定理

不失一般性, 下面仅研究两个方程和四个变量的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在什么条件下可以确定 u, v 是 x, y 的函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

并且 u, v 关于 x, y 有连续偏导数. 我们有如下的隐函数组存在定理.

命题 20.2.1 (隐函数组存在定理) 设

(1) $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一个邻域内对各个变元有连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) $J(\boldsymbol{p}_0)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{\boldsymbol{p}_0}=\begin{vmatrix} F_u(\boldsymbol{p}_0) & F_v(\boldsymbol{p}_0) \\ G_u(\boldsymbol{p}_0) & G_v(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}\neq 0$, 其中 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 称为 **Jacobi 行列式**,

则存在 p_0 点的一个邻域, 在此邻域内由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

可以惟一确定一对函数

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y),$$

使满足 $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$ 及 $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$, 且 u,v 具有关于 x,y 的连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)},$$

其中 $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

命题 20.2.2 (反函数组存在定理) 若

$$u=f(x,y), \quad v=g(x,y)$$

在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中连续可微, $u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,y_0)$, 且

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0,$$

则在 (u_0,v_0) 的某一邻域内存在惟一的反函数组

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v)$$

满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且成立

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

例题 20.2.1 给定函数 $u=\mathrm{e}^y\sin x$, $v=\mathrm{e}^y\cos x$, $w=2-\cos z$, 根据反函数组存在定理判断在哪些点 (x,y,z) 所对应的 (u,v,w) 的邻域内存在反函数 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$?

解 函数 $\mathrm{e}^y\sin x$, $\mathrm{e}^y\cos x$, $2-\cos z$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中连续可微, 且

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^y\cos x & \mathrm{e}^y\sin x & 0 \\ -\mathrm{e}^y\sin x & \mathrm{e}^y\cos x & 0 \\ 0 & 0 & \sin z \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2y}\sin z.$$

所以在 $D=\{(x,y,z) \mid z\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 内任一点所对应的 (u,v,w)处, 存在一个邻域, 在此邻域内存在反函数. □

20.2.2 思考题

1. 若由 $F(x,y,z,u)=0$, $G(x,y,z,u)=0$, $H(x,y,z,u)=0$ 可解出 $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$, 根据隐函数组存在定理应如何对函数 F,G,H 假设条件?

2. 对极坐标变换

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

在哪些点 (r_0, θ_0) 附近可存在反函数组 $r = r(x,y), \theta = \theta(x,y)$? 在 $(0, \theta_0)$ 附近能否存在反函数组? 对结论做出直观解释.

20.2.3 求已知函数组所确定的隐函数组的导数

在这类问题中, 一般认为隐函数组, 反函数组存在且可微的条件均已满足, 因而注重于运算的正确与熟练. 此外, 在计算导数时, 一般不用求导公式, 因为这些公式既不便于记忆, 也不便于使用. 往往是对已知函数组求导数, 然后解所得的方程组便可得到所要的导数.

例题 20.2.2 设 $u(x,y)$ 是由方程组 $u = f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t) = 0$, $h(z,t) = 0$ 确定的函数, 其中 f, g, h 均连续可微, 且 $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 1 首先应该认清函数关系, 因为 $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$, 故由

$$g(y,z,t) = 0, \quad h(z,t) = 0 \tag{20.5}$$

可确定 z, t 为 y 的函数, 所以 $u = f(x, y, z(y), t(y))$, 即 u 是以 z, t 为中间变量的 x, y 的函数, 有了这个认识就可以具体地作求导运算.

由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 z'(y) + f_4 t'(y), \tag{20.6}$$

为求 $z'(y)$ 和 $t'(y)$, 在方程组 (20.5) 两边对 y 求导, 得

$$g_y + g_z z' + g_t t' = 0,$$

$$h_z z' + h_t t' = 0.$$

由此得到

$$z' = -g_y h_t \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}, \quad t' = g_y h_z \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1},$$

代入 (20.6) 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y - g_y (f_z h_t - f_t h_z) \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}. \quad \square \tag{20.7}$$

解 2 也可以直接考虑如下的方程组

$$F(x,y,z,t;u) = 0, \tag{20.8}$$

$$g(y,z,t) = 0, \tag{20.9}$$

$$h(z,t) = 0, \tag{20.10}$$

其中 $F(x,y,z,t,u)=u-f(x,y,z,t)$. 由于

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)}=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0,$$

从而我们可视 x,y 为自变量, u,z,t 为 x,y 的函数, 在 (20.8)–(20.10) 两边对 y 求导数, 则

$$u_y-f_y-f_z z_y-f_t t_y=0,$$

$$g_y+g_z z_y+g_t t_y=0,$$

$$h_z z_y+h_t t_y=0.$$

解此方程组可得 (20.7). □

例题 20.2.3 设 $x=\cos\varphi\cos\psi,\ y=\cos\varphi\sin\psi,\ z=\sin\varphi$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 1 由所给方程组的前两个方程可确定 $\varphi=\varphi(x,y),\psi=\psi(x,y)$, 故 $z=\sin\varphi(x,y)$, 即 z 是以 φ 为中间变量的 x,y 的函数, 所以

$$z_x=\cos\varphi\cdot\varphi_x. \tag{20.11}$$

在前两个方程两边对 x 求导, 得

$$1=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi+\cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x,$$

$$0=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cdot\psi_x.$$

解出

$$\varphi_x=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},\quad \psi_x=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \tag{20.12}$$

代入 (20.11) 得

$$z_x=-\cot\varphi\cos\psi.$$

在上式两边再对 x 求导得

$$z_{xx}=\csc^2\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi+\cot\varphi\sin\psi\cdot\psi_x.$$

将 (20.12) 代入, 得到

$$z_{xx}=\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}.\quad □$$

解 2 由已知条件得 $x^2+y^2+z^2=1$, 两边对 x 求两次导数, 注意到 y 与 x 是各自独立的变量, 得

$$x+zz_x=0,\qquad 1+z_x^2+zz_{xx}=0,$$

于是

$$z_x=-\frac{x}{z},$$

$$z_{xx}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}=\frac{y^2-1}{z^3}=\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}.\quad □$$

例题 20.2.4 设 $u=f(x-ut,y-ut,z-ut)$, $g(x,y,z)=0$, 试求 u_x,u_y. 这时 t 是自变量还是因变量?

解 由两个方程确定两个隐函数. 一个是 u, 另一个由第二个方程看出应为 z. 因此 t 是自变量. 两个方程分别关于 x 求导得

$$u_x = f_1(1-u_xt)+f_2(-u_xt)+f_3(z_x-u_xt),$$

$$g_1+g_3z_x=0.$$

解此方程组得

$$u_x=\frac{f_1+f_3\cdot(-\frac{g_1}{g_3})}{1+(f_1+f_2+f_3)t}.$$

同理

$$u_y=\frac{f_2+f_3\cdot(-\frac{g_2}{g_3})}{1+(f_1+f_2+f_3)t}.\quad\square$$

20.2.4 存在定理的证明

本节我们应用压缩映射原理证明反函数组存在定理, 把隐函数组存在定理的证明作为参考题. 由于定理的叙述与证明较抽象, 故这部分内容可作为补充材料. 我们先用映射的语言叙述反函数组存在定理, 或称为**局部逆映射存在定理**.

命题 20.2.3 (局部逆映射存在定理) 设 $\boldsymbol{f}:\ E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $\boldsymbol{a}\in E$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 可逆. 则

(1) 存在开集 $U\subset E$ 和 V, 使得 $\boldsymbol{a}\in U$, $\boldsymbol{b}\in V$, 并且 $\boldsymbol{f}:\ U\to V$ 是 1-1 满映射;

(2) 设 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}^{-1}:\ V\to U$, 则 $\boldsymbol{g}$ 是 C^1 映射, 并且

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1},\quad \boldsymbol{y}\in V.$$

证 (1) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, 取 $\lambda>0$, 使得 $2\lambda\|\boldsymbol{A}^{-1}\|=1$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模 (如 $\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$). 因为 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\boldsymbol{a}$ 连续, 故可取以 $\boldsymbol{a}$ 为中心的开球 U, 使得

$$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\lambda,\quad \boldsymbol{x}\in U. \tag{20.13}$$

对 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),\ \boldsymbol{x}\in U. \tag{20.14}$$

则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 φ 的不动点. 再记 $V=\boldsymbol{f}(U)$, 下面证明由 (20.14) 定义的映射有惟一不动点 $\boldsymbol{x}$, 即存在惟一的 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. 这就证明了 $\boldsymbol{f}$ 是 U 到 V 的 1-1 可逆映射. 为此, 先对 φ 作估计, 其 Jacobi 矩阵为

$$\varphi'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})).$$

由 (20.13) 及 Schwarz 不等式得 $\|\varphi'(\boldsymbol{x})\|<\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{x}\in U$. 再由拟微分中值定理得

$$|\varphi(\boldsymbol{x}_1)-\varphi(\boldsymbol{x}_2)|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|,\quad \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in U. \tag{20.15}$$

因此 φ 是一个压缩映射. 其次, 注意到 $\forall\boldsymbol{y}_0\in V$, 存在 $\boldsymbol{x}_0\in U$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$. 取 r 足够小, 使以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心 r 为半径的开球 B 的闭包 $\overline{B}\subset U$. 限制 $\boldsymbol{y}$ 满足 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\lambda r$, 此时对于 $\overline{B}$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 有

$$|\varphi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0|\leqslant|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)|+|\varphi(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|+|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)|$$
$$\leqslant\frac{r}{2}+\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\lambda r\leqslant r,$$

因此 $\varphi(\boldsymbol{x})\in\overline{B}$, 从而 φ 是 $\overline{B}$ 上的压缩映射. 故存在惟一的 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}$, 使 $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$. 也即只要 $\boldsymbol{y}$ 满足 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\lambda r$, 就存在惟一的 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(\overline{B})\subset\boldsymbol{f}(U)=V$. 这一方面证明了以 $\boldsymbol{y}_0$ 为中心 λr 为半径的开球位于 V 中, 故 V 是开集. 另一方面也证明了 $\boldsymbol{f}$ 是 U 到 $V=\boldsymbol{f}(U)$ 的 1–1 可逆映射.

(2) 因为 $\boldsymbol{f}$ 是 C^1 映射, 故 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数. $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 可逆, 即 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\neq0$, 故不妨认为在 (1) 中给出的邻域 U 内, 都有 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq0$. 即 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 可逆. 记其逆为 $\boldsymbol{T}$. 设 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的逆, 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$. 取 $\boldsymbol{y}\in V$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}\in V$. 于是 $\exists\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$, 使 $\boldsymbol{x}\in U$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in U$ 及 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$. 用 (20.14) 中的估计有

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}))=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k},$$

由 (20.15) 得 $|\boldsymbol{h}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k}|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{h}|$, 即 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k}|\geqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{h}|$, 从而

$$|\boldsymbol{k}|\geqslant\lambda|\boldsymbol{h}|.\tag{20.16}$$

于是

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}).$$

所以

$$\frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{k}|}\leqslant\frac{\|\boldsymbol{T}\|\cdot|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}|}{\lambda|\boldsymbol{h}|},$$

且当 $|\boldsymbol{k}|\to0$, 由 (20.16) 也有 $|\boldsymbol{h}|\to0$, 上式右边的极限为 0. 这就证明了 $\boldsymbol{g}$ 是可微映射, 且 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1}$. 关于 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ 为连续的证明留给读者. □

注 设 $\boldsymbol{f}: E\subset\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in E$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})$ 可逆, 其中 “$'$” 表示固定 $\boldsymbol{a}$ 而把 $\boldsymbol{y}$ 看成自变量而得到的全导数. 这时方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 在 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的邻域内存在惟一 C^1 隐映射 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 的局部隐映射存在定理可通过定义 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$ 而转化为 $\boldsymbol{F}$ 的局部逆映射存在定理. 其证明作为参考题.

20.2.5 练习题

1. 设 $x=\mathrm{e}^v+u^3$, $y=\mathrm{e}^u-v^3$, 求反函数组的一阶偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2. 对由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

确定的函数 $x=x(z)$, $y=y(z)$, 求在点 $(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2},0)$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

3. 对方程组

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

确定的隐函数组 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 求出导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 设

$$\begin{cases} x=u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y=\sin\dfrac{v}{u}, \end{cases}$$

求反函数组的偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y.

5. 设 $u=u(x)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$ 所确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 求由方程组 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ 确定的 $z=z(x,y)$ 的所有二阶偏导数.

7. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程组 $x=\mathrm{e}^{u+v}$, $y=\mathrm{e}^{u-v}$, $z=uv$ 所定义的函数, 求当 $(u,v)=(0,0)$ 时的 $\mathrm{d}z$, d^2z.

8. 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$, $y=\sin x$, 且已知 f 与 g 都有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

§20.3 变量代换问题

今后, 例如在偏微分方程的求解过程中, 经常需要对自变量或函数作变量代换, 以求简化方程形式乃至求出方程的解. 变量代换计算的关键是隐函数组或反函数组的求导.

20.3.1 仅变换自变量的情形

例题 20.3.1 在方程 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$ 中作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 试求方程在变换后的形式.

解 1 认为 $u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 则

$$u_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,$$

$$u_\theta=r(-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta).$$

解此方程组得

$$u_x=\frac{1}{r}(r\cos\theta u_r-\sin\theta u_\theta),$$

$$u_y=\frac{1}{r}(r\sin\theta u_r+\cos\theta u_\theta).$$

代入原方程中得

$$u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2=u. \quad \square$$

解 2 认为 $u(r,\theta)=u(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x})$, 则

$$u_x=u_r\frac{x}{r}-u_\theta\frac{y}{r^2},$$

$$u_y=u_r\frac{y}{r}+u_\theta\frac{x}{r^2}.$$

于是 $u_x^2+u_y^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2$, 从而方程化为

$$u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2=u. \quad \square$$

注 上述两种方法是自变量变换中通常使用的方法, 具体用哪一种方法使运算简单, 视具体情况而定.

例题 20.3.2 通过代换 $x=uv,\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$, 变换方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 由链式法则

$$z_u=vz_x+uz_y, \quad z_v=uz_x-vz_y.$$

两式平方后相加得

$$z_u^2+z_v^2=(u^2+v^2)(z_x^2+z_y^2).$$

于是

$$z_x^2+z_y^2=\frac{1}{u^2+v^2}(z_u^2+z_v^2).$$

另一方面

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2,$$

代入原方程得

$$z_u^2+z_v^2=2. \quad \square$$

20.3.2 自变量与函数同时变换的情形

这种情况比只变自变量的情况稍复杂些, 它要多一个函数关系分析的步骤.

例题 20.3.3 通过代换 $x=t,\ y=\frac{t}{1+tu},\ z=\frac{t}{1+tv}$, 试把方程

$$x^2z_x+y^2z_y=z^2 \tag{20.17}$$

变为以 v 为函数, t,u 为自变量的形式.

分析 题目的意思是有一个函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 (20.17), 作自变量代换

$$x=t, \quad y=\frac{t}{1+tu} \tag{20.18}$$

以及函数代换

$$z=\frac{t}{1+tv}\tag{20.19}$$

得函数 $v=v(t,u)$. 求 $v=v(t,u)$ 满足的方程.

解 1 直接从关系式 (20.19) 出发求 z_x 和 z_y:

$$z_x=(\frac{t}{1+tv})_t t_x+(\frac{t}{1+tv})_v(v_t t_x+v_u u_x),\tag{20.20}$$

$$z_y=(\frac{t}{1+tv})_t t_y+(\frac{t}{1+tv})_v(v_t t_y+v_u u_y).\tag{20.21}$$

由 (20.18) 得

$$t=x,\quad u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}.$$

于是

$$t_x=1,\qquad t_y=0,$$
$$u_x=\frac{1}{x^2},\quad u_y=-\frac{1}{y^2}.$$

将它们代入 (20.20), (20.21), 得到

$$z_x=(\frac{t}{1+tv})_t+(\frac{t}{1+tv})_v(v_t+\frac{1}{x^2}v_u),$$
$$z_y=-(\frac{t}{1+tv})_v\frac{1}{y^2}v_u.$$

将以上式子代入 (20.17), 得到

$$x^2[(\frac{t}{1+tv})_t+(\frac{t}{1+tv})_v v_t]=z^2.$$

整理得

$$v_t=0.\quad\square$$

解 2 从 (20.19) 中解出 v 得

$$v=\frac{1}{z}-\frac{1}{t},$$

于是

$$v_t=-\frac{1}{z^2}(z_x x_t+z_y y_t)+\frac{1}{t^2},\tag{20.22}$$

$$v_u=-\frac{1}{z^2}(z_x x_u+z_y y_u).\tag{20.23}$$

由 (20.18) 得

$$x_t=1,\quad x_u=0,$$
$$y_t=\frac{1}{(1+tu)^2},\quad y_u=-\frac{t^2}{(1+tu)^2}.$$

将它们代入 (20.22), (20.23) 得

$$v_t=-\frac{1}{z^2}[z_x+\frac{1}{(1+tu)^2}z_y]+\frac{1}{t^2},$$
$$v_u=\frac{1}{z^2}\frac{t^2}{(1+tu)^2}z_y.$$

由此解出 z_x, z_y, 得

$$z_x = z^2(\frac{1}{t^2} - v_t) - \frac{z^2}{t^2}v_u,$$

$$z_y = \frac{z^2(1+tu)^2}{t^2}v_u.$$

将它们代入原方程, 得

$$v_t = 0. \quad \square$$

20.3.3 练习题

1. 把方程 $(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变为 x 作因变量, y, z 为自变量的形式.
2. 引用新函数 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ 变换微分式
$$w = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$
3. 以 $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ 为新自变量, 变换方程 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
4. 取 $u = y + z\mathrm{e}^{-x}$, $v = x + z\mathrm{e}^{-y}$ 为新的自变量, 变换微分式
$$F = (z+\mathrm{e}^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+\mathrm{e}^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - \mathrm{e}^{x+y}).$$
5. 设 $u = x\mathrm{e}^z$, $v = y\mathrm{e}^z$, $w = z\mathrm{e}^z$, 试以 w 为新的函数, u, v 为新的自变量, 变换方程 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
6. 以 w 为新的函数, ξ, η, ζ 为新的自变量, 变换方程
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z},$$
其中 $\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}, \zeta = z, w = \frac{u}{z}$.
7. 试求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 在球坐标下的形式.
8. 以 $u = x+2y+2$, $v = x-y-1$ 为新的自变量, 变换方程
$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$
9. 以 w 为新的函数, u, v 为新的自变量, 变换方程
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (1+\frac{y}{x})\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
其中 $u = x, v = x+y, w = x+y+z$.
10. 设 $xu = x^2+y^2$, $yv = x^2+y^2$, 试证明 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{uv}{xy}$.
11. 若 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 可微, 证明
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$
12. 设 $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, 试求 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.
13. 设 $u = \frac{x}{r^2}$, $v = \frac{y}{r^2}$, $w = \frac{z}{r^2}$, 其中 $r^2 = x^2+y^2+z^2$, 试求 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

§20.4　隐函数及隐函数组的整体存在性

隐函数的整体存在性是一个比较复杂的问题. 设 $F(x,y)$ 在 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上连续, $F_y(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in D$. 于是在 D 中每一点附近方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定一个隐函数 $y=f(x)$. 但我们不知道当 y 在 (c,d) 变化时, 满足方程的 x 是否会布满 (a,b). 所以我们并不清楚隐函数 $y=f(x)$ 是否可定义在 (a,b) 上. 在很多时候 $y=f(x)$ 不能定义在 (a,b) 上. 读者可考察例子 $F(x,y)=y-2x$, $D=(-1,1)\times(-1,1)$. 下面是隐函数整体存在的一个充分性命题.

命题 20.4.1 设 $F(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid a<x<b,-\infty<y<+\infty\}$ 中连续, F_y 处处存在且 $F_y\geqslant m>0$, 则 $F(x,y)=0$ 在 (a,b) 中存在惟一连续解 $y=f(x)$.

证　$\forall x_0\in(a,b)$, 对任意 $y_2>y_1$, 考虑

$$F(x_0,y_2)-F(x_0,y_1)=F_y(x_0,\xi)(y_2-y_1)\geqslant m(y_2-y_1).$$

固定 y_1, 令 $y_2\to+\infty$, 由 $F(x_0,y_2)\geqslant F(x_0,y_1)+m(y_2-y_1)$, 知

$$\lim_{y\to+\infty}F(x_0,y)=+\infty.$$

固定 y_2, 令 $y_1\to-\infty$, 由 $F(x_0,y_1)\leqslant F(x_0,y_2)-m(y_2-y_1)$, 知

$$\lim_{y\to-\infty}F(x_0,y)=-\infty.$$

由介值定理, 存在 $y_0\in\mathbf{R}$ (且是惟一的), 使得 $F(x_0,y_0)=0$. 由 x_0 的任意性知存在 $y=f(x)$, 使得 $F(x,f(x))=0, x\in(a,b)$.

至此已证明了 $y=f(x)$ 的存在惟一性, $y=f(x)$ 的连续性的证明与隐函数存在定理中的证明相同. □

注意到以上命题中 $F_y\geqslant m>0$ 是一个很强的条件, 它保证了对每个固定的 $x\in(a,b)$, 存在惟一的 $y=f(x)$, 使得 $F(x,f(x))=0$. 在高维情况就要复杂得多.

下面只讨论映射 $\boldsymbol{F}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是否存在定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的整体逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的问题. 如果 F 与 F^{-1} 都是连续映射, 则称 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的**同胚**. 如果 F 与 F^{-1} 都是 C^k 映射 (即各个分量函数都是 k 次连续可微函数), 则称 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 $\mathbf{C}^k$ **同胚**. 反函数组定理告诉我们, 如果 $\forall x\in\mathbf{R}^n$, $\det J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\neq 0$, 则对每一个 $\boldsymbol{x}$ 都存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 U 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的邻域 V, 使 $\boldsymbol{F}$ 是 U 到 V 的同胚. 但 F 不一定是 $\mathbf{R}^n$ 上的整体同胚, 即使有类似于命题 20.4.1 的条件也不行. 例如考虑可微映射

$$u=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos(y\mathrm{e}^{-x}),\quad v=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin(y\mathrm{e}^{-x}),\tag{20.24}$$

其 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 1$. 在 $\mathbf{R}^2$ 的每一点的附近存在逆映射. 但映射 (20.24) 是周期的, 故其确定的映射不是单射, 因而其逆映射在 $\mathbf{R}^2$ 中并不是整体存在的. 这里单射是关键, 事实上我们有如下逆映射定理.

命题 20.4.2 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}:\ D\to\mathbf{R}^n$. 如果

(1) $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续可微映射;

(2) 对每一个 $\boldsymbol{x}\in D$, $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$.

则 $G=\boldsymbol{f}(D)$ 为一开集. 又如果 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射, 那么存在由 G 到 D 上的连续可微映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 满足: 对一切 $\boldsymbol{y}\in G$ 有

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\quad J\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1},\tag{20.25}$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$.

证 $\forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(D)$, $\exists\boldsymbol{x}\in D$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}$ 定义在 $\boldsymbol{x}$ 的某个邻域上, 且 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$. 由反函数组存在定理, 存在 $\boldsymbol{y}$ 的邻域 V, 使逆映射在 V 上惟一存在, 即存在惟一的 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$, 使

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\quad\forall\boldsymbol{y}\in D.$$

所以 $V\subset\boldsymbol{f}(D)$, 这就证明了 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{f}(D)$ 的内点. 由 $\boldsymbol{y}$ 的任意性就证明了 $\boldsymbol{f}(D)$ 是开集. 当 $\boldsymbol{f}$ 是 D 到 G 的 1-1 映射时, 逆映射是惟一存在的. 且整体惟一的逆映射必是局部惟一的逆映射, 再结合反函数组存在定理就证明 (20.25). □

关于整体同胚有许多漂亮的充要条件与充分条件, 下面是很经典的两个.

命题 20.4.3 (Hadamard 定理) 设 $\boldsymbol{F}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 并且 $\forall x\in\mathbf{R}^n$, 有 $\det J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\neq 0$, 即 Jacobi 矩阵 $J\boldsymbol{F}(x)$ 的逆矩阵 $J\boldsymbol{F}^{-1}(x)$ 存在, 如果还存在 $M>0$, 使得 $\|J\boldsymbol{F}^{-1}(x)\|\leqslant M$, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模 (如 $\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$). 则 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的 C^1 同胚.

命题 20.4.4 设 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 并且 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 有 $\det J\boldsymbol{F}(x)\neq 0$. 则 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的 C^1 同胚的充要条件是

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}|\boldsymbol{F}(x)|=\infty.$$

尽管这两个命题的表述在数学分析的范围内很好理解, 但它们的证明要用到进一步的数学知识. 有兴趣的读者可在以后参考 Deimling K. Nonlinear functional analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 152～153, 171 页.

我们在参考题中列举了一些可以用多元微积分的知识来讨论的命题.

§20.5 对于教学的建议

20.5.1 学习要点

1. 隐函数 (组) 的概念和存在定理的证明对于初学者来说都不容易掌握. 最基本的要求是理解隐函数 (组) 的概念, 能叙述隐函数 (组) 存在定理并了解隐函数存在定理的证明.

2. 求隐函数 (组), 反函数 (组) 的导数和用变量替换去计算微分表达式的一个重要环节是分析哪些变量是自变量, 哪些是因变量. 很多学生在解题时不重视这个环节, 这是他们不会做题或出错的真正原因.
3. **对于习题课的建议** 告诉学生求隐函数的导数以及变量替换时, 首先要搞清楚自变量、因变量与它们的相互关系. 其次是要有耐心. 在求二阶以上导数时, 极易漏项. 可从学生作业中找出共同性的问题, 进行评讲. 处理繁琐题目的耐心也是一种基本的数学素养.

对于计算, 也绝非无技巧可言. 下面的两个例题用引入简单的微分算子的方法, 对我们会有所启发.

例题 20.5.1 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微, 在微分方程

$$\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

中, 作变量代换

$$u=xy,\quad v=x-y. \tag{20.26}$$

求变换后的方程.

分析 注意到方程中的导数部分, 第一部分是 $(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})^2$, 第二部分是 $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$. 于是只要求出在变量替换 (20.26) 下 $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$ 的表达式即可.

解 利用链式求导法则得到

$$z_x=z_u u_x+z_v v_x=yz_u+z_v,$$
$$z_y=z_u u_y+z_v v_y=xz_u-z_v.$$

两式相加得

$$(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})z=(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{20.27}$$

于是我们得到在变换 (20.26) 之下有

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}=(x+y)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{20.28}$$

在 (20.27) 两边再作用算子 $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$, 并利用 (20.28), 则

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z&=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)[(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}]\\&=[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+y)]\frac{\partial z}{\partial u}+(x+y)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\\&=2\frac{\partial z}{\partial u}+(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.\end{aligned} \tag{20.29}$$

将 (20.27), (20.29) 代入原微分方程中, 则得到

$$\frac{1}{(x+y)^2}[2\frac{\partial z}{\partial u}+(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}]-\frac{1}{(x+y)^3}(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

加以整理并将 (20.26) 代入得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{v^2+4u}\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

即已将原方程化为 v 作参数的二阶线性常微分方程. □

例题 20.5.2 设方程

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中 a,b,c 都是常数, $b^2-ac=0, c\neq 0$, 作代换

$$u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y. \tag{20.30}$$

问如何选择 α,β, 能使代换后的方程有简单的形式?

解 不妨设 $c=1$, 则 $a=b^2$, 于是原方程变为

$$\left(b\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=0.$$

若 $b=0$ 则原方程已是最简形式. 以下设 $b\neq 0$, 则我们的任务是在 (20.30) 中适当选取 α,β, 使得

$$b\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}. \tag{20.31}$$

由 (20.30) 得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}.$$

明显地只要取 $\beta=-b$, $\alpha=1-b$, 则 (20.31) 成立. 此时原方程化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0. \tag{20.32}$$

事实上, 只要取 $\beta=-b$, $\alpha\neq -b$, 则 (20.32) 仍成立. □

20.5.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 附近连续可微, 且 $f_y(0,1)\neq 0, f(0,1)=0$. 证明: $f(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 附近确定一个隐函数 $t=\varphi(x)$, 并求 $\varphi'(0)$.
2. 证明: 由方程 $y=x+\frac{1}{2}\sin y$ 可在 $(-\infty,+\infty)$ 中确定隐函数 $y=y(x)$, 且 $y(x)\in C^\infty(\mathbf{R})$, 即 $y(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的无穷次可微函数.

3. 设 $x=y+\varphi(y)$, φ 满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(y)$ 在 $(-a,a)$ 中连续, 且 $|\varphi'(0)|\leqslant k<1$. 证明: 存在 $\delta>0$, 使当 $-\delta<x<\delta$ 时有惟一可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$.

4. 证明: 方程 $F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-x}+y^3\mathrm{e}^{-y}=0$ 在 $\{x>0, y\in\mathbf{R}^1\}$ 中存在惟一解 $y=y(x)$ $(x>0)$, 且 $y(x)$ 连续可微.

5. 设 $f(x,y)$ 满足: f_x 在 $\mathbf{R}^2$ 上存在, f_y 在 $\mathbf{R}^2$ 上存在且连续, 且
$$|f_x|<M|f_y|,\quad f(x_0,y_0)=0,$$
这里 M 是正常数. 证明: $f(x,y)=0$ 惟一确定一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的可微解 $y=f(x)$, 且满足 $y(x_0)=y_0$. 再问条件 $|f_x|<M|f_y|$ 是否是必要的? 若去掉 $f(x_0,y_0)=0$ 这个条件, 结论是否仍成立?

6. 设 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数. 证明:
   (1) 如果在 Ω 上有 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0$, 则对 Ω 内任一点 (x_0,y_0), 存在 (x_0,y_0) 的邻域 U 和连续可微的函数 $F(u,v)$, $(F'_u)^2+(F'_v)^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 U 上恒成立;
   (2) 若有连续可微函数 $F(u,v)$, $(F'_u)^2+(F'_v)^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 Ω 上恒成立, 则
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0,\quad (x,y)\in\Omega.$$

7. 设空间曲线 C 的方程是:
$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},\quad -1<t<1,$$
其中函数 $f(t)$, $\varphi(t)$ 在 $(-1,1)$ 内部具有二阶连续导数, 且一阶导数处处不等于 0. 设点集
$$E=\left\{(x,y,z)\ \Big|\ x=s^2+\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}s+f(t), y=2s+\varphi(t), z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},\ s,t\in(-1,1)\right\}.$$
证明: E 中与曲线 C 充分接近 (即 $|s|$ 充分小) 的一些点, 组成一张连续曲面 $z=z(x,y)$.

8. 设函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在平面开区域 G 内的两个函数, 在 G 内均有连续的一阶偏导数, 且在 G 内任意点处均有
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0.$$
又设有界闭区域 $D\subset G$. 试证在 D 中满足方程组
$$\begin{cases} f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0\end{cases}$$
的点至多有有限个.

9. 设 f 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续可微函数. 若 $f(x,y,z)=0$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}=-1$.

(1) 解释上述命题的精确含义;

(2) 对 Clapeyron 公式 $\dfrac{P\cdot V}{T}=$ 常数, 验证上述命题的正确性;

(3) 对于 n 元连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 确定的关系式 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ 是否有上述类似公式? 验证你的判断.

10. 设 $\boldsymbol{f}:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 C^1 映射. 若只存在有限多个点 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$, 使得 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)=0,\ i=1,\cdots,r$, 并且对每个正数 M, $\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^2\mid|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})|\leqslant M\}$ 是有界集, 证明 $\boldsymbol{f}$ 把 $\mathbf{R}^2$ 映满 $\mathbf{R}^2$.

11. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 C^1 映射, 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆. 证明 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 只要 $|\boldsymbol{x}|$ 充分小, 就存在 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{z}=o(|\boldsymbol{x}|)$, 使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

第二组参考题

1. 试用压缩映射原理证明如下局部微分同胚定理: 设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, $\boldsymbol{f}:U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, $\boldsymbol{x}_0\in U$, $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$, 则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $W\subset U$ 和 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 V, 使得 $\boldsymbol{f}:\ W\to V$ 是 C^k 微分同胚.

2. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 且存在 $\alpha>0$ 使 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\cdot J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}\geqslant\alpha|\boldsymbol{u}|^2,\quad\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n,$$

其中 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 的转置. 证明

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|\geqslant\alpha|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\quad\forall\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,$$

且 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的微分同胚.

3. 用映射的语言叙述隐函数组存在定理, 将它化为逆映射存在定理或直接用压缩映射原理证明.

4. 20.2.4 小节的逆映射存在性证明是构造性的, 它给出了逆映射的迭代构造格式. 设 $\boldsymbol{y}\in V$, 取合适的初始点 $\boldsymbol{x}_0\in U$, 则

$$\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_{n-1}+(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}))^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-1}))$$

就给出了迭代列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的公式. 讨论映射

$$T:u=\frac{1}{2}(x^2-y^2),\quad v=xy$$

的逆映射. 设 $\boldsymbol{a}=(1,1)^{\mathrm{T}}$. 先求

$$T'(\boldsymbol{a})=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,1)},$$

再利用迭代公式

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}+(\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{a}))^{-1}\left[\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_{n-1}^2-y_{n-1}^2)\\ x_{n-1}y_{n-1}\end{pmatrix}\right]$$

在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域内求 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的二次迭代解 $(x_2,y_2)^{\mathrm{T}}$, 并用它与逆映射的一次微分近似

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u\\v-1\end{pmatrix}$$

作比较.

5. 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集, $\boldsymbol{f}:U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件:
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\quad J\boldsymbol{f}(\mathbf{0})\text{ 的秩为 } m\ (m\leqslant n).$$
证明: 存在 $\mathbf{R}^n$ 中含 $\mathbf{0}$ 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $\boldsymbol{h}:V\to W$ 使得 $\boldsymbol{h}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 并且
$$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)\ \forall(x_1,\cdots,x_m)\in\boldsymbol{f}^{-1}(V).$$

6. 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集, $\boldsymbol{f}:U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件:
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\quad J\boldsymbol{f}(\mathbf{0})\text{ 的秩为 } n\ (m\geqslant n).$$
证明: 存在 $\mathbf{R}^m$ 中含 $\mathbf{0}$ 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $\varphi:V\to W$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 并且
$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_n),\quad\forall(x_1,\cdots,x_m)\in V.$$

(以上两个命题称为**秩定理**, 你能否对它们作一个简单的几何解释.)

第二十一章 偏导数的应用

本章介绍偏导数在几个方面的应用. §21.1 节是偏导数在几何上的应用; §21.2 节是方向导数与梯度; §21.3 节讨论 Taylor 公式与极值问题; §21.4 节是条件极值与条件最值; §21.5 节是向量值函数的 Rolle 定理, 这可以作为习题课的补充材料. 最后一节是学习要点和参考题.

我们在本章的讨论中特别强调用向量与矩阵语言描述和处理多元问题, 对条件最值的求解作了比较详细的讨论.

§21.1 偏导数在几何上的应用

21.1.1 曲线的切向量、切线与法平面

设空间曲线 l 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z),$$

则曲线 l 在 (x_0, y_0, z_0) 点的切线方程与法平面方程分别是

$$\frac{x - x_0}{\tau_x} = \frac{y - y_0}{\tau_y} = \frac{z - z_0}{\tau_z},$$

$$\tau_x(x - x_0) + \tau_y(y - y_0) + \tau_z(z - z_0) = 0.$$

如果空间曲线 l 的参数方程是

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ a \leqslant t \leqslant b,$$

其中 t 是参数. 又设 $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 并且不同时为 0, 这样的曲线称为**光滑曲线**. 则曲线上点 $(x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0))$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)).$$

如果空间曲线 l 是用两个曲面

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

的交线来表示的, 又设 F 和 G 关于 x, y, z 有连续的偏导数. 点 $\boldsymbol{p}_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足这一方程组, 即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. 并且 F, G 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的秩为 2, 则曲线 l 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)},\ \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)},\ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right)\bigg|_{\boldsymbol{p}_0}.$$

例题 21.1.1 设 $f(x, y)$ 为可微函数, 曲线方程为

$$z = f(x,y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\sin\alpha}.$$

求曲线上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线与 xOy 平面所成角的正切.

解 令 $F(x,y,z) = z - f(x,y)$, $G(x,y,z) = \sin\alpha(x-x_0) - \cos\alpha(y-y_0)$. 则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} -f_y & 1 \\ -\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = \cos\alpha,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 1 & -f_x \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -f_x & -f_y \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha.$$

于是曲线上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线与 z 轴正方向所成夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{1+[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\sin\alpha]^2}}.$$

由此可算出切线与 xOy 平面所成角的正切为

$$f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\sin\alpha.\quad \square$$

21.1.2 曲面的法向量、法线和切平面

光滑曲面 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm(f_x(x,y), f_y(x,y), -1).$$

这里所说的光滑是指偏导数连续.

由 $F(x,y,z) = 0$ 确定的光滑曲面在 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm(F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)),$$

其中 F_x, F_y, F_z 不同时为零.

由参数方程

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v)$$

决定的光滑曲面在点 (x,y,z) 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

有了法向量之后, 过曲面上任一点的法线方程和切平面方程都可以很容易地写出来.

例题 21.1.2 求曲面

$$x = u+v,\quad y = u^2+v^2,\quad z = u^3+v^3$$

的切平面当切点 $M(u,v)$, $u \neq v$, 趋于曲面的边界 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时的极限位置.

解 先求 $u \neq v$ 时的切平面方程. 由于

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{vmatrix}=6uv(v-u),\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}3u^2 & 3v^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3(u^2-v^2),$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=2(v-u),$$

于是过 (x,y,z) 点的切平面方程为

$$6uv(v-u)(X-(u+v))+3(u^2-v^2)(Y-(u^2+v^2))$$
$$+2(v-u)(Z-(u^3+v^3))=0.$$

消去 $v-u$, 并整理得到

$$6uvX-3(u+v)Y+2Z=3uv(u+v)-u^3-v^3.$$

令 $(u,v)\to(u_0,u_0)$, 则有

$$6u_0^2X-6u_0Y+2Z=4u_0^3.$$

将 (X,Y,Z) 改写为 (x,y,z), 可见所求的极限位置为

$$3u_0^2x-3u_0y+z=2u_0^3.\quad \square$$

21.1.3 曲线的夹角、曲面的夹角

由解析几何知 $\mathbf{R}^2$ 中两个相交向量 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 所交的角 ω 的余弦为

$$\cos\omega=\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{l}|\cdot|\boldsymbol{m}|},$$

其中 "·" 为 Euclid 内积, $|\cdot|$ 为 Euclid 范数. 设连续可微的隐函数定义的曲线 $F(x,y)=0$ 与 $G(x,y)=0$ 在 (x,y) 处相交. 则在 (x,y) 处两曲线相应的切向量分别为 $(F_y,-F_x)$ 与 $(G_y,-G_x)$, 其夹角余弦为

$$\cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\cdot\sqrt{G_x^2+G_y^2}}.$$

两曲线正交的条件是: $F_xG_x+F_yG_y=0$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中也有类似的讨论. 设 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中两光滑曲面. 它们在 (x,y,z) 处相交. 两曲面夹角定义为相应切平面的夹角 (或相应法向量的夹角). 设 ω 为其夹角. 有

$$\cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cdot\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}.$$

两曲面正交的条件是: $F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z=0$.

例题 21.1.3 设

$$\frac{xy}{z}=u,\quad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=v\quad 和\quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=w$$

是三个分别以 u, v, w 为参数的单参数曲面族, 证明过同一点的三曲面族的三个曲面是两两正交的.

证 设三曲面交于 (x,y,z) 处, 则其法向量分别为

$$(\frac{y}{z},\frac{x}{z},-\frac{xy}{z^2}),$$
$$(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}),$$
$$(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},-\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}).$$

由于这三个向量的两两内积均为 0, 所以过 (x,y,z) 点的这三个曲面族的三个曲面是两两正交的. □

21.1.4 练习题

1. 在曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上求出一点, 使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.
2. 证明斜驶线
$$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2})=\mathrm{e}^{k\varphi},\quad k=\text{常数},$$
与地球的一切子午线相交成定角, 其中 φ 为地球上点的经度、ψ 为地球上点的纬度.
3. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程.
4. 求曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的法线与切平面方程.
5. 证明: 曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 的每一个切平面与坐标面形成体积相同的四面体.

§21.2 方向导数与梯度

21.2.1 方向导数

为方便起见, 我们在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑. 设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域, f 是定义在 D 上的函数, $\boldsymbol{p}_0\in D$, $\boldsymbol{l}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个单位向量. 如果极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{p}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限是函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**, 记为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{p}_0)$. 它表示函数 f 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率. 特别地, 若 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处存在关于 x 的偏导数, 则当 $\boldsymbol{l}=(1,0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)$; 当 $\boldsymbol{l}=(-1,0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{p}_0)=-\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)$.

命题 21.2.1 设函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点可微, 则 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\cos\gamma. \tag{21.1}$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

21.2.2 梯度

设函数 f 定义于某个区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 内, 又设 f 具有关于各个变元的偏导数, 称向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是 f 在点 (x,y,z) 的**梯度**, 记为 $\mathrm{grad}f(x,y,z)$ 或 $\nabla f(x,y,z)$.

由梯度的定义, (21.1) 式可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\boldsymbol{l}=|\nabla f(x,y,z)|\cos\theta, \tag{21.2}$$

其中 θ 是向量 $\nabla f(x,y,z)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 之间的夹角. 由 (21.2) 可以看出在一个固定点 (x,y,z), $f(x,y,z)$ 沿任意方向的方向导数中以沿 ∇f 的方向导数为最大. 其值为 $|\nabla f(x,y,z)|$. 从而梯度的方向就是函数在该点增加最快的方向.

例题 21.2.1 求 $u=x+y+z$ 在沿 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点的外法向的方向导数, 并问在球面上何点该方向导数取: (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于 0.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点的外法向方向为 (x,y,z), 函数 $u=x+y+z$ 沿 (x,y,z) 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla u\cdot(x,y,z)=|\nabla u|\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\nabla u=(1,1,1)$ 与 (x,y,z) 之间的夹角. 于是当 $x=y=z>0$ 时, 方向导数取最大值 $\sqrt{3}$, 此时 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 当 $x=y=z<0$ 时, 方向导数取最小值 $-\sqrt{3}$, 此时 $x=y=z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 当 $x+y+z=0$ 时, 方向导数为 0. □

例题 21.2.2 若 $\mathbf{R}^2$ 上的可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0, \tag{21.3}$$

则 $f(x,y)$ 恒为常数.

证 1 设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 取 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 由 (21.3) 得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)=0.$$

于是在任一从原点出发的射线上的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=0$, 因此 $f(x,y)$ 在该射线上为常数, 即

$$f(x,y)\equiv f(0,0). \quad □$$

证 2 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 由 (21.3) 得

$$\frac{\partial f}{\partial r}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta=0,$$

即 $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 与 r 无关. 对任意固定的 θ, 令 $r\to 0^+$, 得

$$f(x,y)=\lim_{r\to 0^+}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(0,0).\quad\square$$

证 3 由 (21.3) 知

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0=0\cdot f(x,y),$$

由齐次函数的充要条件 (命题 19.3.1) 知 f 为零次齐次函数, 于是对 $\forall t\in\mathbf{R}$,

$$f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y),$$

于其中令 $t\to 0$, 得

$$f(x,y)=f(0,0).\quad\square$$

证 4 对任意固定的 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, 定义一元函数

$$\varphi(t)=f(tx,ty),\quad t\geqslant 0.$$

则

$$\varphi'(t)=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty).$$

于是当 $t>0$ 时, 由 (21.3) 得

$$\varphi'(t)=\frac{1}{t}[txf_1(tx,ty)+tyf_2(tx,ty)]=0,$$

所以 $\varphi(t)$ 为常数. 取 $t=1$, 则 $\varphi(t)\equiv\varphi(1)$. 即

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

令 $t\to 0$, 得

$$f(x,y)=f(0,0).\quad\square$$

21.2.3 练习题

1. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向导数.

2. 设 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x,y,z)=0$ 上的点 (x,y,z) 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 证明
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}+v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

3. 设 $f(t)$, $u=u(x,y,z)$ 为可微函数, 证明 $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$.

4. 设 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0)$ 点可微, $\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_n$ 为 n 个单位向量, 相邻的两向量夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 证明
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(x_0,y_0)=0.$$

5. 设 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在 $(0,0,0)$ 点函数 u 增加最快的方向.

6. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

证明: $f(x,y)$ 在原点处连续, 沿任何方向的方向导数存在, 但不可微.

§21.3 Taylor 公式与极值问题

21.3.1 Taylor 公式

在一元微分学中 (上册 §7.2 节), 我们对 Taylor 公式及其应用给予了足够的重视, 介绍了带有 Peano 余项和 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 它们分别表示一元函数带有渐近误差估计和大范围误差估计的多项式逼近. 在多元函数中, 我们仍然有相应的 Taylor 公式. 为叙述方便起见, 仅讨论二元函数的情形.

Taylor 公式 设函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 $D=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2\}$ 内有关于 x,y 的各个 $m+1$ 阶连续偏导数. 对 D 内任意一点 (x,y), 记 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, 则

$$\begin{aligned} f(x,y)=f(x_0,y_0)&+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\\ &+\frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots\\ &+\frac{1}{m!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)+R_m(x,y), \end{aligned}$$

其中

$$R_m(x,y)=\frac{1}{(m+1)!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

$0<\theta<1$, 称为 **Lagrange 余项**.

在所述条件下 (甚至条件可减弱为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有关于 x, y 的各个 m 阶连续偏导数), 也可取 **Peano 余项** $R_m(x,y)=o(r^m)$, $r\to0$, 其中 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

上述两个公式的证明均可化归为一元函数来证明. 其中在 Lagrange 余项的证明中, 令 $\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$; 在 Peano 余项的证明中可先把 $f(x,y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 作为 Δx 的一元函数进行带 Peano 余项的一元 Taylor 公式展开, 再对各阶偏导函数作 Δy 的一元函数展开, 然后整理.

命题 21.3.1 (Taylor 公式的惟一性) 设 $f(x,y)$ 具有 $m+1$ 阶连续偏导数, 若用某种方法得到展开式

$$f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{m}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j+o(\rho^m),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, 则必有

$$A_{ij}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(x_0,y_0).$$

证明留作习题.

例题 21.3.1 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的 4 阶 Taylor 多项式, 并求出 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$.

解 由于

$$\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}=1+x(x^2+y^2)+\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2+o([x(x^2+y^2)]^2),$$

于是

$$\frac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}=-x-\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+o(x^2(x^2+y^2)).$$

由 Taylor 展式的惟一性知 $f(x,y)$ 的 4 阶 Taylor 展开式为

$$-x-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2.$$

由此得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=4!(-\frac{1}{2})=-12.\quad \Box$$

Taylor 公式有许多重要而有趣的应用, 下面举出几例. 我们先用向量与矩阵形式来重新表达 Taylor 公式, 这样的表达式简单、明了. 特别是它的前三项, 与线性代数的知识紧密联系在一起. 建议同学要熟悉.

考虑定义在一个开区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$. 设点 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$. 带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式可写为

$$f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p}_0)+\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2!}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+o(r^2),$$

其中 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)=(x_1-x_1^0,\cdots,x_n-x_n^0)$, $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的梯度, $\boldsymbol{Q}=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_0}$ 称为 **Hesse 矩阵**.

记函数的增量 $\Delta f=f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}_0)$. 易知当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\neq\mathbf{0}$ 时可取不同的 $\Delta\boldsymbol{x}$, 使 Δf 取到正值与负值, 因此当 $\boldsymbol{p}_0$ 是可微函数 f 的一个极值点时, $\boldsymbol{p}_0$ 必是 f 的驻点 (又称临界点), 即有①

$$\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\mathbf{0}.$$

① 这里的结论和证明都可以与一元函数的 Fermat 定理作比较. 参见上册 187 页该定理的证明 2 和 239 页的例题 8.3.1. 当然在多元情况的梯度为 0 的结论具有更为丰富的意义.

又当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\neq\mathbf{0}$, 且 $|\Delta x|$ 为定值时, 在 Δx 与 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 同向时 Δf 取最大. 因此梯度方向是函数增长最快的方向. 当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\mathbf{0}$ 时, 可根据 $\boldsymbol{Q}$ 的情况来讨论函数增长最快的方向.

例题 21.3.2 设 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向.

解 由于 $\nabla u(0,0,0)$ 为零向量, 故不能应用梯度方向是函数增长最快的方向的性质, 需另想办法. 考虑沿某单位方向 $\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 函数 u 的变化

$$u(t\alpha,t\beta,t\gamma)-u(0,0,0),\quad \text{其中 } t \text{ 是参数}.$$

令 $\varphi(t)=u(t\alpha,t\beta,t\gamma)$. 由 Taylor 展式

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi(0)&=\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2}t^2+o(t^2)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0,0)\alpha^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0,0)\beta^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(0,0,0)\gamma^2\right)t^2+o(t^2)\\&=\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

由于 $a>b>c$ 及 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, 当 $t>0$ 充分小时, 沿方向 $\boldsymbol{l}=(0,0,\pm1)$ $\varphi(t)-\varphi(0)$ 最大, 即函数 u 增加最快. □

注 设二次连续可微函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的梯度为零向量, 但 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是非零矩阵, 则 f 增长最快的可能方向在 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 如最大特征值对应的特征子空间为一维空间, 则相应的方向就是 f 增长最快的方向 (第二组参考题 1).

例题 21.3.3 设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数, 且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1\ \forall(x,y)\in D$. 试证: 存在点

$$(x_0,y_0)\in \mathrm{int}D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$

使得在点 (x_0,y_0) 处有不等式 $f_x^2+f_y^2\leqslant 16$.

解 设 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 在单位圆周上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$, 而在原点 $g(0,0)\leqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1, 或者 $g(x,y)$ 必在 D 的某个内点 (x_0,y_0) 处取到极小值. 因此总存在 $(x_0,y_0)\in\mathrm{int}D$, 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0,$$

于是就有

$$(f_x^2+f_y^2)\big|_{(x_0,y_0)}\leqslant 16\quad\square$$

例题 21.3.4 证明当 $|x|$ 和 $|y|$ 充分小时, 有近似式

$$\frac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2 \tag{21.4}$$

证　设 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$, 则 $f(x,y)$ 在原点附近无穷次可微, 且

$$f(0,0)=1,\qquad f_x(0,0)=0,\qquad f_y(0,0)=0,$$

$$f_{xx}(0,0)=-1,\quad f_{yy}(0,0)=1,\quad f_{xy}(0,0)=0.$$

由 Taylor 公式, 当 $|x|$ 和 $|y|$充分小时, 有

$$\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(|x|^2+|y|^2),$$

此即 (21.4).　□

21.3.2　极值问题

考虑定义在一个开区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$. 设 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 是 f 的一个极值点, 那么 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\mathbf{0}$. 由二阶 Taylor 展式得

$$f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p}_0)+\frac{1}{2!}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+o(r^2),$$

因而可以根据二次型 $\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的符号来确定 $f(\boldsymbol{x})$ 能否在 $\boldsymbol{p}_0$ 处取到极值, 即有如下的极值的充分条件:

设函数 f 在驻点 $\boldsymbol{p}_0$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则

(1) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是正定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极小值;

(2) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是负定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极大值;

(3) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是不定的 (即既有正的特征值, 也有负的特征值), 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点不是极值点;

(4) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是半定的 (即所有特征值同号, 但有零特征值), 则需进一步判别.

注　Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是否是正定、负定可以根据高等代数中半到的 Sylvester 准则来判断, 即考虑 $\boldsymbol{Q}$ 的各阶主子式的符号. 特别有:

设 f 是二元函数 $f(x,y)$. 如果 $f(x,y)$ 在驻点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有二阶连续偏导数, 并设 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$ 以及 $\Delta=AC-B^2$, 则

(1) 若 $\Delta>0, A>0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点有极小值;

(2) 若 $\Delta>0, A<0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点有极大值;

(3) 若 $\Delta<0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点没有极值;

(4) 若 $\Delta=0$, 则需进一步判别.

求多元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值的步骤可归结如下:

1. 通过解方程组 $f_{x_i}=0, i=1,2,\cdots,n$, 求出驻点 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$;

2. 如果函数 f 在驻点 p_0 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则考查 Hesse矩阵 $Q=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\bigg|_{x=p_0}$, 利用上述的充分条件;
3. 考查 f_{x_i}, $i=1,2,\cdots,n$, 不存在的点是否为极值点;
4. 考查没有二阶连续偏导数的驻点是否为极值点.

例题 21.3.5 求 $z=\dfrac{1}{2}x^2+xy+\dfrac{1}{2}y^2-2x-2y+5$ 的全部极值点与极值.

解 由于 $z_x=z_y=x+y-2$, 则直线 $x+y-2=0$ 上的点都是驻点. 又 $A=f_{xx}=1$, $B=f_{xy}=1$, $C=f_{yy}=1$, 于是 $\Delta=AC-B^2=0$. 故不能用法则来判别这些驻点是否为极值点. 从函数本身来看

$$z=\frac{1}{2}(x+y)^2-2(x+y)+5=\frac{1}{2}[(x+y)-2]^2+3,$$

故 $x+y=2$ 上的全部点均为 z 的极小值点, 极小值为 3.

由于 z 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微, 故无其他极值点. □

注 本题表明, 对于二元函数, 即使它不是常值函数, 其驻点仍可以有无穷多个, 且可以构成曲线.

例题 21.3.6 设 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. 证明: 沿着经过点 $(0,0)$ 的每一条直线, 点 $(0,0)$ 均是 $f(x,y)$ 在该直线上的极小值点. 但点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在整体上的极小值点.

证 在 xOy 平面上画出 $S_1: y=x^2$ 和 $S_2: y=2x^2$ 表示的两条抛物线, 可见 S_1 和 S_2 把平面分成四个区域. 在每个区域 f 取确定的符号, 而过 $(0,0)$ 的每一条直线在 $(0,0)$ 附近都位于 f 取"+"的区域内, $f(0,0)=0$, 所以 $(0,0)$ 是 f 在该直线上取到极小值的点. 另一方面, $(0,0)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的任一小邻域内都包含着上述四个小区域, 即 f 可在这个小邻域取到正值, 也可以取到负值. 故 f 在 $(0,0)$ 处取不到极值.

注 根据需要在不同的区域取不同的值是构造二元函数反例的常用手法.

21.3.3 最大最小值问题

与一元函数相仿 (参见上册 §8.3 节), 可以通过求驻点的办法求函数的最大、最小值. 以二元函数为例叙述如下:

1. 如果 $f(x,y)$ 定义在有界闭区域上, 则先求出 D 内部的全部驻点, 不可导点及相应的函数值, 然后求出 f 在 ∂D 上的最值 (可将边界曲线代入 $f(x,y)$, 化为求一元函数的最值问题), 最后取所有这些函数值的最大者为最大值, 最小者为最小值;

2. 如果 $f(x,y)$ 定义在无界区域上, 则去掉明显取不到最值的某个无界子区域部分, 使之成为有界区域上的最值问题;

3. 利用

$$\max f = \max_x \max_y f \text{ 或 } \max_y \max_x f,$$

对 x, y 累次求最值;

4. 如果 $f(x,y)$ 定义在有界开区域 D 上, 有时需要先将 $f(x,y)$ 的定义域连续延拓到 $\overline{D}$ 上, 然后求有界闭区域上的最大最小值, 最后求出所要的结果.

例题 21.3.7 求 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 在全平面上的最大最小值.

解 1 令 $f_x = 2x - y - 2 = 0$, $f_y = -x + 2y + 1 = 0$ 得驻点 $(1,0)$. $A = f_{xx}(1,0) = 2 > 0$, $B = f_{xy}(1,0) = -1$, $C = f_{yy}(1,0) = 2$, $\Delta = AC - B^2 > 0$. 故 $(1,0)$ 是极小值点, 极小值为 $f(1,0) = -1$. 又有

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^2(1 - \sin\theta\cos\theta) - \rho(2\cos\theta - \sin\theta) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\rho^2 - 3\rho \to +\infty \quad (\rho \to +\infty), \end{aligned}$$

可见 $f(x,y)$ 在全平面上无最大值. 又可知存在 ρ_0, 当 $\rho \geqslant \rho_0$ 时, $f > -1$. 于是在 $x^2 + y^2 \geqslant \rho_0^2$ 内, f 不可能取最小值, 即 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上最小值与 f 在 $D = \{x^2 + y^2 \leqslant \rho_0^2\}$ 上最小值相同, 又 $f(x,y)$ 在 D 内无不可导点, 于是

$$\min_{\mathbf{R}^2} f = \min_D f = \min\{f(1,0), f|_{\partial D}\} = -1. \quad \square$$

解 2 由 $f(x,y) = y^2 + (1-x)y + (x^2 - 2x)$, 先固定 x, 求 $\min\limits_{y\in\mathbf{R}} f(x,y)$. 将 $f(x,y)$ 改写为

$$f(x,y) = (y + \frac{1-x}{2})^2 + (\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}),$$

于是

$$\min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(x-1)^2 - 1,$$

从而

$$\min_{x\in\mathbf{R}} \min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y) = \min_{x\in\mathbf{R}} [\frac{3}{4}(x-1)^2 - 1] = -1,$$

所以

$$\min_{\mathbf{R}^2} f(x,y) = -1.$$

又 $f(0,y) = y^2 + y$ 无最大值, 因此 $f(x,y)$ 也无最大值. $\square$

解 3 $f(x,y) = (x - \frac{y}{2} - 1)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 1 \geqslant -1$ 且 $f(1,0) = -1$, 于是 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点取得最小值 -1, 无最大值. $\square$

注 在上例的解 1 中, 能否像一元函数那样 (上册 242 页练习题 1), 根据 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上只有惟一的极值点, 就断言该极值点是最值点呢? 回答是否定的, 考虑 $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的情况 (见下一小节的练习题 5).

例题 21.3.8 设 D 为有界闭区域, $u(x,y)$ 在 D 上连续, 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$, $u|_{\partial D}=0$, 则 u 在 D 上恒为零.

证 用反证法. 假设 u 在D 上有正的最大值或负的最小值. 由条件 $u|_{\partial D}=0$ 知这样的最大值或最小值只能在 D 的内部达到. 不妨设 $(x_0,y_0)\in \mathrm{int}D$, 且满足

$$u(x_0,y_0)>0,\quad u(x_0,y_0)\geqslant u(x,y),\quad \forall\,(x,y)\in D. \tag{21.5}$$

于是 (x_0,y_0) 也是极大值点, 从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=0. \tag{21.6}$$

另一方面, 由已知条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=u(x_0,y_0),$$

此与 (21.5), (21.6) 矛盾, 从而 $u\equiv 0$. □

例题 21.3.9 在平面上给定不在同一直线上的三点 $M_i(a_i,b_i)$, $i=1,2,3$. 求平面内的这样一点, 使它至此三定点的距离之和为最小.

解 任取点 $M(x,y)$, 令

$$\rho_i=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2},\quad i=1,2,3.$$

于是所给问题为研究函数

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\rho_i=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

的最小值. 除了在三个给定点以外, 它处处存在着偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=1}^{3}\frac{x-a_i}{\rho_i}=\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}\frac{y-a_i}{\rho_i}=\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i,$$

其中 θ_i 表示 x 轴正向与以 M_i 为起点的射线 M_iM 的夹角 (见图 21.1).

首先找驻点 M_0, 令两个偏导数为 0 得

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0,$$

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0.$$

第一式乘以 $\sin\theta_2$, 第二式乘以 $\cos\theta_2$, 相减得

$$\sin(\theta_2-\theta_1)=\sin(\theta_3-\theta_2). \tag{21.7}$$

同样可得

$$\sin(\theta_3-\theta_2)=\sin(\theta_1-\theta_3). \tag{21.8}$$

由图 21.1 可以算出 $\angle M_1M_0M_2=\theta_2-\theta_1$, $\angle M_2M_0M_3=\theta_3-\theta_2$, $\angle M_3M_0M_1=\theta_1-\theta_3+2\pi$. 由 (21.7), (21.8) 得

$$\sin\angle M_1M_0M_2=\sin\angle M_2M_0M_3=\sin\angle M_3M_0M_1.$$

由于三个角都在 0 与 2π 之间, 且三个角之和为 2π, 于是

$$\angle M_1M_0M_2=\angle M_2M_0M_3=\angle M_3M_0M_1=\frac{2}{3}\pi.$$

于是点 M_0 可由下列方法求得: 在三角形 $M_1M_2M_3$ 的三边上各作一含圆周角为 $\frac{2}{3}\pi$ 的弧, 三弧的公共点为 M_0.

若三角形没有大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的内角, 则此弧确能在三角形之内相交而确定 M_0. 这时, 各边显然都对着顶点在 M_0 的等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的角 (见图 21.1), 在这种情形, 就必须比较 $u(x,y)$ 在 M_0, M_1, M_2, M_3 这四个点的值. 我们将证明, 在驻点 M_0 处的 $u(x,y)$ 的数值必小于其他三个数值. 实际上由余弦定理以及 $\angle M_1M_0M_2=\frac{2}{3}\pi$, 有

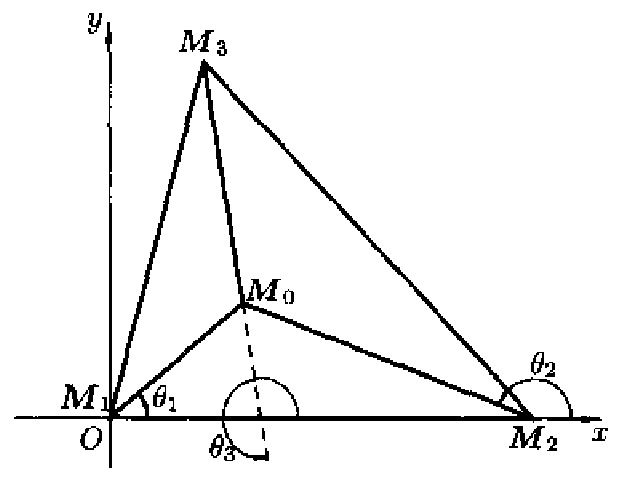


图 21.1

$$(M_1M_2)^2=(M_0M_2)^2+(M_0M_1)^2+M_0M_2\cdot M_0M_1$$
$$>(M_0M_2+\frac{1}{2}M_0M_1)^2,$$

于是 $M_1M_2>M_0M_2+\frac{1}{2}M_0M_1$, 同理 $M_1M_3>M_0M_3+\frac{1}{2}M_0M_1$, 两式相加得

$$M_1M_2+M_1M_3>M_0M_1+M_0M_2+M_0M_3,$$

即 $u(M_1)>u(M_0)$. 显然此处的 M_1 可以换成 M_2 或 M_3.

若三角形 $M_1M_2M_3$ 有一个内角大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 情形就不同了, 这时三条圆弧没有公共点, 驻点也就不存在了. 而函数 $f(x,y)$ 在 M_1,M_2,M_3 中之一处, 也就是在钝角的顶点处达到其最小值. □

注　这一问题再一次说明, 在探求函数的最大最小值时, 除了驻点以外, 导数不存在的点也必须考虑在内.

例题 21.3.10 (最小二乘法) 设通过观测或实验得到一列数据 (x_i,y_i), $i=1,\cdots,n$. 它们大体上满足线性关系, 即大体上可以用直线方程来反映变量 x 与变量 y 之间的对应关系. 确定直线方程使这些数据代入后的偏差的平方和最小.

解　不妨设 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 不全相等, 即直线是非垂直的, 设方程为 $y=ax+b$. 偏差的平方和为

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2.$$

现要确定 a, b, 使得 $f(a,b)$ 为最小. 为此, 令

$$f_a = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \quad f_b = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0,$$

按 a, b 合并整理得

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

解此方程组得惟一的稳定点 $(a = \bar{a},\ b = \bar{b})$. 为进一步确定该点是否取到极小值, 我们计算得到

$$A = f_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = f_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = f_{bb} = 2n,$$

$$D = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 > 0.$$

由前述定理 $f(a,b)$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})$ 取到惟一极小值, 并且由 x_i $(i = 1,\cdots,n)$ 不全相等的假定知道对任意 (a,b) 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |ax_i + b| > 0.$$

从而

$$\min_{a^2+b^2=1}\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |ax_i + b|\} \geqslant \delta > 0,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim_{|a|+|b|\to+\infty} f(a,b) &= \lim_{|a|+|b|\to+\infty}(a^2+b^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ax_i+b-y_i}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \\ &\geqslant (a^2+b^2)\left(\delta^2 - o\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)\right) \to +\infty.\end{aligned}$$

因此 f 的最小值在有界闭区域上取到. 故所得的惟一极小值就是最小值. □

注 1 在具体问题中 (主要指应用问题), 如果问题确有最值, 而边界值明显不是最值, 在区域内部驻点又惟一, 则此驻点必是最值点.

注 2 如例题 21.3.7 的注所指出的, 多元函数的惟一极值点并不一定是最值点. 但如果 f 是二次函数, 则 f 的极值点一定是最值点. 证明如下: 设 $\boldsymbol{p}_0$ 是 f 的极值点, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 是 f 的稳定点. 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处 Taylor 展开, 有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0).$$

由于 f 是二次函数, 故 $\boldsymbol{Q}$ 是常值矩阵. 并且 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 附近取到极值, 因此 $\boldsymbol{Q}$ 是半正定或半负定矩阵. 如果 $\boldsymbol{Q}$ 是半正定矩阵, 则 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0) \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{x}$. 所以 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是最小值. 如果 $\boldsymbol{Q}$ 是半负定矩阵, 则 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0) \leqslant 0\ \forall \boldsymbol{x}$, 所以 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是最大值. 由此也得到了最小二乘法中惟一极小值就是最小值的另一种证明.

21.3.4 练习题

1. 设 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内具有连续的二阶偏导数, 试证当 $h \to 0$ 时有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{1}{h^2}[u(x_0+h,y_0)+u(x_0-h,y_0)$$
$$+u(x_0,y_0+h)+u(x_0,y_0-h)-4u(x_0,y_0)]+o(1).$$

2. 对于下列函数, (0,0) 点是否为驻点? 是否为极值点?

   (1) $f(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1$;

   (2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

   (3) $f(x,y)=(x+y)^2-y^2$.

3. 求下列函数的极值点及相应的极值:

   (1) $u(x,y)=x^2(y-1)^2$;

   (2) $u(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$;

   (3) $u(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$.

4. 求 $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant\pi\}$ 上的最大、最小值.

5. 证明函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有惟一的极大值点, 但该极大值点不是最大值点.

§21.4 条件极值与条件最值

21.4.1 条件极值

在满足约束条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\ (i=1,\cdots,m,\ m<n)$ 时, 求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极值问题, 可归结为对 Lagrange 函数

$$L(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{21.9}$$

求普通函数极值的问题, 其中 $\lambda_i\ (i=1,\cdots,m)$ 为常数因子. 这种方法称为 **Lagrange 乘子法**. Lagrange 乘子法的几何解释可见教材 [9, 25, 60] 等.

Lagrange 乘子法的具体步骤是:

1. 作出 Lagrange 函数 (21.9);

2. 由 $L_{x_i}=0\ (i=1,\cdots,n)$ 与 $\varphi_i=0\ (i=1,\cdots,m)$ 联立解出 L 的全部驻点与 $\lambda_i\ (i=1,\cdots,m)$ 的具体值, 并要求驻点处矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} \tag{21.10}$$

   的秩为 m;

3. 对每个驻点 $\boldsymbol{p}_0$, 算出 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}(\boldsymbol{p}_0)$.

   (1) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 正定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极小值点;

   (2) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 负定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极大值点;

   (3) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 既不是正定, 也不是负定, 则由

$$\mathrm{d}\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=0,\quad i=1,\cdots,m$$

   以及矩阵 (21.10) 的秩为 m, 解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 中的 m 个. 不妨设可解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m$, 将其代入 n 元二次型 $(\mathrm{d}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{d}x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n})^2L(\boldsymbol{p}_0)$ 中, 化为 $(n-m)$ 元二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n-m}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{(n-m)\times(n-m)}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极小值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是负定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极大值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是不定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 不是 (条件) 极值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是半定的, 则需进一步判定.

如此看来, 若出现 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 既不正定, 也不负定的情况下, 讨论将相当复杂.

例题 21.4.1 求 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ $(b\neq 0)$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 之下的极值.

解 1 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1).$$

解方程组

$$L_x=2ax+2by-2\lambda x=0, \tag{21.11}$$

$$L_y=2bx+2cy-2\lambda y=0, \tag{21.12}$$

$$x^2+y^2=1. \tag{21.13}$$

由 (21.13) 知 x,y 不可能同时为零, 于是由 (21.11), (21.12) 得

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0. \tag{21.14}$$

因判别式 $\Delta=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$, 从而解得两个相异实根

$$\lambda_{\pm}=\frac{1}{2}[a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}].$$

对每个 λ, 由 (21.11) (或(21.12)) 与 (21.13) 解出两组解

$$(\lambda_+,x_1,y_1),\ (\lambda_+,x_2,y_2),\ (\lambda_-,x_3,y_3),\ (\lambda_-,x_4,y_4),$$

且 $y_1y_2y_3y_4\neq 0$. 由 (21.11) 与 (21.12) 知

$$\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(a-\lambda) & 2b \\ 2b & 2(c-\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

从而在驻点, 矩阵 $\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix}$ 既不是正定的, 也不是负定的. 此时, 对 (21.13) 求微分得

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0,$$

解出

$$\mathrm{d}y = -\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x.$$

然后代入 $\mathrm{d}^2L = 2(a-\lambda)\,\mathrm{d}x^2 + 4b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2(c-\lambda)\,\mathrm{d}y^2$ 中, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2L &= \frac{2}{y^2}[(a-\lambda)y^2 - 2bxy + (c-\lambda)x^2]\,\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{2}{y^2}(a+c-2\lambda)\,\mathrm{d}x^2 \begin{cases} <0, & \lambda=\lambda_+, \\ >0, & \lambda=\lambda_-. \end{cases}\end{aligned}$$

因此, 对应于 λ_+ (λ_-), f 取得极大 (小) 值. □

解 2 用隐函数方法.

容易证明 $b\neq 0$ 时, f 的极值不在 $(\pm1,0)$ 取得, 而除去这两点外, $x^2+y^2-1=0$ 在单位圆上任意点的某邻域内有连续可导的隐函数 $y=h(x)$, 且 $y'=-\dfrac{x}{y}$.

记 $F(x)=f(x,h(x))$, 则

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2ax + 2b(y+xy') + 2cyy' \\ &= 2(ax+by) + 2(bx+cy)(-\frac{x}{y}) = \frac{2}{y}[(a-c)xy + b(y^2-x^2)].\end{aligned}$$

令 $F'(x)=0$, 记 $u=\dfrac{x}{y}$, 由上式得

$$bu^2 - (a-c)u - b = 0.$$

它的判别式 $\Delta=(a-c)^2+4b^2>0$, 故方程有相异实根

$$u_\pm = \frac{1}{2b}[a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}],$$

且异号. 将它们代入 $x^2+y^2=1$ 中可解得对应于 u_+ 的解 x_1, x_2 和对应于 u_- 的解 x_3, x_4. 在这些驻点上

$$\begin{aligned}F''(x) &= \frac{2}{y}\{(a-c)y - 2bx + [(a-c)x+2by](-\frac{x}{y})\} \\ &= \frac{2}{y^2}[(a-c)(y^2-x^2) - 4bxy] \\ &= \frac{2xy}{y^2}[-\frac{(a-c)^2}{b} - 4b] \\ &= -\frac{2u}{b}[(a-c)^2+4b^2] \begin{cases} <0, & u=u_+, \\ >0, & u=u_-. \end{cases}\end{aligned}$$

故 x_1,x_2 是 f 的极大值点, x_3,x_4 是 f 的极小值点, 其极大值和极小值分别为

$$(au_+^2+2bu_++c)/(u_+^2+1) \text{ 和 } (au_-^2+2bu_-+c)/(u_-^2+1). \quad \square$$

解 3 注意到

$$f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

是一个实的二元二次型, 利用高等代数中的有关定理: 任意一个实二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,\cdots,n)$$

都可以经过正交的线性变换变成平方和

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式全部的根. 因此 $f(x,y)$ 可化为

$$f(x,y)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2,\quad 且\ u^2+v^2=1,$$

其中 u, v 是 x, y 的线性组合, 然后再用 Lagrange 乘子法或初等方法求解. □

注 有些极值问题往往有初等解法, 但它们一般都有一定的局限性.

21.4.2 条件最值

在很多实际问题中, 要求的是条件最值. 从理论上讲, 可通过求条件极值及与边界值、不可导点的值等的比较来得到条件最值. 但从上节看到, 确定条件极值是一件比较麻烦的事. 在实际解题过程中, 有许多简捷的方法, 下面作些讨论.

以三元函数 $u=f(x,y,z)$ 和一个标准约束条件 $g(x,y,z)=0$ 为例 (设 f,g 在其定义域上连续可微). 在求 u 的最值时, 只要最值存在, 且 g_x, g_y, g_z 在 $D_1=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$ 上不同时为 0, 则最值点必是极值点, 从而必是 Lagrange 函数的驻点. 事实上, 设 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 是最值点, 且 $g_z(p_0)\neq0$, 则存在 (x_0,y_0) 点的邻域 $O(x_0,y_0)$, 值在其中确定隐函数 $z=z(x,y)$. 于是 $u=f(x,y,z(x,y))$ 在 $O(x_0,y_0)$ 中有定义, 且于 (x_0,y_0) 处取最值. 因为 $O(x_0,y_0)$ 是开域, 所以 $u=f(x,y,z(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 点取极值. 由此可得求条件最值的方法如下:

1. 若约束为标准形式 $g(x,y,z)=0$, 且约束集合 $D_1=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$ 是有界闭集 (此时最值必定存在). 设 g_x, g_y, g_z 在 D_1 上不同时为 0, 则求出 Lagrange 函数的全部驻点及相应的函数值, 再取其最值即可;
2. 若约束为标准形式 $g(x,y,z)=0$, 但 D_1 为无界集. 通常加上附加约束, 转化为具有附加约束条件的有界域上的条件最值问题;
3. D_1 为有界集, 并有附加约束情况 (如 $x^2+y^2+z^2=1,x>0,y>0,z>0$). 先扩充为有界闭集 (如 $x^2+y^2+z^2=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$), 从而最值存在, 其次求出 Lagrange 函数全部驻点及相应的 f 的值, 令其最大者为 M_1, 最小者为 m_1, 然后求出 f 在附加约束边界上的最大值 M_2 和最小值 m_2, 若 $M_1\geqslant M_2$, 则条件最大值为 M_1; 若 $M_1<M_2$, 则条件最大值不存在. 条件最小值可类似讨论;

4. 标准约束 $g(x,y,z)=0, D_1$ 无界, 且具有附加约束 (如 $x+y+z=1, x>0, y>0, z>0$). 通常应该首先证明条件最值存在, 再证明条件最值点只能在某一有界域中, 从而转化为 3 的情形.

注 对具体问题要作具体分析. 对某个具体问题, 很可能有体现这个问题特点的更为简捷的方法, 甚至是完全初等的方法.

例题 21.4.2 椭球面 $\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ 被通过原点的平面 $2x+y+z=0$ 截成一个椭圆 l. 求此椭圆的面积.

解 只要求出椭圆 l 的长短半轴即可. 于是问题转化为在约束条件

$$F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1=0, \tag{21.15}$$

$$G(x,y,z)\equiv 2x+y+z=0 \tag{21.16}$$

下求 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 之最大最小值. 为此定义

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1)+\mu(2x+y+z).$$

令

$$L_x=2x+\frac{2}{3}\lambda x+2\mu=0, \tag{21.17}$$

$$L_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \tag{21.18}$$

$$L_z=2z+\lambda z+\mu=0. \tag{21.19}$$

将 (21.17)-(21.19) 分别乘 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.15), (21.16) 得

$$\lambda=-r^2. \tag{21.20}$$

将 (21.20) 代入 (21.17), 得

$$(r^2-3)x=3\mu.$$

若 $r^2=3$, 则 $\mu=0$. 代入 (21.18), (21.19), 得 $y=z=0$, 显然不满足 (21.15) 和 (21.16). 因此 $r^2-3\neq 0$. 所以

$$x=\frac{3\mu}{r^2-3}. \tag{21.21}$$

同理将 (21.20) 代入 (21.18), (21.19) 得

$$y=\frac{\mu}{2(r^2-1)},\qquad z=\frac{\mu}{r^2-2}. \tag{21.22}$$

将(21.21), (21.22) 代入 (21.16), 得

$$\frac{6\mu}{r^2-3}+\frac{\mu}{2(r^2-1)}+\frac{\mu}{r^2-2}=0. \tag{21.23}$$

由于 $\mu\neq 0$, 消去 μ, 得

$$15(r^2)^2-49r^2+36=0.$$

由此解出两个根 r_1^2 和 r_2^2 即为条件驻点对应的函数值. 由于约束集合是有界闭集, 故 r^2 的最值存在, 又因在约束集合上 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 不同时

为 0, 故最值必定在条件驻点达到, 因而这两个值也即为 r^2 的最大最小值, 即长、短半轴的平方. 根据 Viète 定理有 $r_1^2\cdot r_2^2=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$, 于是所求的面积为

$$s=\pi r_1r_2=2\pi\sqrt{\frac{3}{5}}.\quad\square$$

注 1 本题所用解法也是条件极值或最值问题中常用的技巧, 其特点是不必求出条件驻点, 而直接求出所要求的条件最值.

注 2 在得到 (21.20) 之后可用下面的解法来求 λ:

由 (21.15) 知 x,y,z 不能同时为 0, 于是在方程组 (21.16)—(21.19) 中视 x,y,z,μ 为未知量, λ 为系数, 则方程组有非零解. 于是系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix}2+\frac{2}{3}\lambda & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2+2\lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(2+\frac{2}{3}\lambda)\begin{vmatrix}2+2\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 2+2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2+\lambda\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-(2+\frac{2}{3}\lambda)(2+\lambda+2+2\lambda)-4(2+2\lambda)(2+\lambda)=0,$$

即

$$15\lambda^2-49\lambda+36=0.$$

例题 21.4.3 设 $p\geqslant 1$. 求 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^p+y^p)$ 在 $x+y=C$ (C为正常数), $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的条件下的最小值.

解 设

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^p+y^p)+\lambda(x+y-C).$$

令

$$\begin{aligned}L_x&=\frac{p}{2}x^{p-1}+\lambda=0,\\ L_y&=\frac{p}{2}y^{p-1}+\lambda=0,\\ &x+y=C.\end{aligned}$$

解得驻点 $x=y=\frac{C}{2}$. 由于约束集合是有界闭集, 比较驻点值与附加约束集合边界点的值 $f(\frac{C}{2},\frac{C}{2})=(\frac{C}{2})^p$, $f(0,C)=f(C,0)=\frac{1}{2}C^p$, 得知 $(\frac{C}{2})^p$ 为最小值. $\square$

注 由本题结论可得

$$\frac{1}{2}(x^p+y^p)\geqslant\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^p.$$

一般地可以证明: 若 $p\geqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^p.$$

很多不等式都可以类似地化为条件最值问题来证明.

例题 21.4.4 求 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值, 其中 $x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. 且证明对任何正数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \tag{21.24}$$

分析 原问题等价于求 $u=xy^2z^3$ 的最大值, 这样做是因为对数函数在零点无定义, 而幂函数则不然, 因而可将约束条件化为 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. 注意到在边界上 u 取最小值. 故在 $D_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=6r^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$ 的内部一定有 u 的最大值点.

证 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2).$$

令

$$L_x=y^2z^3+2\lambda x=0, \tag{21.25}$$

$$L_y=2xyz^3+2\lambda y=0, \tag{21.26}$$

$$L_z=3xy^2z^2+2\lambda z=0, \tag{21.27}$$

$$x^2+y^2+z^2=6r^2. \tag{21.28}$$

在 (21.25)-(21.27) 两边分别乘以 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.28) 得

$$xy^2z^3=-2\lambda r^2. \tag{21.29}$$

再将 (21.29) 代入 (21.25)-(21.27) 中, 明显地 $\lambda\neq 0$, 则

$$x=r,\ \ y=\sqrt{2}\,r,\ \ z=\sqrt{3}\,r,\ \ \lambda=-3\sqrt{3}\,r^4.$$

对应了惟一驻点, 于是 xy^2z^3 的最大值为 $6\sqrt{3}\,r^6$, 即

$$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}\,r^6.$$

两边平方得

$$x^2y^4z^6\leqslant 108r^{12}.$$

令 $a=x^2, y^2=b, z^2=c$, 则 $r^2=\dfrac{a+b+c}{6}$. 于是

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \quad \square$$

注 也可以用算术平均值–几何平均值不等式 (上册第 4 页) 证不等式 (21.24):

$$ab^2c^3=2^23^3a\left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{c}{3}\right)^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \tag{21.30}$$

21.4.3 隐函数的极值

求隐函数的极值有两种方法: 第一种方法是用隐函数求导, 称为直接法; 第二种是化为条件极值去做, 称为间接法. 下面的例子给出了求隐函数极值的这两种方法.

例题 21.4.5 求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0 \tag{21.31}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 1 (直接法) 由 (21.31) 对隐函数 $z=z(x,y)$ 求导, 得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2y-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{21.32}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2x-2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{21.33}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 则

$$2x+y-1=0,\quad y+x-1=0.$$

由此得驻点为 $(0,1)$, 将之代入 (21.31) 得

$$z^2-4z+3=0.$$

于是 $z_1=1,\ z_2=3$, 在 (21.32), (21.33) 两边求导, 得

$$4+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \tag{21.34}$$

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \tag{21.35}$$

$$2+2(\frac{\partial z}{\partial y})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{21.36}$$

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=2$, $B=z_{xy}=1$, $C=z_{yy}=1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=1$ 为极小值.

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=-2$, $B=z_{xy}=-1$, $C=z_{yy}=-1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=3$ 为极大值.

解 2 以 (21.31) 为约束条件, 取目标函数 $f(x,y,z)=z$, 则 Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4).$$

令

$$L_x=4\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.37}$$

$$L_y=2\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.38}$$

$$L_z=1+2\lambda z-4\lambda=0. \tag{21.39}$$

显然 $\lambda \neq 0$, 于是由 (21.37) 和 (21.38) 得驻点为 $(0,1)$. 代入 (21.31) 得 $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. 再由 (21.39) 得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. 由于

$$L_{xx} = 4\lambda,\ L_{yy} = L_{zz} = 2\lambda,\ L_{xy} = 2\lambda,\ L_{xz} = L_{yz} = 0,$$

于是 L 在 $(0,1,1)$ 与 $(0,1,3)$ 的 Hesse 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

前者正定, 后者负定, 所以 $z = 1$ 为极小值, $z = 3$ 为极大值. □

21.4.4 练习题

1. 求 $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$ 在条件 $xyz = 1$ 下的极值.
2. 求 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值.
3. 求 $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ 在条件 $x - y = \frac{\pi}{4}$ 下的极值.
4. 求 $f(x,y,z) = x^l y^m z^n$ 在条件 $ax + by + cz = k$ 下的极值, 常数和变量均正.
5. 求 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在条件 $x^2+y^2+z^2 = 1, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ 下的极值, 其中 $a > b > c > 0$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
6. 设约束条件为 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, $x_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 而 $a > 0$ 为定值. 求 $u = x_1 x_2 \cdots x_n$ 的极值.
7. 求满足约束条件 $x+y+z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 时, $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ 的极值.
8. 若 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$, 求 $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 的极值, 其中 $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是常数, 变量 $x_1, \cdots, x_n$ 均大于 0.
9. 求 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 中的最大最小值.
10. 求 $z = x^2 - xy + y^2$ 在 $|x| + |y| \leqslant 1$ 中的最大最小值.
11. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使其到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 距离的平方和最小.
12. 求点 $(-1,0)$ 到半立方抛物线 $y^2 = x^3$ 的最短距离.
13. 在周长为定数的三角形中, 求面积为最大的三角形.
14. 分解正数 a 为 n 个因子, 使其倒数和最小.
15. 长为 a 的铁丝截成两段, 一段围成一个正方形, 另一段围成一个圆. 这两段各为多少时, 正方形与圆面积之和达最大值.
16. 过椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 上任意点作此椭圆的切线, 求切线与两坐标轴围成的三角形面积最小者.

17. 求原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短距离.

18. 求 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 的交线到原点的最近距离.

19. 在圆外切三角形中, 求面积最小的三角形.

20. 设四边形各边长为定数, 求面积最大的四边形.

21. 在一个已知凸四边形内求一点 C, 使其到四个顶点距离的平方和最小.

22. 证明椭圆的内接三角形中, 面积达最大的三角形的一个顶点处的法线, 必定与此三角形的该顶点所对的边正交, 并求面积最大的内接三角形.

23. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点, 使到直线 $3x+4y=12$ 的距离最短.

24. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的任一切线与 x、y 轴分别交于 A,B 两点, 试求线段 AB 长度的最小值.

25. 在抛物线 $y=x^2$ 的所有与法线重合的弦中求长度最短的弦.

26. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 将圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 包围于其内. 试求 a,b 的值, 使符合上述条件的椭圆的面积为最小.

27. 设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理的条件, 并由此确定了隐函数 $y=f(x)$, 又设 $F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数.

    (1) 求 $f''(x)$;

    (2) 若 $F(x_0,y_0)=0$, $y_0=f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极值, 证明当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时, $f(x_0)$ 为极大值, 当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时, $f(x_0)$ 为极小值;

    (3) 对方程 $x^2+xy+y^2=27$ 在隐函数形式下(不解出 y), 求 $y=f(x)$ 的极值, 并用 (2) 的结论判别极大或极小.

28. 设 D 是由两抛物线 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 所围成的闭域, 试在 D 内求一椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 使其面积为最大.

§21.5　高维 Rolle 定理

本节可看成多元微分学应用的一个例子, 主要材料取自美国数学月刊 102 卷 (1995) 243~249 页.

首先我们给出如下形式的 Rolle 定理.

命题 21.5.1 设函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭球 $\overline{B}(0;r)$ 上连续, 在它的边界上等于常值, 并且在开球 $B(0;r)$ 内可微, 则在球内至少有一个点是函数的临界点 (驻点), 即存在 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in B(0;r)$, 使 $\nabla f(x_1^*,\cdots,x_n^*)=\mathbf{0}$.

证 如果 f 在 $\overline{B}(0;r)$ 上为常值, 结论显然. 如果 f 在 $\overline{B}(0;r)$ 上不为常值, 则至少有一个最值在内部取到. 因此这个最值点就是极值点, 从而为 f 的临界点(驻点). □

当 $n=2$ 时, 设 $z=f(x,y)$ 表示定义在闭圆盘 $\overline{B}(0;r)$ 上的连续可微曲面 Σ. 曲面在点 (x_0,y_0) 处的切平面的法方向是 $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\pm1)$. 上述定理表明存在点 (x_0,y_0), 使该点的切平面的法方向是 $(0,0,\pm1)$. 因而切平面平行于 Σ 的边界所在的平面 $z=c$, c 为常值.

下面考虑在 $B(0,r)\subset\mathbf{R}^n$ 上的可微映射 $\boldsymbol{F}$. 有如下形式的 Rolle 定理:

命题 21.5.2 设 $\boldsymbol{F}:B(0,r)\to\mathbf{R}^m$ 可微, 在闭球 $\overline{B}(0,r)$上连续, 且存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m$ 使

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=0 \ \text{对任意}\ \boldsymbol{x}\in\partial B(0,r)\ \text{成立,} \tag{21.40}$$

则存在 $\boldsymbol{\xi}\in B(0,r)$, 使对任意 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$ 都有

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{u}=0 \tag{21.41}$$

几何分析 在给出这个定理的证明之前, 先看一下它的几何含义是什么. 如果 $n=2$, $m=3$, 则 $\boldsymbol{F}$ 就表示定义在圆盘 $\overline{B}(0,r)$上的一个双参数曲面 Σ. 条件 (21.40) 表明这个曲面在边界位于以 $\boldsymbol{v}$ 为法向量的一个平面 Π 上(即法向量与平面的生成向量正交). 然后再分别取 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的标准基, 则 $\boldsymbol{\alpha}=J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}=J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_2$ 就是 $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 的两个线性无关的列向量, 因此

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_j=0,\quad j=1,2$$

表明 $\boldsymbol{v}$ 与该两个线性无关向量正交. 另一方面, 这两个向量正是过 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 的切平面 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 的生成向量. 因此, $\boldsymbol{v}$ 是 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 的法向量. 也就是说 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 与 Π 平行. 一个定义在圆盘上的双参数可微曲面, 如果它在边界上的点都位于一个平面 Π上, 则必可在圆盘内部找到一参量 $\boldsymbol{\xi}$, 使对应于 $\boldsymbol{\xi}$ 的曲面的点的切平面 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 与 Π 平行.

命题 21.5.2 的证明 定义多元函数 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, 则 g 是 $B(0,r)$ 上的可微函数, 在 $\overline{B}(0,r)$ 上连续, 并且当 $\boldsymbol{x}\in\partial B(0,r)$ 时, $g(\boldsymbol{x})=0$. 因此 g 的最大值和最小值中至少有一个在开球 $B(0,r)$ 中的点 $\boldsymbol{\xi}$ 上取到. 从而 $\boldsymbol{\xi}$ 必为 g 的极值点, 因此 $\nabla g(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$. 所以, $\forall\,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$, 有 $\nabla g(\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{u}=0$, 即

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=0.\quad\square$$

注 1 在命题 21.5.2 中, 开球 $B(0,r)$ 可换成任一个有界开区域.

注 2 在命题 21.5.2 中, 条件 (21.40) 可换成: $\exists\,\boldsymbol{x}_0\in B(0,r)$, 使

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0))\ \text{在}\ \partial B(0,r)\ \text{上不变号.}$$

注 3 命题 21.5.2 有很多有趣的几何应用, 如本章第二组参考题 2, 3.

§21.6 对于教学的建议

21.6.1 学习要点

1. 在解有关几何的习题中, 许多学生惧怕 “方向”, 如切向, 法向等, 到了曲线、曲面积分部分更是如此. 要从这一章起开始培养学生用数学分析处理空间问题的兴趣和信心.
2. Taylor 公式是微分学应用的基础, 多元函数也是如此. 用向量与矩阵的语言叙述和运用 Taylor 公式也许一上来要多费些时间, 但从长远来看是非常值得的.
3. 极值问题 (包括条件极值, 条件最值) 是本章的一个重点, 材料十分丰富, 我们在很多地方加进了自已的学习体会. 一些重要的应用问题如距离问题、面积问题和不等式等是研究生入学试题中的常客. 练习题 21.4.4 中许多习题选自实际试题, 可用于考研复习.
4. **对习题课的建议** 现在有一种不好的苗头是削减多元微积分的课时, 有些老师把多元微积分上成了单纯的 “计算” 课. 但实际上多元微积分中包含了极为丰富的数学思想和解题技巧. 它所体现的综合性, 空间性, 应用性也不可能被一元微积分所替代. 本章集中了多元微分学应用最重要的一些内容, 在习题课安排上要给予充分的时间保证, 让学生逐步形成使用微分学工具描述、处理多维问题的能力. 由于向量与矩阵是处理多维问题最基本的数学工具, 在训练中, 要有意识地引导学生使用这些工具. 可多举一些结合高等代数知识的例子.

   在解条件极值问题时, 除认真分析目标函数, 限制条件, 正确写出 Lagrange 函数外, 对如何快速准确地求出结果, 要注意两点. 下面以例题 21.4.2 为例说明:

   (1) 在令偏导数为 0, 解代数方程组求驻点时, 要充分利用方程组的特点. 在例题 21.4.2 中, (21.15)—(21.19) 是 5 个方程, 5 个未知量的方程组. 如果不充分利用方程组的特点, 是很难解出的. 一般来说首先像例题中那样得到表达式 (21.20);

   (2) 在解方程组 (21.15)—(21.19) 时, 不需要将全部 5 个未知量都解出. 事实上由 (21.20) 知只需要将 λ 求出即可.

21.6.2 参考题

第一组参考题

1. 曲面 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$ 确定, 其中 a,b,c 为常数. 证明:

 (1) 曲面的切平面经过定点 (a,b,c);

 (2) 函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

2. 在平面上给定一个边长为 a,b,c 的三角形, 在它上面可作无数个有相等的给定高 h 的三棱锥, 在其中求出有最小侧面积 S 的那一个.

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, 记 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦. 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}^2}=\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}})$.

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, $\boldsymbol{l}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, $i=1,2,3$ 为三个互相垂直的单位向量, 证明

 (1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_3}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

 (2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_3^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

 (3) 若 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}=0$, $i=1,2,3$, 则 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中恒为常数.

5. 设 f 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\mathbf{R}^n$ 上连续, 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 可微, 证明:

 (1) 如果 $\forall\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})<0$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极大值点;

 (2) 如果 $\forall\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})>0$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极小值点.

6. 设 f 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\mathbf{R}^n$ 上二次连续可微, 且 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$, Hesse 矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)$ 为正定阵. 证明: $\exists\,\delta\in(0,\delta_0)$, 使 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})>0\ \forall\,\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$.

7. 用条件极值的方法证明 Hölder 不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{1/q},$$

其中 $a_i\geqslant 0$, $x_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$; $p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

8. 证明二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值恰好是矩阵

$$\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的最大特征值与最小特征值.

9. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵, 且设 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = H_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $H_1, \cdots, H_n$ 是 n 个确定的非负实数.
   (1) 证明: 如果矩阵 A 的行向量是 $\mathbf{R}^n$ 中两两正交的向量, 则 $(\det\boldsymbol{A})^2$ 取到极值;
   (2) 根据等式 $(\det\boldsymbol{A})^2 = \det\boldsymbol{A} \cdot \det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 A^{T} 是矩阵 A 的转置矩阵, 证明: $\max\limits_{\boldsymbol{A}}(\det\boldsymbol{A})^2 = H_1 \times \cdots \times H_n$;
   (3) 证明: 对任意的矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 有 Hadamard 不等式
   $$(\det\boldsymbol{B})^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_{ij})^2 \right);$$
   (4) 给 Hadamard 不等式以直观的几何解释.

10. 设 $u(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上连续, 在 $x^2 + y^2 < 1$ 上满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$, 则
    (1) 若在 $x^2 + y^2 = 1$ 上 $u(x, y) \geqslant 0$, 证明: 当 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 时, $u(x, y) \geqslant 0$;
    (2) 若在 $x^2 + y^2 = 1$ 上 $u(x, y) > 0$, 证明: 当 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 时, $u(x, y) > 0$.

11. 对多元函数极值的充分性定理给出详细的证明.

12. 仿照 21.4.2 小节对具有多个约束条件的条件最值的确定给出详细的讨论.

第二组参考题

1. 设二次连续可微函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的梯度为零向量, 但 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为非零矩阵. 证明 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的函数值增长最快的方向位于 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 如最大特征值对应的特征子空间为一维空间, 则相应的方向就是 f 增长最快的方向.

2. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲线段 L 的参数表达式为
   $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$$
   $\boldsymbol{P}(x(a), y(a), z(a))$, $\boldsymbol{Q}(x(b), y(b), z(b))$为 L 的起点与终点. Π 是通过直线段 $\boldsymbol{PQ}$ 的任一平面. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得向量 $(x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi))$ 与 Π 平行.

3. (Sanderson 中值定理) 设 $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ 为 k 次可微向量值函数, 并且非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}(a), \boldsymbol{f}(b)$ 及 $\boldsymbol{f}^{(j)}(a), j = 1, 2, \cdots, k-1$ 正交. 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)$ 正交. 其中 $\boldsymbol{f}^{(j)}$ 表示 $\boldsymbol{f}$ 的各个分量函数的 j 阶导数组成的向量.

4. 证明与曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1 \quad (abc\neq 0)$ 相切的三个互相垂直的平面的交点在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 上.
5. 设曲面 Σ: $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 的每一点的法线与 z 轴相交, 其中 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的圆环或圆盘, f 是 C^1 函数. 证明 Σ 是一个旋转曲面.
6. 证明不等式

$$2ab\leqslant \mathrm{e}^{a-1}+a\ln a+\mathrm{e}^{b-1}+b\ln b$$

对所有 $a>0$, $b>0$ 成立. 并求出等式成立的充分必要条件.

7. 设 $\boldsymbol{T}$: $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 是平面上的一个变换. 如果在该变换下任何两条相交曲线的交角保持不变, 则称该变换是**保角**的.
   (1) 如果 φ 与 ψ 满足 $\varphi_x=\psi_y, \varphi_y=-\psi_x$, 则 $\boldsymbol{T}$ 是保角变换;
   (2) 证明下面的反演变换是保角的

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2};$$

   (3) 证明任一圆的反演保是另一圆或直线;
   (4) 求出反演变换的 Jacobi 行列式;
   (5) 证明连续可微变换 $\boldsymbol{T}$ 是保角的充要条件是它满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\varphi_x=\psi_y,\ \varphi_y=-\psi_x \quad 或 \quad \varphi_x=-\psi_y,\ \varphi_y=\psi_x.$$

   第一种情况保持角度方向, 第二种情况角度反向.

8. 由公式

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

定义三维反演变换.
   (1) 证明任何两个曲面之间的夹角在反演变换下不变;
   (2) 证明球面被变换为球面或平面;
   (3) 求变换的 Jacobi 行列式.

第二十二章 重积分

从本章开始进入多元函数积分学. 这一章主要介绍重积分 (含广义重积分) 及其在几何、物理和不等式证明中的应用.

本章分为六节. §22.1 和 §22.2 两节分别讲述二重积分的概念与计算. §22.3 节讨论三重积分与 n 重积分. §22.4 节是广义重积分. §22.5 节是重积分在几何、物理以及不等式证明中的应用. 最后一节是学习要点和参考题.

§22.1 二重积分的概念

22.1.1 二重积分的定义

在形式上与一元函数的定积分类似, 可对二元函数的重积分定义如下:

设二元函数 f 在可求面积的有界区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上定义, 如果存在极限

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \tag{22.1}$$

则称 f 在 D 上**可积**, 并称 (22.1) 为 f 在 D 上的**二重积分**, 记为 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 在 (22.1) 中, T 是 D 的任一分划, $\|T\|$ 为子区域的最大直径, σ_i 为第 i 个可求面积的子区域, $\Delta\sigma_i$ 为 σ_i 的面积, (ξ_i, η_i) 是 σ_i 中任一点.

在上述定义中有两点是要加以特别说明的. 第一, 怎样定义可求面积的区域? 如何定义分划 T 使子区域均可求面积? 第二, 为什么要用子区域的最大直径来刻画分划的模 $\|T\|$? 对于第二点比较容易理解. 因为如果用子区域的最大面积来刻画分划的模的话, 即使子区域的面积很小, 但在同一子区域的点可能相距很远. 因此 "以直代曲" 就不可能在一个小范围内实现. 对于第一点, 现行教科书中有两类解决的方案. 在一些教科书上是先考虑在矩形区域上的二重积分 (见 [36, 8] 等), 因而分划 T 自然是用直线网来实现. 把 D 分成有限个小矩形, (22.1) 式的含义也是很清楚的. 对于一般的区域 D 上函数 f 的二重积分, 通过 f 对 D 的特征函数

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{当 } (x,y) \in D \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

来过渡. 第二类方案 (见 [25, 12, 28, 9] 等) 是先定义平面区域的面积. 一个平面区域 D **可求面积**是指 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个矩形组成的多边形 Σ_1, Σ_2, 使 $\Sigma_1 \subset D \subset \Sigma_2$, 且使得 Σ_2 的面积 $-$ Σ_1 的面积 $< \varepsilon$. 又如果一条曲线可用有限个面积任意小的矩形覆盖, 则称这条曲线是**零面积**的. 平面区域 D 可求面积的

充要条件为边界 ∂D 是零面积的. 因此分划 T 是用有限条零面积的曲线网来实现的. 读者可参考相应的教科书对这个定义作进一步的理解.

22.1.2 可积函数类

先引进平面 $\mathbf{R}^2$ 内的零测度集 (参见上册 304 页关于一维零测度集的定义). 设 S 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个点集, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在可列个矩形 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n,\cdots$, 使得

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n\supset S$, 即矩形集 $\{\Delta_n\}$ 覆盖了 S,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta_n|<\varepsilon$, 其中 $|\Delta_n|$ 为 Δ_n 的面积,

则称 S 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个**零测度集**. 注意零面积集必是零测度集, 但零测度集不一定是零面积集. 例如 $\mathbf{R}^2$ 中有理点全体组成的集是零测度集, 但不是零面积集.

与一元函数的定积分类似, 我们有如下可积充要条件 (参见上册 304 页的 Lebesgue 定理).

命题 22.1.1 设 D 为可求面积的有界闭区域, f 是定义在 D 上的有界函数, 则 f 在 D 上可积的充分必要条件是 f 在 D 上的所有不连续点的集合是一个零测度集.

命题 22.1.1 的证明可参见 [28] 等. 由命题 22.1.1 立得: D 上的连续函数是可积的; 只有至多可列个不连续点的有界函数是可积的; 甚至若有界函数 f 的所有不连续点组成 D 的有限条零测度的曲线, 则 f 也是可积的.

二重积分的性质与一元函数的定积分完全类似, 这里不再重复. 如不作特殊申明, 以下均假设 D 为可求面积的有界闭区域.

例题 22.1.1 设 l: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 其中 φ, ψ 连续, 且至少其中之一有连续导数, 则曲线 l 的面积为零.

证 不妨设 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, ψ 有连续导函数. $\forall\varepsilon>0$, 可作分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, 使当 $s,t\in[t_{j-1},t_j]$, $j=1,2,\cdots,n$ 时有

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon.$$

令

$$a_j=\min_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\varphi(t),\quad b_j=\max_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\varphi(t).$$

则有

$$b_j-a_j\leqslant\varepsilon,\ \ j=1,2,\cdots,n,$$

又令

$$c_j = \min_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j} \psi(t), \quad d_j = \max_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j} \psi(t), \quad I_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j],$$

于是当 $t \in [t_{j-1}, t_j]$ 时 $(\varphi(t), \psi(t)) \in I_j$, 故曲线 $l \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. 由于 $\psi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以

$$|\psi'(t)| < M, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

由微分中值定理得

$$d_j - c_j \leqslant M(t_j - t_{j-1}), \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

因而

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon M(t_j - t_{j-1}) = \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

其中 $|I_j|$ 表示矩形 I_j 的面积. 因为 ε 是任意的, 故曲线 l 的面积为零. □

注 在后面我们将要遇到的大多数区域 (如 x 型区域、y 型区域) 都是由有限条满足上例条件的曲线段所围成的, 因此这样的区域都是可求面积的.

例题 22.1.2 设有界非负函数 f 在区域 D 上可积, 证明

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \tag{22.2}$$

的充分必要条件是 f 在其连续点处的值均为零 (参见上册 333 页题 9).

证 先证必要性. 用反证法. 若不然, 存在 $\boldsymbol{p}_0(x_0, y_0) \in D$, f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点连续, 且 $f(x_0, y_0) > 0$, 由连续函数的局部保号性定理知存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x, y) > \frac{1}{2} f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in O_\delta(\boldsymbol{p}_0) \subset D.$$

于是

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \geqslant \iint_{O_\delta(\boldsymbol{p}_0)} \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \delta^2 f(x_0, y_0) > 0,$$

与 (22.2) 矛盾.

再证充分性. 设 $f(x, y)$ 在其连续点处的函数值为 0. 对任意分划 T 中可求面积的小区域 σ_i, 如 $\Delta\sigma_i > 0$, 则 σ_i 不是零测度集. 由可积充要条件知在每一个 σ_i 上至少有 f 的一个连续点, 记之为 (ξ_i, η_i), 作和数 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = 0.$$

于是

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = 0. \quad \square$$

例题 22.1.3 设 D_R 是由 $x=R$, $y=0$, $y=\dfrac{2}{R}x-1$ 围成, 求

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} \mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 在图 22.1 中作出了区域 D_R 的图形. 由于函数 $\mathrm{e}^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}$ 在 D_R 上连续, 由积分中值定理, 存在 $(\xi,\eta)\in D_R$, 使得

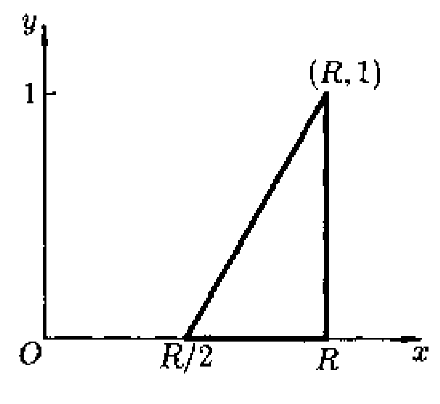


图 22.1

$$\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}\cdot|D_R|$$
$$=\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi},$$

其中 $\dfrac{R}{2}\leqslant\xi\leqslant R, 0\leqslant\eta\leqslant1$. 于是当 $R\to+\infty$ 时

$$\left|\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-R/2}\arctan\frac{\eta}{\xi}\longrightarrow0.\quad\square$$

22.1.3 思考题

1. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 D 上可积, 证明 $f(x,y)g(x,y)$ 也在 D 上可积. 设 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且 $f(x,y)\neq0$, 证明 $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 也在 D 上可积.
2. 设 $u=u(x,y)$ 在 D 上可积, $f(u)$ 是 u 的连续函数, 证明 $f(u(x,y))$ 在 D 上可积. 如果 $f(u)$ 仅仅是 u 的可积函数, $f(u(x,y))$ 是否一定在 D 上可积?
3. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 D 上有界, 且在 D 上除了一个零面积集外处处相等, 证明 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上有相同的可积性, 可积时有相同的积分值. 如果 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上除了一个零测度集外处处相等, 情况又如何?
4. 如果 $f(x,y)$ 在 $\widetilde{D}\subset D$ 上有界可积, 且 $D\setminus\widetilde{D}$ 为零面积集. 我们可以认为 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且其积分值就取 $f(x,y)$ 在 $\widetilde{D}$ 上的积分值. 讨论:

   (1) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{(x^2-1)^2+(y^2-1)^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上;

   (2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{1}{y-x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上

   的可积性.

22.1.4 练习题

1. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 都是 D 上的可积函数, 证明

$$h(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

   也是 D 上的可积函数.

2. 设 $f(x,y)$ 在 $p_0(x_0,y_0)$ 的某邻域中连续, 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. 证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

4. 证明

$$\iint\limits_{D} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\ln 2\int_{1}^{2} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 D 为 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ 在第一象限所围成的区域.

§22.2 二重积分的计算

22.2.1 矩形区域上的二重积分

矩形上的二重积分在一定条件下可以化为二次积分进行计算.

设 $f(x,y)$ 在矩形 $A=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对每个固定的 $x\in[a,b]$, 积分

$$\varphi(x)=\int_{c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{a}^{b}\mathrm{d}x\int_{c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由此可以看出, 若 $f(x,y)$ 在 A 上连续, 则两个二次积分是相等的 (都等于二重积分), 积分值与积分顺序无关. 但积分顺序不同时, 积分的难度可能相差很大. 请看下面的例子.

例题 22.2.1 设 $A=[0,1]\times[0,1]$, 求

$$I=\iint\limits_{A}\frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

解 先对 y 后对 x 积分, 得到

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

先对 x 后对 y 积分则得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(2+y^2)^{1/2}} \qquad (\sqrt{2+y^2}=t) \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \quad \square
\end{aligned}
$$

在 f 不满足可积或累次可积的条件时, 情况就比较复杂, 请看下面反例.

例题 22.2.2 设函数 f 定义在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上,

$$
f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ 2y, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\end{cases}
$$

则 (1) f 在 A 上不可积;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 不存在.

证 (1) $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[0,1]$ 上处处不连续, 所以 $f(x,y)$ 在 A 上的 $y\neq\frac{1}{2}$ 的每点处都不连续. 于是 f 在 A 上不可积.

(2) 由于

$$
\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ \displaystyle\int_0^1 2y\,\mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\end{cases}
$$

所以

$$
\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x=1.
$$

另一方面, 对 $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的一元函数, 在 $[0,1]$ 上每一点都不连续, 于是 $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对每个 $y\neq\frac{1}{2}$ 都不存在, 从而

$$
\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x
$$

不存在. $\square$

类似地, 也有二重积分存在, 但两个二次积分不存在以及两个二次积分存在且相等, 但二重积分不存在的例子.

22.2.2 一般区域上的二重积分

设 f 是区域 D 上的可积函数, 又设 D 可以表示为 $\boldsymbol{x}$ **型区域**:

$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为 x 的函数, 且对每一个固定的 $x\in[a,b]$, 积分

$$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 f 在 D 上的二重积分可化为先对 y 后对 x 的积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

同样地, 如果区域 D 可以表示为 $\boldsymbol{y}$ **型区域**

$$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中 $x_1(y)$, $x_2(y)$ 为 y 的函数, 且对每一个固定的 $y\in[a,b]$, 积分

$$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

存在, 则 $\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 并且

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

对于一般区域, 如区域可分成若干个不相交的 x 型区域和 y 型区域的并, 则可先分别计算这些区域上积分的值, 然后通过积分的区域可加性求原积分的值.

在具体计算时, 应根据积分区域和被积函数的情况, 以方便计算为原则, 权衡利弊, 决定采用哪种积分区域的分解与积分顺序. 画出积分区域的草图往往有助于做出正确的选择.

例题 22.2.3 设区域 $D=\{(x,y)\mid 2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4y, x\geqslant 0\}$. 分别将 D 表示为 x 型区域和 y 型区域.

解 (1) 表示为 x 型区域, D 可分为三块 (见图 22.2), 其中

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 1-\sqrt{1-x^2},\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2},\end{cases}$$

$$D_3=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

(2) 表示为 y 型区域, D 可分为两块 (见图 22.3), 其中

$$E_1 = \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ \sqrt{2y - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4y - y^2}, \end{cases} \quad E_2 = \begin{cases} 2 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4y - y^2}. \end{cases}$$ □

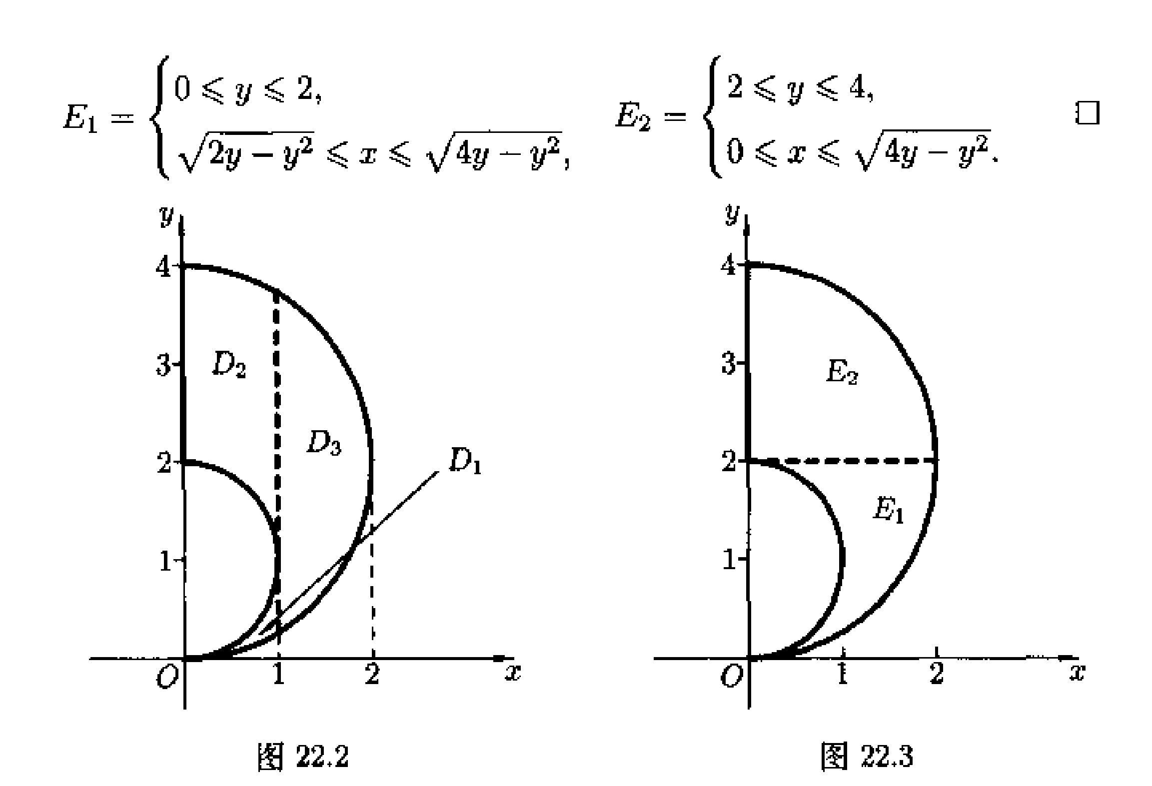


图 22.2　　图 22.3

当 $f(x, y)$ 中含有 $x^2 + y^2$ 项或 D 的边界表达式中有 $x^2 + y^2$ 项, 则可利用

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{22.3}$$

先化为极坐标下的二重积分, 然后化为关于 r 和 θ 的二次积分去求解.

例题 22.2.4 将例题 22.2.3 中的区域 D 分解为 θ 型区域与 r 型区域.

解 在极坐标系中, D 的边界

$$x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 4y,\ x = 0$$

分别为

$$r = 2\sin\theta,\ r = 4\sin\theta,\ \theta = \frac{\pi}{2}.$$

于是表示为 θ 型区域是

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 2\sin\theta \leqslant r \leqslant 4\sin\theta;$$

表示为 r 型区域为 (见图 22.4):

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 2, \\ \arcsin\dfrac{r}{4} \leqslant \theta \leqslant \arcsin\dfrac{r}{2}, \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 2 \leqslant r \leqslant 4, \\ \arcsin\dfrac{r}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$ □

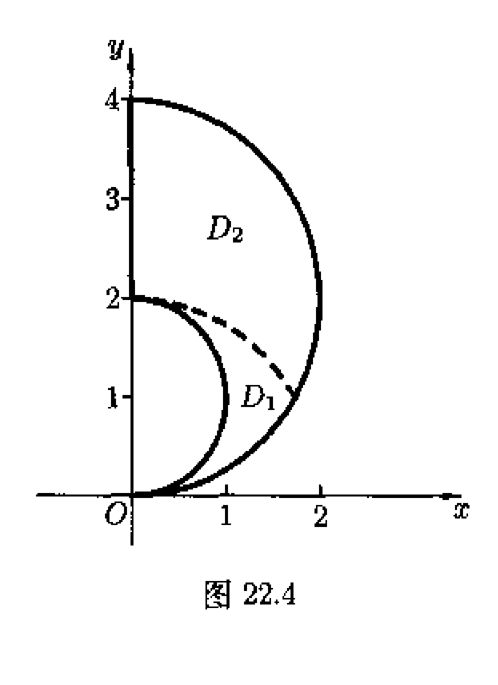


图 22.4

例题 22.2.5 求 $\lim\limits_{R \to +\infty} \iint\limits_{\substack{|x| \leqslant R \\ |y| \leqslant R}} (x^2 + y^2) \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

解 记

$$I_R=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|y|\leqslant R}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$C_R=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则 $C_R\leqslant I_R\leqslant C_{2R}$, 且

$$\begin{aligned}C_R&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^{R^2}t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}-R^2\mathrm{e}^{-R^2})\longrightarrow\pi\quad(R\to+\infty).\end{aligned}$$

同理可证 $C_{2R}\to\pi\quad(R\to+\infty)$. 于是

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=\pi.\quad\square$$

例题 22.2.6 作极坐标变换, 将二重积分

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

化为定积分, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_D f(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}f(r)r\,\mathrm{d}\varphi+\int_1^{\sqrt2}\mathrm{d}r\int_{\arccos(1/r)}^{\pi/4}f(r)r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(r)r\,\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt2}(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r})f(r)r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt2}f(r)r\,\mathrm{d}r-\int_1^{\sqrt2}\arccos\frac{1}{r}f(r)r\,\mathrm{d}r.\quad\square\end{aligned}$$

22.2.3 二重积分的变量替换

极坐标变换 (见(22.3)式) 是一种特殊的变量替换, 下面是一般的变量替换定理. 设

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad (u,v)\in D',$$

这一代换满足:

(1) 建立了 D 与 D' 之间的一一对应;

(2) x,y 在 D' 内具有关于各个变元的连续偏导数, 并且其逆变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在 D 内也具有关于各个变元的连续偏导数;

(3) 代换的 Jacobi 行列式 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D' 内无零点 (称这代换为正则), 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{22.4}$$

回忆一下 (一元) 定积分的变量替换公式, 容易看出公式 (22.4) 是定积分的变量替换公式的推广. 定理的证明要比一元情况复杂得多, 请参考相应的教科书.

例题 22.2.7 求由曲线 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围的面积.

解 应用广义极坐标变换

$$x=a\rho\cos\theta,\quad y=b\rho\sin\theta,$$

则 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ab\rho$, 所围成积分区域的曲线变为 $\rho^2=\cos 2\theta$ (双纽线), 于是所求的面积

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}ab\rho\,\mathrm{d}\rho=ab. \quad \square$$

例题 22.2.8 求 $\displaystyle\iint\limits_{D}\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}=1$ 和 $x=c,\ y=c$ 所围成, 并且 $a,b,c>0$.

解 见图 22.5, 被积函数与积分区域的部分边界具有相同的形式, 因此要设法把被积函数表达式化成简单的形式.

令

$$x=c+a\rho\cos^4\theta,\quad y=c+b\rho\sin^4\theta,$$

则

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

而积分区域变为 $\{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 1\}$, 于是

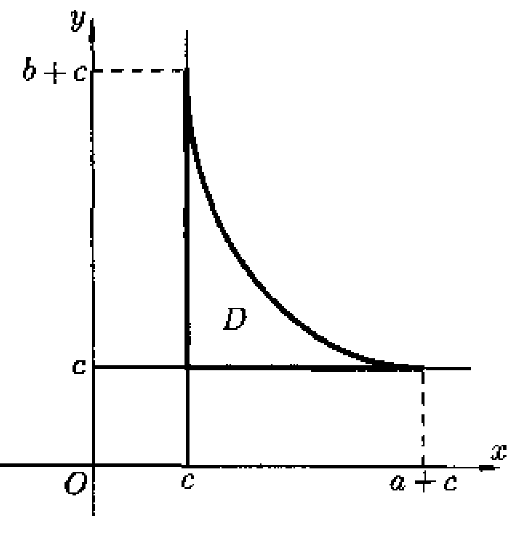


图 22.5

$$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\frac{2ab}{15}. \quad \square$$

注 一般而言, 广义极坐标变换

$$x=\frac{1}{a}(c+r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta),\quad y=\frac{1}{b}(d+r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta),$$

能把 $(ax-c)^p+(by-d)^p$ 变为 r, 但其中的 r, θ 一般不再具有通常的极径, 极角的意义.

例题 22.2.9 求 $I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.

解 积分区域如图 22.6, 作变换

$$u=x+y,\quad v=y,$$

则变换后的积分区域为

$$4\leqslant u\leqslant 12,$$

$$-1-\sqrt{2u+1}\leqslant v\leqslant -1+\sqrt{2u+1},$$

且 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_4^{12}u\,\mathrm{d}u\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}\mathrm{d}v\\&=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\,\mathrm{d}u\quad(\sqrt{2u+1}=t)\\&=\int_3^5(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t=\frac{8\,156}{15}.\quad\square\end{aligned}$$

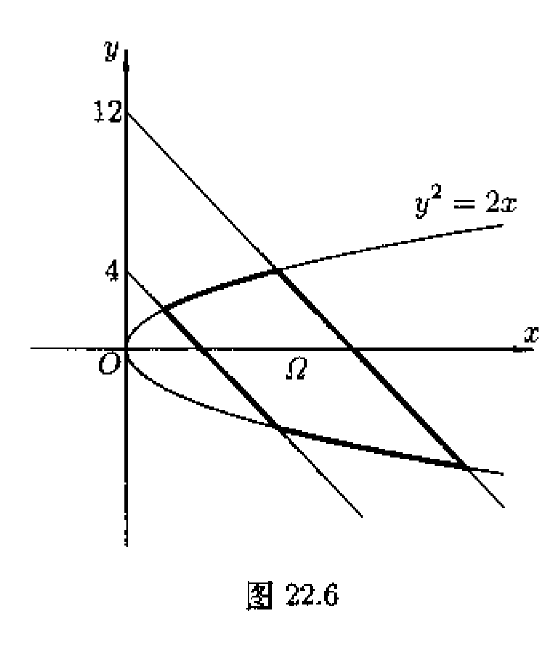


图 22.6

函数的奇偶性和积分区域的对称性常可用来简化积分的计算, 如

1. 积分区域 D 关于 x 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{y\geqslant 0\}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. 积分区域 D 关于 y 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{x\geqslant 0\}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. 若 D 关于原点对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D_1 是区域 D 的一半.

22.2.4 练习题

1. 试把累次积分

$$I=\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

改写为先对 x 后对 y 的累次积分形式.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. D 由 $y=\pi-x,\ x=\pi,\ y=\pi$ 围成, 求 $\displaystyle\iint_D\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. D 由 $y=0,\ y=x^2,\ x+y=2$ 围成的第一象限的部分, 求 $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 求由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), z=x^2-y^2, z=0$ 围成之立体的体积.

6. 设 D 是由 $x^2=ay, x^2=by, y^2=px, y^2=qx$ 所围成的区域, 其中 $0<a<b, 0<p<q$, 求 $\displaystyle\iint_D\frac{x^2\sin xy}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. 证明 $\displaystyle\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^y(y-x)^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_a^b(b-x)^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

8. 设 D 是第一象限内由 y 轴及两个圆 $x^2+y^2=a^2, x^2-2ax+y^2=0$ 所围成的区域, 求 $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9. 求由四条直线 $x+y=p,\ x+y=q,\ y=ax,\ y=bx\ (0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的图形的面积.

10. 求由曲线 $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$ 与直线 $x=0,\ y=0$ 所围成图形的面积.

11. 求 $\displaystyle\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |y|\leqslant|x|\leqslant 1\}$.

12. 求 $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $xy=1, x^2+y^2=4$ 围成.

13. 给定积分 $I=\displaystyle\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 作正则变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$, 区域 D 变为 Ω, 如果变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明

$$I=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

14. 求积分

$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x.$$

15. 证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (\sqrt{|xy|}+|xy|)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{2}.$$

16. 计算二重积分

$$I = \iint\limits_D |x-y^2|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

17. 求 $\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=x$, $y=1$, $x=2$ 围成的三角形.

§22.3 三重积分, n 重积分

三重积分的定义与二重积分类似, 这里不再重复.

22.3.1 三重积分在直角坐标系中的计算

1. 先一后二: 即先做一次关于某个变量的单积分, 然后做关于另外两个变量的二重积分.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界区域, 假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界相交不多于两点. 把 Ω 投影到 x,y 平面上, 得一平面闭区域 D, 即 (见图 22.7):

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D, \\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\},$$

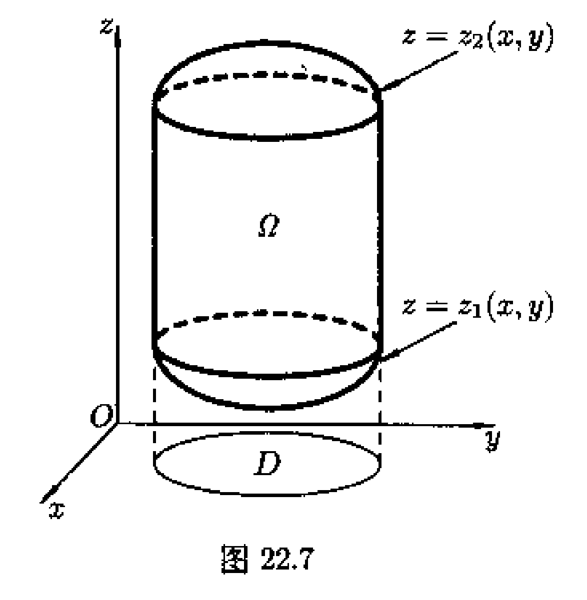


图 22.7

其中 $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ 在 D 上连续. 如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界可积, 且对任意 $(x,y)\in D, f(x,y,z)$ 作为 z 的函数在 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ 上可积, 则

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, \mathrm{d}z$$

此种积分方法称为 “先一后二”.

2. 先二后一: 即先作关于某两个变量的二重积分, 然后做关于另一个变量的单积分. 这种积分方法对区域没有任何特殊要求. 设

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid a \leqslant z \leqslant b, (x,y) \in D(z)\},$$

其中 $D(z)$ 是 x,y 平面上随 z 连续变化的有界闭区域. 如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界可积, 对任意 $z \in [a,b]$, $f(x,y,z)$ 作为 x,y 的函数在 $D(z)$ 上可积, 则

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

对这个公式可这样来理解: 把 Ω 看作是一个物质立体, $f(x,y,z)$ 为物质在 Ω 上的分布密度, 那么上式左端的三重积分就是物质立体的质量. 而上式右端则表明先把立体切成薄片, 再把所有薄片的质量积累起来.

当然, 我们不一定非固定 z 而先做关于 x,y 的二重积分不可, 也可根据被积函数的具体情况和积分域的构成, 把 y (或 x) 固定而先做关于 z,x (或 y,z) 的二重积分.

例题 22.3.1 求积分

$$I = \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为两个球 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ 的公共部分.

解 先画出积分区域, 如图 22.8.

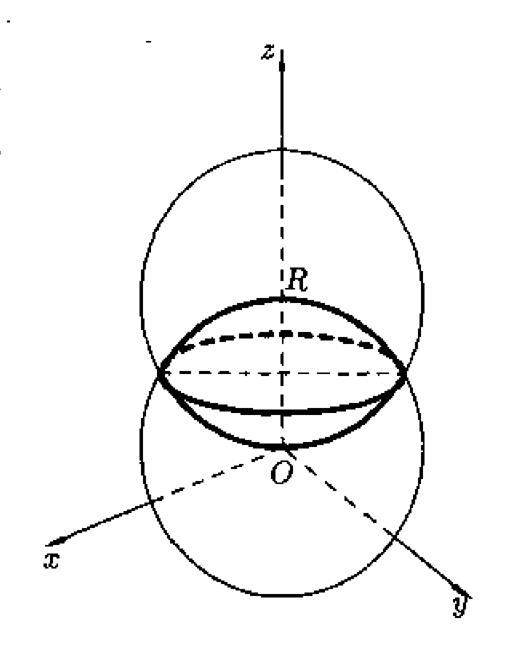


图 22.8

综合被积函数和积分区域, 可把积分视成在 $z \in [0,R]$ 上一系列带权 z^2 的小薄片的求和. 根据积分区域 Ω 的构成情况, 可将 Ω 分成两个子区域 Ω_1 与 Ω_2.

$$\Omega_1: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz, \\ 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{R}{2}, \end{cases}$$

$$\Omega_2: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, \\ \dfrac{R}{2} \leqslant z \leqslant R, \end{cases}$$

当 $z \in [0, \frac{R}{2}]$ 时, 由 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ 可得到薄片面积为 $\pi(2Rz-z^2)$;

当 $z \in [\frac{R}{2}, R]$ 时, 由 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 可得到薄片面积为 $\pi(R^2-z^2)$. 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R/2} \pi z^2(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{R/2}^R \pi z^2(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi R z^4 - \frac{1}{5}\pi z^5\right)\Big|_0^{R/2} + \left(\frac{1}{3}\pi R^2 z^3 - \frac{1}{5}\pi z^5\right)\Big|_{R/2}^R = \frac{59}{480}\pi R^5. \quad \square \end{aligned}$$

22.3.2 三重积分的变量替换

类似于二重积分的变量替换, 有如下三重积分变量替换定理. 设

$$x = x(u,v,w),\ \ y = y(u,v,w),\ \ z = z(u,v,w),\quad (u,v,w) \in \Omega'.$$

这一代换满足:

(1) 建立了 Ω 与 Ω' 之间的一一对应;

(2) x,y,z 在 Ω' 内关于各个变元有连续偏导数, 并且逆变换 $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$ 在 Ω 内也关于各个变元有连续偏导数;

(3) 代换的 Jacobi 行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 在 Ω' 内没有零点, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

常用的三重积分变换有

柱坐标变换

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta,\ \ z = z,$$
$$0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

空间直角坐标系下的三重积分与柱坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

如果积分区域为柱形或被积函数中含有 x^2+y^2 项, 则往往将积分在柱坐标系中计算. 在计算时, 常常是把三重积分化为对 z 的单积分与关于 ρ,θ 的二重积分来计算, 至于是 "先一后二", 还是 "先二后一", 那要看具体情况.

我们可以看出, 柱坐标变换就是 z 不变, 而将 x,y 用极坐标变换. 在二重积分中我们曾提到广义极坐标变换, 因此对应过来也有广义柱坐标变换.

球坐标变换

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \rho < +\infty,\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

空间直角坐标系下的三重积分与球坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

注 利用球坐标系计算三重积分, 一般说来适用于积分区域是球心在原点或过原点而球心在坐标轴上的球体, 顶点在原点以坐标轴为旋转轴的圆锥体以及被积函数中出现 $x^2+y^2+z^2$ 的三重积分.

使用球坐标时对 ρ, θ, φ 的几何意义要十分清楚. 比如在我们上面给出的球坐标变换下, ρ 是球半径 $(0 \leqslant \rho \leqslant +\infty)$, θ 是转动角 $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, φ 是仰角 (与 z 轴正向的夹角, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$). 在有的教科书上给出了几种不同的球坐标系, 建议

只取一种记忆, 以免混淆. 此外对应于二重积分的广义极坐标变换, 也有广义球坐标变换.

22.3.3 例题

例题 22.3.2 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由 $x=0, x=1, x^2+1=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}$ 所围成.

解 由积分区域 (见图 22.9) 的构成宜采用 "先二后一" 的积分次序.

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D(x)=\{\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1+x^2\}$. 对于二重积分 $\iint\limits_{D(x)}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 由于 $D(x)$ 在 yOz 平面上的投影关于原点对称, 且 $f(y,z)=y=-f(-y,-z)$. 由 22.2.3 节中最后一部分关于简化积分的说明知 $\iint\limits_{D(x)}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$, 而

图 22.9

$$\iint\limits_{D(x)}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi abx(1+x^2).$$

于是

$$I=\pi ab\int_0^1 x(1+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\pi ab.\quad\square$$

例题 22.3.3 计算积分

$$H=\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}}\frac{xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}},\quad \text{其中 } a>b>c>0.$$

解 在球坐标下

$$H=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R\frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}.$$

令 $\sin^2\varphi=u$, $\sin^2\theta=v$, 则

$$H=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^R r^4\frac{u\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u(1-v)+b^2uv+c^2(1-u)}}$$

$$=\frac{1}{20}R^5\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}}$$

$$=\frac{1}{20}R^5\int_0^1\left\{\frac{2}{(b^2-a^2)u}\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}\right\}\Bigg|_{v=0}^{v=1}u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\int_0^1\left\{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)u}-\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u}\right\}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left\{\frac{2}{3(b^2-c^2)}[c^2+(b^2-c^2)u]^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3(a^2-c^2)}[c^2+(a^2-c^2)u]^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left[\frac{2}{3(b^2-c^2)}(b^3-c^3)-\frac{2}{3(a^2-c^2)}(a^3-c^3)\right]$$

$$=\frac{R^5}{15}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2+bc+c^2}{b+c}-\frac{a^2+ac+c^2}{a+c}\right)$$

$$=\frac{R^5}{15}\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\quad\square$$

例题 22.3.4 设 $H(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, 其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶正定对称阵. 求

$$I=\iiint\limits_{H(x)\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sqrt{H(x)}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

解 存在 3 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0, i=1,2,3$. 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 这里 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^3$, 则

$$H(\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$$

且变换的 Jacobi 行列式 $\det\boldsymbol{P}\equiv 1$. 从而

$$I=\iiint\limits_{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2}}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3.$$

令

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}r\sin\varphi\cos\theta,\quad y_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$y_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}r\cos\varphi,$$

则

$$I = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 r^2e^r\sin\varphi\, dr$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_0^1 r^2e^r\, dr = \frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}(e-2).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 所以

$$I = \frac{4\pi}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}}}(e-2). \quad \square$$

注 正交变换是一种很有用的坐标变换. 它的特点是刚体变换, 仅仅旋转坐标轴, 保持区域体积不变. 特别是保持单位球不变.

22.3.4 n 重积分

以四重积分为例, 按照三重积分的思路, 可以采用 "先一后三" 或者 "先三后一" 或者 "先二后二" 的积分次序, 而对于其中的 "三" 或者 "二", 则采用三重积分或者二重积分化累次积分的方法. 也可以用四维的变量替换.

例题 22.3.5 求四维空间中的单位球

$$x^2+y^2+z^2+t^2 \leqslant a^2$$

的体积 V.

解 用四维空间中的球坐标变换

$$x = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\theta, \tag{22.5}$$

$$z = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \qquad t = r\cos\varphi_1, \tag{22.6}$$

其中 $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $0\leqslant\varphi_1$, $\varphi_2\leqslant\pi$. 则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(r,\varphi_1,\varphi_2,\theta)}\right| = r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2.$$

于是

$$V = \iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+t^2\leqslant a^2} dx\, dy\, dz\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi_1\int_0^{\pi} d\varphi_2\int_0^{a} r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2\, dr$$
$$= \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2 = \frac{\pi^2a^4}{2}. \quad \square$$

22.3.5 练习题

1. 计算积分

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-z-x}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\, dy.$$

2. 将累次积分

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 \mathrm{d}y \int_0^x f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

化为在柱坐标系下的累次积分.

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z$, $x=0$ 绕 z 轴旋转而成的曲面, 平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 所围成的区域.

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2 \leqslant 4$ 的公共部分, 且 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

5. 求 $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{r}$, 其中 Ω 为一半径为 R 的球, r 为球外一固定点到球域内任一点的距离.

6. 计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 与平面 $z=0$ 所围成, 曲面在上方, 平面在下方.

7. 求

$$\iiiint\limits_{\substack{x,y,z,u\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant 1}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u.$$

8. 设

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 f 为连续函数, $f(1)=1$. 证明 $F'(1)=4\pi$.

9. 设 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 由 $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ 和 $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16$ 所确定, 试计算函数 f 关于 Ω 的积分平均值

$$\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积.

10. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$, $z=0$, $xy=1$, $xy=2$, $y=3x$, $y=4x$ 所围成, 求积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

11. 利用正交变换计算三重积分 $\iiint\limits_{V} \cos(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. 其中 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, a,b,c 是不全为零的常数.

§22.4 广义重积分

22.4.1 广义重积分的定义

与第十二章类似, 对于重积分, 也可作两方面的推广: 无界区域上的积分和无界函数的积分. 我们仅考虑 $\mathbf{R}^2$ 的情况, 其结论很容易推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 中去.

先考虑无界区域上的广义二重积分.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成. 函数 f 定义在 D 上, 且在 D 的任何可求面积的有界子区域上可积. 设 D_r 是 D 的任一可求面积的有界子区域, 包含 $D\cap B_r$, 其中 B_r 是 $\mathbf{R}^2$ 中以 r 为半径的闭圆盘. 若极限

$$I=\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 D_r 的取法无关, 则称 f 在 D 上的 (广义) **积分收敛**, 或者称 f 在 D 上**广义可积**. 否则称 f 在 D 上的 (广义) **积分发散**. 极限值 I 称为 f 在 D 上的**广义积分的值**, 记为 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

如果函数 f 非负, 且在 D 上的任何可求面积的有界子区域上可积, D_n 是包含 $D\cap B_n,\ n=1,2,\cdots$ 的一列可求面积的有界子区域, 则 f 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在. 这个条件也相当于

$$\sup_{n}\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<+\infty.$$

无界函数在有界区域上的广义二重积分可定义如下:

设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的可求面积的有界区域, 点 $\boldsymbol{p}_0\in D$, 函数 f 定义在 $D\setminus\{\boldsymbol{p}_0\}$ 上, 且对任何 $\boldsymbol{p}_0$ 点的可求面积的邻域 Δ, f 在 $D\setminus\Delta$ 上有界可积. 如果

$$I=\lim_{d(\Delta)\to 0}\iint\limits_{D\setminus\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 Δ 的取法无关, 其中 $d(\Delta)$ 是 Δ 的直径, 则称 f 在 D 上的 (广义) **积分收敛**, 或者称 f 在 D 上 **广义可积**. 否则称 f 在 D 上的 (广义) **积分发散**. 极限值 I 称为 f 在 D 上的**广义积分的值**, 记为 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

注 在上述定义中, 函数 f 在 D 内有一个奇点可改为在 D 内有一条奇线 γ, 即曲线 γ 上每一点都是 f 的奇点. 设 D_l 是任意可以将 γ 围起来的可求面积区

域, 设 f 在 $D\setminus D_l$ 中可积. 令 D_l 收缩为 γ, 记为 $D_l\to\gamma$, 如果极限

$$\lim_{D_l\to\gamma}\iint\limits_{D\setminus D_l} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 D_l 的取法无关, 则称 f 在 D 上可积. 设 l 为 D_l 的边界, 其中 D_l 收缩为 γ 可理解为

$$\sup_{x\in l}\operatorname{dist}\{x,\gamma\}\to 0.$$

对于非负函数, 也有与有界区域上广义重积分类似的可积充要条件.

22.4.2 收敛性判别法

由上节关于非负函数可积的充要条件, 我们可以得到如下收敛性判别法:

比较判别法 设 D 为无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成. 函数 f, g 在 D 上有定义, 对于 D 的任一可求面积的有界子区域 D_r, f, g 均在 D_r 上有界可积, 如果 g 非负, 且

$$|f(x,y)|\leqslant g(x,y),\quad \forall\,(x,y)\in D.$$

则当 g 在 D 上 (广义) 可积时, f 也在 D 上 (广义) 可积. 反之, 如果

$$|f(x,y)|\geqslant g(x,y),\quad \forall\,(x,y)\in D,$$

则当 g 在 D 上的广义积分发散时, f 在 D 上的广义积分也发散.

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 并取 $g(x,y)=\dfrac{C}{r^p}$, C 为常数, 由上述比较判别法可得如下判别法:

Cauchy 判别法 设 D 为无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成, f 在D 的任一可求面积的有界子区域上可积, 则

(1) 如果对充分大的 r, 有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{C}{r^p},\quad p>2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 收敛.

(2) 如果 D 内含有一个顶点在原点的无限扇形: $D'=\{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r\geqslant r_0\}$, 且在 D' 上,

$$|f(x,y)|\geqslant\frac{C}{r^p},\quad p\leqslant 2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 发散.

与一元函数在无限区间上的广义积分不同, 广义重积分的收敛性判别有一个重要特点: 积分的收敛与绝对收敛是等价的. 证明可见 [9, 19] 等.

对于无界函数在有界区域上的广义二重积分, 讨论是类似的.

22.4.3 例题

例题 22.4.1 计算 $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 并求 Poisson 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数为 e^{-r^2}. 当 $r \to +\infty$ 时, 它比任何 $\frac{1}{r^p}$ $(p > 2)$ 都更快地趋于零, 所以广义二重积分是收敛的.

取同心圆族

$$\Omega_\rho = \{x^2 + y^2 \leqslant \rho^2\},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{\rho\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_\rho} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\rho\to+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\rho} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \lim_{\rho\to+\infty} \pi(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}) = \pi.\end{aligned}$$

在上述计算中, 如果取正方形族

$$\Omega_l = \{-l \leqslant x \leqslant l, -l \leqslant y \leqslant l\},$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{l\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_l} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{l\to+\infty} \left\{\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right\} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right\}^2.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

注 Poisson 积分中 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, Poisson 敏锐地观察到极坐标下二重积分有因子 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, 由此出发他给出了上述巧妙的算法 ①.

例题 22.4.2 讨论广义重积分

$$I = \iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$$

的收敛性, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$. 当积分收敛时, 求积分的值.

解 由于被积函数恒正, 因此可以取任一列趋于 D 的有界区域列, 使得积分容易计算, 为此取

$$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant x+y \leqslant n\},$$

① Poisson 积分也称为 Euler-Poisson 积分. 该积分的其他计算方法在前面已有介绍, 参见上册 392 页例题 12.3.7, 第十六章例题 16.1.2.

则

$$I_n = \iint\limits_{D_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$$

作变量替换 $x=u, x+y=v$, 则

$$I_n = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_1^n \frac{\mathrm{d}v}{v^p} = \frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1).$$

从而当 $p>1$ 时, 积分收敛, 且

$$\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p} = \frac{1}{p-1}. \quad \square$$

注 如果取

$$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1,\ y \leqslant n\},$$

则计算要复杂得多.

例题 22.4.3 证明广义二重积分

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 1\\ y\geqslant 1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

发散.

证 我们将证明在无限扇形 $D' = \{(x,y) \mid 2y \leqslant x \leqslant 3y, x \geqslant 1, y \geqslant 1\}$ 上

$$\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \geqslant \frac{C}{r^2},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, C 为正常数. 事实上当 $2y \leqslant x \leqslant 3y$ 时,

$$4y^2 \leqslant x^2 \leqslant 9y^2, \quad 3y^2 \leqslant x^2-y^2 \leqslant 8y^2, \quad 5y^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 10y^2,$$

从而

$$x^2-y^2 \geqslant 3y^2 = \frac{3}{10}\cdot 10y^2 \geqslant \frac{3}{10}(x^2+y^2).$$

于是

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \geqslant \frac{3}{10r^2},$$

所以原广义二重积分发散. $\square$

22.4.4 练习题

1. 讨论下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域, $\{D_n\}$ 是 D 中的单调增加的闭区域序列, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=D$. 若 f 在 D 上非负, 且在每一个 D_n 上可积, 证明:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义. (提示: 设 D 和 $D_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为可求面积的有界闭区域时结论已经成立.)

3. 计算下列积分: $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

4. 讨论下列二重广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 D 由条件 $|y|\leqslant x^2, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}$; (3) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续, 讨论

$$\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^p}$$

的收敛性, 其中 $D=[a,A]\times[b,B]$.

6. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D\ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=0,\ y=x,\ x=\pi$ 所界定.

§22.5 重积分的应用举例

除前面提到的用重积分计算曲面所围的空间几何体的体积和物体的质量外, 重积分还有许多其他应用. 本节再举一些例子.

22.5.1 几何应用

类似于上册 §11.1 节所介绍的, 几何、物理上计算重积分时也经常采用比较简捷的产生积分的方法——**微元法**. 即根据计算的目的把问题归结到一系列

很小的面积元素或体积元素 (微元)上, 然后对这些微元进行相应的几何或是物理量的分析, 分析完后把得到的对每个特定的微元的结果看成为带 "权" 的微元 (当然此时的 "权" 与位置有关), 然后按面积或体积求和. 比如前面的先一后二的计算三重积分的方法可看成在给定区域 D 上每一个带 "权" 的 "小竖条" $\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的求和. $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z$ 可看成 "高度", $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 表示微元的底面积. 先二后一的计算方法则是在区间上具有带 "权" 面积的 "小薄片" $\left(\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$ 的求和. $\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 可视为 "面积", $\mathrm{d}z$ 是微元的厚度. 在引力计算中, 就要考虑每个引力微元, 它是体积微元所受到的引力. 微元法思维对准确、快速计算重积分十分有用. 下面先介绍微元法在几何应用中的一些例子.

旋转体的体积

例题 22.5.1 设 V 是由曲线 $x=\varphi(z)$, $a\leqslant z\leqslant b$ 绕 z 轴旋转而得的体积, 这里曲线不与 z 轴相交且旋转体被 $z=a$ 和 $z=b$ 所围住. 证明公式

$$V=\pi\int_a^b \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z.$$

证 把 V 视为一个由一系列垂直于 z 轴的小薄片 (小圆盘) 所组成的体积, 则在 z 处, 圆盘面积为 $\pi\varphi^2(z)$, 厚度为 $\mathrm{d}z$, 薄片体积微元为 $\mathrm{d}V=\pi\varphi^2(z)$, 因而

$$V=\pi\int_a^b \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z.$$

曲面的面积 曲面面积的定义需小心对待, 见相应的教科书或 25.1.1 小节. 我们这里用微元法给出一些曲面的计算公式. 假定曲面面积是存在的.

先设曲面 S 由方程

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

表示, 其中 D 是平面上可求面积的有界区域, $f(x,y)$ 是连续可微函数. 给定平面上一个小的可求面积区域 ΔD, 我们用 "以平代曲" 的方法计算其对应的曲面微元 ΔS, 即计算 S 对应于 ΔD 那部分的切平面面积, 以之取作 ΔS 的近似值. 为此取 $(\xi,\eta)\in\Delta D$. 设 S 在 $(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

再记对应于 ΔD 那部分的切平面面积为 $\Delta\sigma$, 则由投影定理

$$\Delta\sigma=\frac{\Delta D}{|\cos\gamma|}.$$

根据法向量的表达, 有

$$\boldsymbol{n}=(f_x(\xi,\eta),f_y(\xi,\eta),\pm1).$$

因此

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}}.$$

即

$$\Delta S \approx \Delta\sigma = \sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}\Delta D.$$

这样我们就得到了**面积微分**

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

曲面面积即为

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果曲面 S 由参数方程

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v)\in D$$

表示, 其中 D 是参数平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

因而

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

例题 22.5.2 设连续曲线 $z=\varphi(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 绕 z 轴旋转所得曲面为 Σ. 求 Σ 的面积 S.

解 用柱坐标把 Σ 参数化, 有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \varphi(r),$$
$$a\leqslant r\leqslant b, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

故

$$E = 1+(\varphi'(r))^2, \quad F=0, \quad G=r^2.$$

$$S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}\,\mathrm{d}r. \quad \square$$

注 如果以 $z=\varphi(x)$ 的曲线弧长 s 为参数, 而以 $u(s)$ 表示 s 处曲线到 z 轴的距离, $u'(s)\geqslant 0$, $0\leqslant s\leqslant l$. 设 $u(0)=a$, $u(l)=b$, 则 Σ 的参数方程为

$$x = u(s)\cos\theta, \quad y = u(s)\sin\theta, \quad z = \varphi(u(s)),$$
$$0\leqslant s\leqslant l, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

故

$$S = 2\pi\int_0^l \sqrt{1+(\varphi'(u(s)))^2}\cdot u'(s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 l 为曲线的弧长. 平面曲线 $z=\varphi(x)$ 在弧长参数下质心的 x 坐标

$$X_c = \frac{1}{l}\int_0^l \sqrt{1+(\varphi'(u(s)))^2}\cdot u'(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此我们重新得到了 Guldin 第一定理 (见上册 342 页命题 11.1.2)

$$S = 2\pi X_c\cdot l.$$

如果曲面 S 的密度函数为 $f(x,y,z)$, 则其质量为

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

移动曲面扫过的体积 下面考虑一个稍微复杂一点的几何问题.

例面 22.5.3 设 V 是这样的几何体, 它是由参数曲面 $\Sigma_t:\varphi(x,y,z)=t$ 自 t 从 a 到 b 所扫成的, 证明 V 的体积

$$|V| = \int_a^b\left(\iint\limits_{S_t}\frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}}\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t, \tag{22.7}$$

其中 S_t 表示曲面 Σ_t 所对应的曲面区域, $\mathrm{d}S$ 表示曲面 Σ_t 的面积微分.

证 关键是考虑 t 到 $t+\Delta t$ 时沿 $\varphi(x,y,z)=t$ 的法向距离的移动. 注意到此时的曲面 Σ_t 在 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z).$$

考虑曲面随参数 t 的变化的性质. 设 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 表示了 Σ_t 中一串连续可微变化的质点, 则质点速度为 $(x'(t),y'(t),z'(t))$. 注意到质点总满足 $\varphi(x(t),y(t),z(t))=t$, 因而又有

$$1 = \varphi_x x'(t)+\varphi_y y'(t)+\varphi_z z'(t).$$

所以从运动角度看 (x,y,z) 处的法向速度 (即速度在法向上的投影) 为

$$C = \frac{\varphi_x x'(t)+\varphi_y y'(t)+\varphi_z z'(t)}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}}.$$

按微元法, 在 Δt 时间内 Σ_t 所移厚度为 Σ_t 的面积 $\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S$ 乘以 Δt 的法向分量 $C\Delta t$. 从面

$$|V| = \int_a^b\left(\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t. \quad \square$$

注 (22.7) 是一个一般的公式, 它有许多具体的应用. 比如, 设 Σ_t 是一个平面图形, 则曲面为

$$\xi(t)x+\eta(t)y+\zeta(t)z = p(t),$$

其中 $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ 为单位法向. 设 Σ_t 上点 $(x(t),y(t),z(t))$ 随 t 连续可微变化. 按隐函数求导法则及注意到 $\xi^2(t)+\eta^2(t)+\zeta^2(t)\equiv 1$, 我们有

$$C=-[\xi'(t)x+\eta'(t)y+\zeta'(t)z-p'(t)]$$

因而

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=\xi'(t)\iint\limits_{S_t} x\,\mathrm{d}S+\eta'(t)\iint\limits_{S_t} y\,\mathrm{d}S+\zeta'(t)\iint\limits_{S_t} z\,\mathrm{d}S-p'(t)\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S.$$

设 $(X(t),Y(t),Z(t))$ 是 Σ_t 的形心坐标, 就有

$$X(t)=\frac{\iint\limits_{S_t} x\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S},\quad Y(t)=\frac{\iint\limits_{S_t} y\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S},\quad Z(t)=\frac{\iint\limits_{S_t} z\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S}.$$

从而

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=-(X(t)\xi'(t)+Y(t)\eta'(t)+Z(t)\zeta'(t)-p'(t))\cdot\sigma_t,\tag{22.8}$$

其中 σ_t 是 Σ_t 的面积.

同时, 形心也位于 Σ_t 上, 故有

$$X(t)\xi(t)+Y(t)\eta(t)+Z(t)\zeta(t)=p(t).$$

求导并结合 (22.8) 得

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=(X'(t)\xi(t)+Y'(t)\eta(t)+Z'(t)\zeta(t))\cdot\sigma_t.$$

注意到上式右端第一个因子正是形心关于 t 的速度在法向上的投影. 因此

$$\int_a^b (X'(t)\xi(t)+Y'(t)\eta(t)+Z'(t)\zeta(t))\,\mathrm{d}t=l,$$

其中 l 为形心所经过的路径长度. 特别地, 如果 S_t 的面积为常值 A, 应用 (22.7) 式得到

$$V=A\cdot l.\tag{22.9}$$

对于由平面图形 S 所成的旋转体, 设其形心到旋转轴垂直距离为 d, 则

$$V=A\cdot 2\pi d,$$

这是 Guldin 第二定理(见上册命题 11.1.3), 因而 (22.9) 称为广义的 Guldin 公式.

22.5.2 物理应用

矩 力学中的某些量常常与物体的密度函数的各阶矩有关, 下面讨论三维的情形. 二维的情形是类似的.

设 V 是由分片光滑的连续曲面围成的区域. $\mu(x,y,z)$ 在 V 上连续, 分别称

$$M_x(k)=\iiint\limits_V x^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$M_y(k)=\iiint\limits_V y^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$M_z(k)=\iiint\limits_V z^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

为密度函数 μ 关于 x,y,z 的 k 阶矩. 利用微元法容易得到

1. 质量 $m=M_x(0)=M_y(0)=M_z(0)=M(0)=\iiint\limits_V\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$
2. 质心 (X_c,Y_c,Z_c), 其中

$$X_c=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$Y_c=\frac{M_y(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$Z_c=\frac{M_z(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 转动惯量为

$$I_x=M_y(2)+M_z(2),\quad I_y=M_z(2)+M_x(2),\quad I_z=M_x(2)+M_y(2),$$
$$I_{yz}=M_x(2),\quad I_{zx}=M_y(2),\quad I_{xy}=M_z(2).$$

例题 22.5.4 若直线 $x=0$, $x=a$, $y=0$ 与正连续曲线 $y=f(x)$ 围成的区域的质心的 x 坐标是 $g(a)$, 证明

$$f(x)=\frac{Ag'(x)}{[x-g(x)]^2}\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}\right),$$

其中 A 为正常数, a 是参数.

证 见图 22.10,

$$g(a)=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\frac{\displaystyle\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x},$$

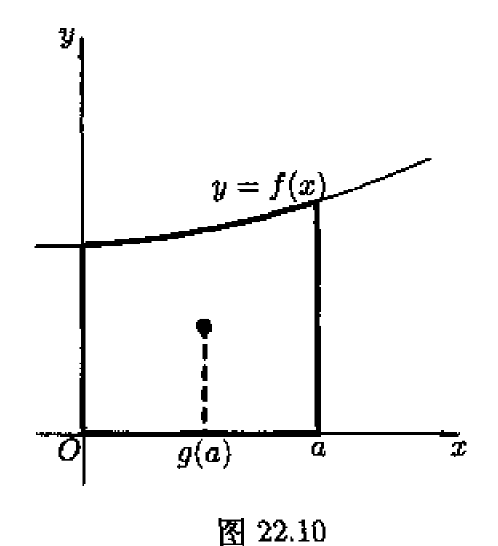


图 22.10

即

$$g(a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边对 a 求导得

$$g(a)f(a)+g'(a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=af(a).$$

令 $F(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, 注意到 $a-g(a)\neq 0$, 则

$$\frac{F'(a)}{F(a)}=\frac{g'(a)}{a-g(a)}.$$

两边对 a 积分, 得

$$\ln F(a)=\int\frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a+C.$$

所以

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) = A\exp\left(\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a\right).$$

两边对 a 求导得

$$f(a) = \frac{Ag'(a)}{a-g(a)}\exp\left(\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a\right).$$

考虑到

$$\begin{aligned}\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a &= \int \frac{g'(a)-1}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a + \int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)}\\ &= -\ln(a-g(a)) + \int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)},\end{aligned}$$

则

$$f(a) = \frac{Ag'(a)}{[a-g(a)]^2}\exp\left(\int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)}\right). \quad \square$$

引力　考虑体密度函数为 $\mu(x,y,z)$ 的立体 V 对具有质量 m 的点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的引力 $\boldsymbol{F}$. 由引力定律及微元法得 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 其中

$$F_x = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$F_y = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$F_z = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 G 为引力常量, $r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$.

22.5.3　重积分与不等式

本段介绍重积分在不等式中的一些应用. 先介绍如何用重积分的技巧证明一元的积分不等式.

例题 22.5.5 设 f 在 $[0,1]$ 上为正连续函数, 证明

$$1 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}, \tag{22.10}$$

其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值 (参见上册 374 页题 11).

证　设

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由对称性

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令 $F(z)=z+\dfrac{1}{z}$, $z>0$, 则 $F(z)\geqslant 2$, $F''(z)>0$, 故 $F(z)$ 是凸函数. 当 $F(\alpha)=F(\beta)$ 时. 对 $z\in[\alpha,\beta]$ 有$F(z)\leqslant F(\alpha)=F(\beta)$. 取 $z=\dfrac{f(y)}{f(x)}$, $\alpha=\dfrac{m}{M}$, $\beta=\dfrac{M}{m}$, 得

$$2\leqslant\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\leqslant\frac{m}{M}+\frac{M}{m},$$

从而

$$1\leqslant I\leqslant\frac{m^2+M^2}{2mM}.$$

但这与不等式 (22.10) 相比还不够精确. 为此分析 (22.10), 由右端的平方启发用算术平均值-几何平均值不等式 (上册第 4 页) 得

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\cdot\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\right]^2. \qquad (22.11)$$

但当 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 时不能充分利用 $z+\dfrac{1}{z}$ 的凸性来估计 $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$. 观察 I 的特点, 用 $\dfrac{f(x)}{\sqrt{mM}}$ 替代 $f(x)$ 得

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\int_0^1\left(\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}+\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\right)^2.$$

再取 $z=\dfrac{f(x)}{\sqrt{mM}}$, $\alpha=\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{M}{m}}$, 由 $z+\dfrac{1}{z}$ 的凸性得

$$I\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

不等式 (22.10) 得证. □

从上述证明过程可见, 对学到的各种方法要善于比较, 综合运用 (本题还可参见上册 415 页的提示). 下面再举一个通过交换积分次序证明不等式的例子.

例题 22.5.6 设 f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均为 $[0,1]\times[0,1]$ 中的连续函数, 且在 $[0,1]\times[0,1]$ 中成立 $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$.

(1) 证明: 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$, 存在 $\xi\in[0,1]$, 值得 $|\xi-x|\leqslant\dfrac{1}{2}|t_1-t_2|$ 且 $|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\leqslant 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$;

(2) 由 (1) 的结论证明: 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$ 成立

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leqslant 5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

分析 题目给出了 $f(x,t)$ 在 x 方向上的性质: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$. 由此证明在 t 方向上的性质. 可用的条件是 f 在 x 方向和 t 方向之间的关系: $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. 我们通过交换累次积分次序来转换.

证 (1) 由题设

$$f(x,t_1)-f(x,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

从而, 对任何 $\overline{x}\in[0,1]$, 由累次积分次序可交换, 成立

$$\int_x^{\overline{x}}[f(x,t_1)-f(x,t_2)]\,\mathrm{d}x=\int_x^{\overline{x}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_x^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x})-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\mathrm{d}t.$$

对上式左端应用积分中值定理, 右端利用已知条件 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$, 得

$$|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\cdot|x-\overline{x}|\leqslant 2|t_1-t_2|,$$

其中 ξ 在 x 和 $\overline{x}$ 之间. 对任何 x, t_1 和 $t_2\in[0,1]$ 总可找到某个 $\overline{x}\in[0,1]$, 使得

$$|x-\overline{x}|=\frac{1}{2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}},$$

代入前式即得

$$|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\leqslant 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 利用 (1) 得

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leqslant|f(x,t_1)-f(\xi,t_1)|+|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|+|f(x,t_2)-f(\xi,t_2)|$$

$$\leqslant 1\cdot|x-\xi|+4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+1\cdot|x-\xi|$$

$$\leqslant|x-\overline{x}|+4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x-\overline{x}|=5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

最后, 我们证明重积分形式的 Hölder 不等式, 并由此推出一些有用的估计.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中可求面积的有界区域, 函数 f 定义在 Ω 上, 如果 $|f|^p(p>0)$ 在 Ω 上广义可积, 则称 f 是在 Ω 上 p 次 (广义) 可积. Ω 上的 p 次可积函数的全体记为 $L^p(\Omega)$, 且记

$$\|f\|_p=\left(\iint\limits_D|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

例题 22.5.7 (Hölder 不等式) 设 $u\in L^p(\Omega),v\in L^q(\Omega)$, $p,q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\|uv\|_1\leqslant\|u\|_p\|v\|_q.$$

证 不妨设 $\|u\|_p>0$, $\|v\|_p>0$. 令

$$a=\frac{|u|}{\|u\|_p},\quad b=\frac{|v|}{\|v\|_p}.$$

由 Young 不等式 (上册 259 页题 10):

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

其中 $p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $a,b\geqslant 0$, 得到

$$\frac{|u|\cdot|v|}{\|u\|_p\|v\|_p}\leqslant\frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p}+\frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}.$$

两边在 Ω 上积分得

$$\frac{\displaystyle\iint_\Omega |u|\cdot|v|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\|u\|_p\|v\|_p}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由此得出所要证明的不等式 (参见上册 349~350 页). □

例题 22.5.8 设 $u\in L^q(\Omega)$, $0<p\leqslant q$, 则

$$|\Omega|^{-1/p}\|u\|_p\leqslant|\Omega|^{-1/q}\|u\|_q.$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的体积.

证 由 Hölder 不等式

$$\|u\|_p^p=\iint_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\Big(\iint_\Omega(|u|^p)^{q/p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{p/q}\Big(\iint_\Omega 1^{q/(q-p)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{(q-p)/q}$$
$$=|\Omega|^{(q-p)/q}\|u\|_q^p,$$

两边开 p 次方, 则

$$\|u\|_p\leqslant|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_q.\quad\square$$

注 由上例的结论知对任意 $0<p\leqslant q$, $L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$.

例题 22.5.9 设 $u\in L^r(\Omega)$, $0<p\leqslant q\leqslant r$, 则

$$\|u\|_q\leqslant\|u\|_p^\lambda\|u\|_r^{1-\lambda},$$

其中 λ 满足 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{\lambda}{p}+\dfrac{1-\lambda}{r}$.

证 由 Hölder 不等式

$$\|u\|_q^q=\iint_\Omega |u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega |u|^{\lambda q}|u|^{(1-\lambda)q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\Big\{\iint_\Omega(|u|^{\lambda q})^{\frac{p}{\lambda q}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big\}^{\frac{\lambda q}{p}}\Big\{\iint_\Omega(|u|^{(1-\lambda)q})^{\frac{r}{(1-\lambda)q}}\Big\}^{\frac{(1-\lambda)q}{r}}$$
$$=\|u\|_p^{\lambda q}\|u\|_r^{(1-\lambda)q},$$

两边开 q 次方即为所求. □

例题 22.5.10 设 u, u_x, u_y 在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 上连续, 且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上 $u=u_x=u_y=0$, 则对于 $1\leqslant p<2$ 有

$$\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}\leqslant C(\|u_x\|_p+\|u_y\|_p),$$

其中 C 只与 p 有关, 与 u 无关.

证 先设 $p=1$. 当 $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\Omega$ 时, 定义 $u(x,y)=0$, 则

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{x}u_x(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad \text{且}\ u(x,y)=\int_{-\infty}^{y}u_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

从而

$$|u(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^{x}|u_x|\,\mathrm{d}x,\quad \text{且}\ |u(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^{y}|u_y|\,\mathrm{d}y.$$

由此得

$$|u(x,y)|^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x(x,y)|\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}|u_y(x,y)|\,\mathrm{d}y.$$

两边在 $\mathbf{R}^2$ 上积分得到

$$\iint\limits_{\Omega}|u(x,y)|^2\leqslant\iint\limits_{\Omega}|u_x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\iint\limits_{\Omega}|u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

两边开平方, 得

$$\|u\|_2\leqslant\|u_x\|_1^{1/2}\|u_y\|_1^{1/2}.$$

利用 $\sqrt{a}\sqrt{b}\leqslant\dfrac{1}{2}(a+b)$, 就有

$$\|u\|_2\leqslant\frac{1}{2}(\|u_x\|_1+\|u_y\|_1).\tag{22.12}$$

这就证明了 $p=1$ 时的结论.

当 $1<p<2$ 时, 令 $\gamma=\dfrac{p}{2-p}$, 在 (22.12) 中用u^γ 代替 u, 则

$$\begin{aligned}\|u^\gamma\|_2&\leqslant\frac{1}{2}(\|\gamma u^{\gamma-1}u_x\|_1+\|\gamma u^{\gamma-1}u_y\|_1)\\&\leqslant\frac{\gamma}{2}(\|u^{\gamma-1}\|_q\|u_x\|_p+\|u^{\gamma-1}\|_q\|u_y\|_p),\end{aligned}\tag{22.13}$$

其中 q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 即 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 由于

$$\|u^\gamma\|_2=\|u\|_{2\gamma}^{\gamma}=\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}^{\gamma},$$

$$\|u^{\gamma-1}\|_q=\|u\|_{(\gamma-1)q}^{\gamma-1}=\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}^{\gamma-1},$$

由 (22.13) 得

$$\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}\leqslant\frac{\gamma}{2}\left(\|u_x\|_p+\|u_y\|_p\right).\quad\square$$

22.5.4 练习题

1. 计算由下列曲面围成的立体体积:

   (1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i$, $i=1,2,3$, 其中 (a_i,b_i,c_i) $(i=1,2,3)$ 线性无关;

   (2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, 其中 $a>0$;

   (3) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

   (4) $(x^2+y^2)^2+z^4=z$.

2. 计算下列曲面的面积:

   (1) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$;

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=z^3$;

(3) 连续曲线 $y=f(x)\ (\geqslant 0)$, $x\in[a,b]$ 绕 x 轴旋转所得曲面.

3. 设抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的面密度 $\rho=z$, 求质量.

4. 半径为 R 的均匀圆盘, 其密度为 μ. 过圆心且与圆垂直的直线上有一密度为 ρ 的均匀细棒, 棒长为 l, 其近圆盘的一端与圆心相距为 a. 求圆盘对细棒的引力.

5. 半径为 a 的圆盘, 其各点的密度等于该点到圆心的距离. 今从圆盘上挖去一个半径为 $\dfrac{a}{2}$ 而其圆心离圆盘中心为 $\dfrac{a}{2}$ 的小圆盘. 求剩下几何图形的质心坐标.

6. 假定物体有连续的密度函数, 证明凸形物体的质心必在其体内,

7. 设 $u_i\in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{p_i}=1$. 证明

$$\iint\limits_{\Omega} u_1\cdots u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_m\|_{p_m}.$$

8. 证明

$$1<\iiint\limits_{[0,1]^3}(\cos(xyz)+\sin(xyz))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z<\sqrt{2}.$$

9. 证明

$$\left\{\int_a^b dx\Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]^2\right\}^{1/2}\leqslant\int_c^d \mathrm{d}y\Big[\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]^{1/2},$$

其中 f 是连续函数.

§22.6 对于教学的建议

22.6.1 学习要点

1. 如何快速准确计算出重积分的值是本章的重点之一. 为此有三点是至关重要的: 一是选择坐标变换, 二是选择积分顺序, 三是要优先利用对称性, 即积分区域的对称性与被积函数的奇偶性.

2. 计算重积分的过程中, 画出积分区域的示意图是很重要的一个步骤. 示意图的要点是区域所处的象限 (或卦限), 曲线的交点 (曲面的交线). 用球坐标时尤其要准确标出交线. 即使画不出图, 也要作必要的几何分析. 比如 $(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围立体. 首先从方程看出立体位于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间. 其次可看出这是一个旋转面, 令 $y=0$ 得母线 $x^4=z-z^4$.

3. 要重视重积分的应用部分的教学. 这里微元法是个重点. 要注意微元法的 "求和" 并不是简单的相加. 在 "曲" 的坐标下考虑的是求和方向上的分量

相加. 比如求移动曲面扫过的体积, 我们必须考虑移动的法向速度方向上的求和.

4. 重积分的计算是熟能生巧, 需要做大量的习题. 限于篇幅, 我们仅仅列举一些有特点的例子. 在一般的教科书上 (如 [25]) 都给出了足够丰富的例题与习题. 请读者自己把握.

5. **对习题课的建议** 应该根据实际需要选择坐标变换, 不能只会一种. 任何一种坐标变换都不是万能的. 球坐标变换很重要, 但并不是积分区域与球有关就要用球坐标. 如例题 22.3.1, 用球坐标就不简单.

   关于积分顺序, 应该观察被积函数与积分区域的特点, 使得积分变得简单. 仍考察例题 22.3.1, 被积函数中有 z, 当然应该选择 "先二后一" 的顺序, 而且是先对 x,y, 后对 z, 这样对 x,y 作二重积分时, 被积函数是常数, 因而可以提到积分号之外.

   对称性的使用不仅可以简化计算, 还能避免不必要的错误. 下面的例子可以很清楚地说明这一点.

例题 22.6.1 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ 和圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant ax$ $(a>0)$ 的公共部分所成的空间区域 (Viviani 体) 的体积 V.

解 如图 22.11 所示,

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(a^2\sin^2\theta)^{3/2}-a^3\right]\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

图 22.11

再往下作就有两种可能了, 一种是

$$(\sin^2\theta)^{3/2} = \sin^3\theta \quad (\text{这是错的!}),$$

应该是

$$(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin\theta|^3.$$

但如果一开始就利用对称性, 得

$$V = 4\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax,\ y\geqslant 0} \sqrt{z^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

不但使运算简便, 而且无形中避免了上述错误的发生.

22.6.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有如下定义:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}, & \text{当 } x=\dfrac{p_x}{q_x}, y \text{ 是无理数时},\\ \dfrac{1}{q_y}, & \text{当 } y=\dfrac{p_y}{q_y}, x \text{ 是无理数时},\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 分别表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 但两个二次积分不存在.

2. 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 都是非零有理数}, x=\dfrac{p_x}{q_x}, y=\dfrac{p_y}{q_y} \text{ 且 } q_x=q_y \text{ 时},\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上不可积, 但两个二次积分存在且相等.

3. (1) 计算积分$A=\displaystyle\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

   (2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续, 且满足下列条件:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\qquad \iint\limits_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

   求证: $\exists(\xi,\eta)\in D$ 使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{A}$.

4. 证明

$$1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<2.$$

5. 设 f 是连续函数, 证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1(1-u^2)f(ku)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

6. 证明 Poincaré 不等式: 设函数 $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在闭区域

$$D:a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$$

上连续, 其中 φ,ψ 在 $[a,b]$ 上连续. $f(x,\varphi(x))=0$, 则存在常数 $K>0$, 使得

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant K\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(Poincaré 不等式可看成是 Wirtinger 不等式 (见第十五章参考题 8) 在高维空间的推广, 见 [27] 及其中所引文献.)

7. 设 $u, v \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$. 利用 Hölder 不等式证明 Minkowski 不等式

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p.$$

讨论 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式取等号的条件.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上四次连续可微, 在其边界上取零,并且

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right| \leqslant B, \quad (x,y)\in D.$$

证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{B}{144}.$$

9. 设定积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$. 证明存在 D 的闭子区域 U, 使当 $(x,y)\in U$ 时, 有 $f(x,y)>0$.

10. 证明多重积分的中值定理: 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在有界闭区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上连续, 则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, 使

$$\int\cdots\int_\Omega f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\Omega \text{ 的体积 }).$$

11. 设函数 p 在 $[a,b]$ 上非负连续, f, g 在 $[a,b]$ 上连续单调增加, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

12. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 单调减少且恒取正值, 则

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

13. 设

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$, 则

$$\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A+R} \leqslant I \leqslant \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A-R}.$$

14. 设 $f(t)$ 是连续函数, 令

$$F(t)=\iiint\limits_{D} f(xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant t,\ 0\leqslant z\leqslant t\}$. 证明

$$F'(t)=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u,$$

其中 $g(u)=\displaystyle\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$.

15. 设坐标平面上有一周长为 $2\pi l$ 的椭圆 Γ, 在其上选定一点作为计算弧长 s 的起点, 以逆时针方向作为计算弧长的方向, 这时 Γ 有参数方程

$$x=f(s),\ y=\varphi(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l.$$

x 轴的正半轴绕原点作逆时针旋转, 首次转到与点 $(f(s),\varphi(s))$ 处切线正向一致时的倾角为 $\theta(s)$. 记 D 为 Γ 的外部区域内与 Γ 的距离小于 l 的点所构成的区域.

(1) 如果用 t 表示 D 内一点 (x,y) 到 Γ 的距离, 试将 x, y 表示成 s, t 的函数

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l,\ 0<t<l;$$

(2) 用计算验证区域 D 的面积为 $3\pi l^2$.

第二组参考题

1. 证明对任意 $\varepsilon>0$,

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}b^q}{q}\leqslant\varepsilon a^p+\varepsilon^{-q/p}b^q,$$

其中 $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ p,\ q>0,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

2. 利用上题以及例题 22.5.9 的结论证明内插不等式:

$$\|u\|_q\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_p,$$

其中 $\mu=(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q})/(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{r})$, $0<p<q<r$, $\varepsilon>0$.

3. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域, $u(x,y)$ 在 Ω 上连续且恒取正值, 定义

$$\varPhi_p(u)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega}u^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的面积, 证明:

(1) $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\varPhi_p(u)=\max_{\Omega}u$;

(2) $\displaystyle\lim_{p\to-\infty}\varPhi_p(u)=\min_{\Omega}u$;

(3) $\lim\limits_{p\to 0}\Phi_p(u)=\exp\left\{\dfrac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega}\ln u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}.$

4. 设 $\boldsymbol{P}_0$ 为半径等于 R 的球内的一定点, 从 $\boldsymbol{P}_0$ 点向球面上任意一点 $\boldsymbol{Q}$ 处的切平面作垂线, 垂足为 $\boldsymbol{P}$. 当 $\boldsymbol{Q}$ 在球面上变动时, $\boldsymbol{P}$ 点的轨迹形成一封闭曲面.

   (1) 求此曲面所围成的立体的体积;

   (2) 问当 $\boldsymbol{P}_0$ 沿什么方向变化时, 上述体积的变化率最大?

5. 证明不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4a^2}{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设连续函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单封闭曲线, $S(v_1,v_2)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1, f(x,y)=v_2$ 所围成的域. 证明 Catalan 公式

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,\mathrm{d}v,$$

其中 $F(v)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1, f(x,y)=v$ 所包围的面积, 还假设 $F(v)$ 可微且导函数 $F'(v)$ 可积.

第二十三章 含参变量积分

在 §23.1 和 §23.2 两节中考虑含参量积分的一般性质, 其中包括含参量常义积分和含参量广义积分. 对后者而言, 其分析性质的研究首先涉及这些广义积分的收敛性是否关于参量一致. 然后给出许多具体计算的例子. 在 §23.3 节中介绍两个重要的特殊函数: B 函数和 Γ 函数. 最后一节是学习要点和参考题.

§23.1 含参变量常义积分

23.1.1 定义与性质

在实际问题中我们经常会遇到带参数的积分, 比如椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($b>a>0$) 的弧长为

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $k=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ 是离心率. 这里 $I(k)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ 称为第二类完全椭圆积分, 它不能用初等函数表示[①]. $I(k)$ 就是含参量积分的一个例子. 一般地, 设 $D\subset\mathbf{R}$, 二元函数 $f(x,t)$ 定义在 $[a,b]\times D$ 上, $\forall t\in D$, 设 $f(x,t)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上常义可积, 即通常所说的有界可积, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

是定义在 D 上的含参量常义积分. 它具有如下主要性质.

命题 23.1.1 (极限性质) 设 t_0 是 D 的聚点, 如果 $\lim\limits_{t\to t_0}f(x,t)=\psi(x)$, 且收敛关于 $x\in[a,b]$ 是一致的, 则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积, 且

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.1.2 (连续性) 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续.

命题 23.1.3 (交换积分次序) 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d\mathrm{d}t\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

① 关于椭圆弧长以及椭圆积分参见上册 356 页和第十六章例题 16.1.1.

命题 23.1.4 (可微性) 设 $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\varphi'(t)=\int_a^b f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

如果在积分限中也含有参量, 则我们有如下更一般的结论.

命题 23.1.5 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都在 $[c,d]$ 上连续, 且

$$a\leqslant\alpha(t),\beta(t)\leqslant b,\quad\forall\, t\in[c,d],$$

则

$$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续. 进一步若 $f_t(x,t)$ 也在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都在 $[c,d]$ 上可导, 则 $\varphi(t)$ 也在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\varphi'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

例题 23.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 考察

$$F(t)=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

的连续性.

解 显然 $F(t)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上. 且 $\forall\, t_0\neq 0$, $h(x,t)=\dfrac{tf(x)}{x^2+t^2}$ 在 $[0,1]\times[\frac{1}{2}t_0,2t_0]$ 上连续 (或 $[0,1]\times[2t_0,\frac{1}{2}t_0]$ 上连续), 由命题 23.1.2 知 $F(t)$ 在 t_0 点连续.

下面讨论 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性. 我们先考虑

$$\lim_{t\to0^+}F(t)=\lim_{t\to0^+}\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{t^{1/3}}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{t^{1/3}}^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

而当 $t\to0^+$ 时,

$$\int_0^{t^{1/3}}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{t^{1/3}}{t}\to f(0)\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\int_{t^{1/3}}^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)|\frac{t}{t^{2/3}+t^2}\to 0.$$

因此

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\frac{\pi}{2}.$$

同理可证

$$\lim_{t\to0^-}F(t) = -f(0)\frac{\pi}{2},$$

所以当 $f(0)=0$ 时, $F(t)$ 在零点连续, 否则在零点不连续. □

例题 23.1.2 设

$$F(t)=\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y,$$

求 $F'(t)$.

解 令 $f(x,t)=\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 x, t 为参变量. 由含参量积分的求导公式

$$F'(t)=2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^{t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\\&=\sin[x^2+(x+t)^2-t^2]-(-1)\cdot\sin[x^2+(x-t)^2-t^2]\\&\qquad+\int_{x-t}^{x+t}(-2t)\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\\&=2\sin 2x^2\cos 2xt-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}F'(t)=&\,2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xt\,\mathrm{d}x\\&-2t\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$ □

23.1.2 几种常用的求参变量积分的方法

如果直接求 $\varphi(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 有困难, 常采用以下两种方法.

1. 先求 $\varphi'(t)$, 即先求 $\displaystyle\int_a^b f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$, 然后再对 t 积分求出 $\varphi(t)$.
2. 把 $f(x,t)$ 表示为积分形式, 再用积分号下求积分的方法. 此时通常要交换积分次序.

例题 23.1.3 计算

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta,\quad 0<x<+\infty. \tag{23.1}$$

解 令 $f(x,\theta)=\ln(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)$. $\forall x_0\in(0,+\infty)$, $f(x,\theta)$ 在 $[\frac{1}{2}x_0,2x_0]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 且 $f_x(x,\theta)=\dfrac{2x\cos^2\theta}{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}$ 也在 $[\frac{1}{2}x_0,2x_0]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续. 应用积分号下求导的性质, 可得对 $\forall x\in(0,+\infty)$,

$$\begin{aligned}I'(x)&=\int_0^{\pi/2}\frac{2x\cos^2\theta}{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=2x\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{x^2+\tan^2\theta}\quad(\text{令 }\tan\theta=t)\\&=2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{x^2+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t\quad(x\neq1)\\&=\frac{2x}{x^2-1}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{1+x}.\end{aligned}$$

积分得

$$I(x)=\pi\ln(1+x)+C.\quad(x\neq1)$$

由 $I(x)$ 的连续性知上述表达式对 $x=1$ 也成立. 在 (23.1) 中, 令 $x=1$, 则 $I(1)=0$, 从而 $C=-\pi\ln2$. 最后得到

$$I(x)=\pi\ln\frac{1+x}{2}.\quad\square$$

例题 23.1.4 求

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x,\quad|\alpha|<1.$$

解 由于

$$\lim_{x\to\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\Big[\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}\Big]=2\alpha,$$

于是 $x=\frac{\pi}{2}$ 不是瑕点. 又

$$\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x}.$$

令 $f(x,y)=1/(1+y\cos x)$, $\forall\alpha\in(-1,1)$, $f(x,y)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\alpha,\alpha]$ 上连续, 利用交换积分次序性质,

$$\begin{aligned}I(\alpha)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\\&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\arctan\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\mathrm{d}y\\&=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\alpha.\quad\square\end{aligned}$$

注 1 也可以用下面的方法求 $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{(1+y\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}.$$

由于 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{y\cos x\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}$ 是 y 的奇函数, 于是 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{y\cos x\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}=0$, 从而

$$\begin{aligned}I(\alpha)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}=2\int_0^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+(1-y^2)}\\&=2\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}y=\pi\arcsin\alpha.\end{aligned}$$

注 2 还可以用对参变量 α 求导的方法求 $I(\alpha)$.

例题 23.1.5 证明

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

分析 注意上式左端是含参量 t 的积分. 设 $f(t)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. 要证明 $f(t)\equiv 2\pi$, 即 $f(t)$ 为常函数. 显然有 $f(0)=2\pi$, 于是只要证明 $f'(t)\equiv 0$.

证 1 由求导性质

$$\begin{aligned}f'(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

容易归纳证明

$$f^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$f^{(n)}(0)=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

从而利用 Taylor 展式

$$f(t)=f(0)+0+\cdots+0+\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 t 之间. 因为

$$|f^{(n)}(\xi)|=\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\xi\cos\theta}\cos(\xi\sin\theta+n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{|\xi|}\,\mathrm{d}\theta\leqslant 2\pi\mathrm{e}^{|t|},$$

所以对每一个固定的 $t\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi)=0.$$

最后得到

$$f(t)\equiv f(0)=2\pi.\quad\square$$

证 2 利用下一章的曲线积分知识, 可以计算

$$f'(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \oint\limits_{x^2+y^2=1} \mathrm{e}^{tx}[\cos(ty)\,\mathrm{d}y + \sin(ty)\,\mathrm{d}x],$$

其中单位圆取逆时针方向. 用 Green 公式得

$$f'(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{tx}\cos(ty)) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{tx}\sin(ty))\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \quad \square$$

利用含参量积分的性质, 我们可以用嵌入法来计算一些定积分 $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这些定积分对应的不定积分不是初等函数, 故不能用 Newton–Leibniz 公式进行计算. **嵌入法**的步骤是先引入参变量 y, 化为 $I(y) = \int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x$, 使得 $I(y_0) = I$ (y_0 为某定值), 求出 $I(y)$ 后令 $y = y_0$. 在应用含参量积分性质时要注意条件检验.

例题 23.1.6 求定积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 对这个积分在上册 324 页的例题 10.4.7 中已经给出一种解法, 下面的解法是利用含参量积分的性质. 由于 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 没有有限形式的原函数, 直接积分是不可能的. 引入变量 α, 定义

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

易见 $I(1) = I$. 可以验证 $f(x,\alpha) = \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上满足积分号下求导的条件, 于是

$$I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1 \left(\frac{\alpha+x}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(1+\alpha x)\right]\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+\alpha)\right].$$

由此得出

$$I(1) = I(0) + \int_0^1 I'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha$$
$$= \left(\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2) + \frac{1}{2}\ln 2\arctan\alpha\right)\Big|_0^1 - I(1).$$

移项得

$$I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2. \quad \square$$

23.1.3 练习题

1. 求 $F(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x\ \ (|\theta|<1)$.

2. 设 $f(s,t)$ 为可微函数, $F(x)=\int_0^{x}\mathrm{d}t\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s$. 求 $F'(x)$.

3. 设 $f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 上连续有界, 证明
$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
在 (a,b) 上连续.

4. 设 $I(a)=\int_0^{2\pi}\ln(R^2+a^2-2aR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $|a|<R$, 证明 $I'(a)=0$.

5. 设 $a,\ b>0$, 求 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $F(t)=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a f(x+y+t)\,\mathrm{d}y$, 其中 f 为连续函数, 证明
$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t).$$

7. 设 $f(t)=\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, $g(t)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 证明 $f(t)+g(t)\equiv\frac{\pi}{4}$, 并由此计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

§23.2 含参变量广义积分

函数项级数可看成离散求和的含参量广义积分, 其中函数的自变量对应着参变量. 因此含参量广义积分的分析性质的研究与函数项级数的分析性质的研究在许多地方是类似的, 可以比照第十四章相关内容. 此外还可以参见 §16.1 节的内容, 其中涉及以 n 为参量的无穷限广义积分.

23.2.1 一致收敛性

含参变量 t 的广义积分
$$\varphi(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad t\in T \tag{23.2}$$
(T 是有限或无穷区间) 的分析性质研究的一个重要条件是积分关于参量的一致收敛性.

设积分对每一个 $t\in T$ 收敛. 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $A_0=A_0(\varepsilon)$, 当 $A>A_0$ 时, 对一切 $t\in T$, 成立

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

则称含参变量广义积分 (23.2) 关于 $t \in T$ **一致收敛**.

除了用上述定义外, 判定含参量广义积分 (23.2) 的一致收敛还有下述方法.

1. **Cauchy 一致收敛准则** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 当 $A, A' > A_0$ 时, 对一切 $t \in T$, 有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

2. **Weierstrass 判别法 (M 判别法)** 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $t \in T$ 上收敛, 如果

(1) $|f(x,t)| \leqslant F(x),\ a \leqslant x < +\infty,\ t \in T$,

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

3. **Abel 判别法** 设

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛,

(2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且作为二元函数是有界的,

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

4. **Dirichlet 判别法** 设

(1) $\displaystyle\int_a^{A} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 对 $\forall A \geqslant a, t \in T$ 是一致有界的,

(2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0$ 关于 $t \in T$ 是一致的,

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

5. **Dini 定理** 设 $f(x,t)$ 在 $D = \{a \leqslant x \leqslant \infty, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上连续且不变号, $\varphi(t) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛.

上面所说的含参变量的广义积分是指积分限是无穷大的情形, 同样可以研究有瑕点的含参变量的广义积分, 结论 (包括 5 个判别法) 完全相仿.

判定含参变量广义积分不一致收敛的常用方法如下.

1. 按定义: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall M > 0$, 存在 $A(M) > M$ 以及 $t(M) \in T$, 使得

$$\left|\int_{A(M)}^{+\infty} f(x,t(M))\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

2. 按 Cauchy 一致收敛准则: $\exists\varepsilon_0>0,\forall M$, 存在 $A_1(M)>M, A_2(M)>M$ 以及 $t(M)\in T$, 使得

$$\left|\int_{A_1(M)}^{A_2(M)} f(x,t(M))\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

3. 若 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times T$ 上连续, t_0 为 T 的一个聚点, $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $T\setminus\{t_0\}$ 上收敛, 而 $\int_a^{+\infty} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 T 上必定不一致收敛.

4. $f(x,t)$ 在 $D=\{a\leqslant x<\infty,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上连续, $\varphi(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在但不连续, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不一致收敛.

23.2.2 例题

最常用的判别法是 M 判别法, 教科书上已有很多例子. 下面举一些用其他判别法的例子, 此时被积函数往往是变号的, 并且广义积分是非绝对收敛的.

例题 23.2.1 讨论

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\,\mathrm{d}x$$

在 $y\in[0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

解 1 (用 Abel 判别法) 首先对任意固定的 $y\geqslant 0$, 原广义积分是收敛的.

又因为 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 与 y 无关, 故关于 $y\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的.

任意固定 $y\in[0,+\infty)$, $\frac{1}{1+x^y}$ 是 x 的单调函数, 且 $\left|\frac{1}{1+x^y}\right|<1$. 由 Abel 判别法知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\,\mathrm{d}x$$

关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

解 2 (用 Dirichlet 判别法) 将 $I(y)$ 改写为

$$\int_0^{+\infty} x\sin x^2\frac{1}{x(1+x^y)}\,\mathrm{d}x.$$

由于

$$\left|\int_0^A x\sin x^2\,\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^A\right|\leqslant 1,\quad\forall y\in[0,+\infty).$$

对每一个固定的 $y\in[0,+\infty)$, $\frac{1}{x(1+x^y)}$ 对 x 单调, 且

$$\left|\frac{1}{x(1+x^y)}\right| \leqslant \frac{1}{x} \to 0 \ (x \to +\infty),$$

故当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{x(1+x^y)}$ 关于 y 一致收敛于 0. 由 Dirichlet 判别法知原广义积分对 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛. □

例题 23.2.2 讨论

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

在 (1) $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$, 其中 $\alpha_0 > 0$; (2) $\alpha \in (0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

注 此题在上册 384 页的例题 12.2.3 中出现过, 积分区间是 $(0,+\infty)$, 0 点可能是瑕点, 在那里是讨论广义积分的收敛性与绝对收敛性.

解 (1) 由于 $\forall A > 1$ 有

$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2,$$

即关于 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 上述积分一致有界. 又对每一个 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 对 x 单调, 且 $\left|\dfrac{1}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\alpha_0}} \to 0(x \to +\infty)$, 即当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知 $I(\alpha)$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上是一致收敛的.

(2) $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ 在 $[1,+\infty)\times(0,+\infty)$ 中连续, 对每一个 $\alpha \in (0,+\infty)$, 广义积分是收敛的, $\alpha = 0$ 是 $(0,+\infty)$ 的聚点. 因此由积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ 发散知广义积分 $I(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

例题 23.2.3 讨论 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ 在 (1) $p \geqslant p_0 > 0$; (2) $p > 0$ 中的一致收敛性.

解 (1) 当 $p \geqslant p_0 > 0$ 时, 积分以 $x = 0$ 为惟一瑕点, 由于当 $x \in (0,1)$ 时

$$|x^{p-1}\ln^2 x| \leqslant \frac{\ln^2 x}{x^{1-p_0}},$$

而瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^{1-p_0}}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的, 故由 M 判别法知积分在 $p \geqslant p_0 > 0$ 上是一致收敛的.

(2) 当 p 充分接近 0 时, $x^{p-1}\ln^2 x$ 与 $\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 相接近, 而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是发散的, 由此猜测 $p > 0$ 时原积分不是一致收敛的. 下面给出严格的证明: $\forall \xi \in (0,1)$

$$\left|\int_0^\xi x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^\xi x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x \geqslant \ln^2\xi \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}} = \ln^2\xi \cdot \frac{1}{p}\xi^p.$$

由于 $\lim\limits_{\xi\to 0^+} \xi^\xi = 1$, 取 $p = \xi \in (0,1)$, 则当 $\xi \to 0^+$ 时

$$\ln^2\xi\frac{1}{p}\xi^p=\frac{\ln^2\xi}{\xi}\xi^\xi\to+\infty.$$

由极限的保号性知存在 $\xi_0\in[0,1]$, 当 $0<\xi\leqslant\xi_0$ 时, $\ln^2\xi\cdot\xi^{\xi-1}>1$, 所以存在 $\varepsilon_0=1,\forall\delta>0$, 存在 $\xi_1=\min\{\delta,\xi_0\}$, $p=\xi_1$, 使

$$\left|\int_0^\delta x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\left|\int_0^{\xi_1}x^{\xi_1-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\ln^2\xi_1\cdot\xi_1^{\xi_1-1}\geqslant 1.$$

由一致收敛的定义知瑕积分不是一致收敛的. □

注 对瑕积分的一致收敛性的讨论, 也可以转化为无穷限积分的情形去讨论, 但这种转化中使用的变量代换不应与参变量发生关系, 否则会出现错误结论.

例题 23.2.4 证明 $I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

分析 被积函数中因子 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近性态与 $\frac{1}{x}$ 相同. 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是不一致收敛的, 故可依此证明原含参量广义积分在 $(0,+\infty)$ 上也是不一致收敛的. 下面给出具体的证明.

证 1 反证法. 由于 $\frac{\sin tx}{x}=\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\cdot\frac{a^2+x^2}{x^2}$, 若 $I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, $\frac{a^2+x^2}{x^2}=1+\frac{a^2}{x^2}$ 对 x 单调且 $\left|1+\frac{a^2}{x^2}\right|\leqslant 1+a^2$, 由 Abel 判别法知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$$

在 $(0,+\infty)$ 上也一致收敛. 矛盾. □

证 2 $\forall A>0$, 取 $A_0\geqslant A$, 且令 $t_0=\frac{1}{A_0}$, 则

$$\int_{A_0}^{2A_0}\frac{x\sin t_0x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{t_0A_0}^{2t_0A_0}\frac{y\sin y}{a^2t_0^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{y\sin y}{\frac{a^2}{A_0^2}+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

不妨设 $A_0\geqslant a$, 则当 $1\leqslant y\leqslant 2$ 时有

$$\frac{y}{\frac{a^2}{A_0^2}+y^2}\geqslant\frac{y}{1+y^2}=\frac{1}{y}\frac{y^2}{1+y^2}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y},$$

于是

$$\int_{A_0}^{2A_0}\frac{x\sin t_0x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y=\varepsilon_0>0.$$

由 Cauchy 准则知 $\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

23.2.3 练习题

1. 讨论下列广义积分的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+a^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t,\ a\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}\,\mathrm{d}x,\ y\in[y_0,+\infty)$, 其中 $y_0>0$;

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x,\ t\in(0,+\infty)$;

(4) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in[0,+\infty)$;

(5) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\,\mathrm{d}x,\ y\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\int_0^{+\infty} x\ln x\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, (1) $t\in[t_0,+\infty)$, 其中 $t_0>0$, (2) $t\in(0,+\infty)$;

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t}\cos t\,\mathrm{d}t,\ u\in[0,1]$;

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in(0,+\infty)$;

(9) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin y\,\mathrm{d}y,\ x\in(0,+\infty)$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\,\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2},\ \alpha\in(0,1)$;

(11) $\int_0^{2} \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}x,\ |t|<\frac{1}{2}$;

(12) $\int_0^{1}(1-x)^{u-1}\,\mathrm{d}x$, (1) $u\in[a,+\infty)$, 其中 $a>0$, (2) $u\in(0,+\infty)$.

2. 设 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 当 $\lambda=a,\lambda=b$ 时收敛 $(a<b)$. 证明 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛.

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

23.2.4 主要性质

与函数项级数类似, 含参变量的广义积分有如下主要性质.

命题 23.2.1 (连续性) 设 $f(x,t)$ 在 $D=\{a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 即 $\forall\, t_0\in[\alpha,\beta]$, 有

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{t\to t_0} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.2.2 (可微性) 设 $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ 在 D 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛于 $\varphi(t)$, $\int_a^{+\infty} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛, 则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且

$$\varphi'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.2.3 (交换积分次序) **情形** 1: 在命题 23.2.1 的条件下, $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

情形 2: 若 $f(x,t)$ 在 $x\geqslant a$, $t\geqslant c$ 上连续,

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_c^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{23.3}$$

在任意有穷区间上一致收敛 (第一个关于 t, 第二个关于 x), 并且两个累次积分

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty}|f(x,t)|\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,t)|\,\mathrm{d}t$$

中至少有一个存在, 则两个累次积分

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{23.4}$$

都存在并且相等.

注 1 (Dini 定理) 如果 $f(x,t)$ 连续非负, 且 (23.3) 中两个积分都是连续的 (第一个关于 t, 第二个关于 x), 则 (23.4) 中的两个累次积分中的一个存在可推出另一个也存在, 并且二者相等. 关于这个定理的证明可见 [8].

注 2 关于命题 23.2.1 中的极限号与积分号的换序, 如果将 $f(x,t)$ 视为 $f_t(x)$, 将 t 与命题 16.1.1, 16.1.2 中的下标 n 等同, 将 $t\to t_0$ 视为 $n\to\infty$, 则也有相应的极限与积分的换序定理.

23.2.5 例题

本小节的例题分为三种类型.

1. 应用 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha$$

或 Euler-Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\ (\alpha>0)$$

求其他广义积分的值.

2. 讨论含参变量广义积分的分析性质.

3. 用积分号下求导或积分的方法, 求含参变量广义积分. 并用 "嵌入法" 计算广义积分.

例题 23.2.5 求 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha \geqslant 0$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1}{x^2} = -\alpha$, 所以 $x=0$ 不是瑕点. 原广义积分与 Poisson 积分比较, 多了和因子 -1 与积因子 $\frac{1}{x^2}$, 现设法用分部积分吸收掉.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}\frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot(-2\alpha x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\alpha \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\pi\alpha}. \quad \square\end{aligned}$$

注 本题目也可以用在积分号下求导的方法去求解.

例题 23.2.6 证明 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$ 在 $(2,+\infty)$ 上连续.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $\alpha \in [2+\varepsilon, +\infty)$ 时有

$$\left|\frac{x}{2+x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}, \quad x \in [1,+\infty). \tag{23.5}$$

由 M 判别法知

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{23.6}$$

关于 $\alpha \in [2+\varepsilon, +\infty)$ 是一致收敛的. 由此以及一致收敛的定义知 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [2+\varepsilon,+\infty)$ 也是一致收敛的. 于是 $F(\alpha)$ 在 $[2+\varepsilon,+\infty)$ 上连续. 由 ε 的任意性知 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上连续. $\square$

注 1 由于连续性本质上是一种局部的分析性质, 我们可以先证明 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的内闭一致收敛性, 然后用连续性定理得到内闭连续, 而内闭连续等价于在开区间上连续. 也可以对于 $(2,+\infty)$ 中的任一点 α_0, 在 α_0 的小的闭邻域中证明 $F(\alpha)$ 的连续性, 再从 α_0 的任意性推出 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的连续性. 这种想法也可用于可微性证明.

注 2 由于不等式 (23.5) 只对 $x \in [1,+\infty)$ 成立, 在 $x \in [0,+\infty)$ 上不成立, 因此由 M 判别法只能证明 (23.6) 是一致收敛的. 但由一致收敛的定义,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_1^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

的一致收敛性是等价的. 因此由后者的一致收敛性可推知前者的一致收敛性, 这种方法称为 "截断法".

例题 23.2.7 证明当 $b \neq 0$ 时

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\,\mathrm{d}t$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

证 由于 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})=a$, 所以 $t=0$ 不是瑕点.

(1) 证明 $F(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 令

$$f(t,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt, & t>0,\ a\geqslant 0,\\ a, & t=0,\ a\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $f(t,a)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

由 $b\neq0$ 知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos bt}{t}\,\mathrm{d}t$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 又 $1-\mathrm{e}^{-at}$ 对 t 单调, 且 $|1-\mathrm{e}^{-at}|\leqslant 2$, 故由 Abel 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 从而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 在 $a\in[0,+\infty)$ 上连续. 又由本章第一节的命题 23.1.2 (连续性) 知 $\int_0^{1}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 也是 $a\in[0,+\infty)$ 上的连续函数, 所以 $F(a)$ 在 $a\in[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 证明 $F(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导. 由

$$\frac{\partial f}{\partial a}(t,a)=\mathrm{e}^{-at}\cos bt,\quad t\geqslant0, a\geqslant0$$

知 $f(t,a)$ 与 $f_a(t,a)$ 都在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\forall\varepsilon>0$, 当 $a\geqslant\varepsilon$ 时

$$|f_a(t,a)|\leqslant\mathrm{e}^{-at}\leqslant\mathrm{e}^{-\varepsilon t},\ \ t\in[0,+\infty),$$

而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 由 M 判别法知 $\int_0^{+\infty}f_a(t,a)\,\mathrm{d}t$ 关于 $a\in[\varepsilon,+\infty)$ 是一致收敛的. 于是 $F(a)$ 在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上可导, 由 ε 的任意性知 $F(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$F'(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos bt\,\mathrm{d}t,\ \ a\in(0,+\infty).\quad\square \tag{23.7}$$

例题 23.2.8 求例题 23.2.7 中的 $F(a)$.

解 1 利用表达式 (23.7), 则 $a>0$ 时

$$F'(a)=\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a^2+b^2}(b\sin bt-a\cos bt)\Big|_0^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

于是

$$F(a)=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+C. \tag{23.8}$$

由于 $F(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $F(0)=0$, 于是在 (23.8) 中令 $a\to0$, 得到

$$0=\frac{1}{2}\ln b^2+C.$$

所以 $C=-\frac{1}{2}\ln b^2$, 最后得到

$$F(a)=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}.\quad \square$$

解 2 用 "嵌入法". 注意到 $F(a)$ 的被积函数中难处理的因子是 $\frac{1}{t}$. 可以像解 1 那样用对 a 求导的办法消去 $\frac{1}{t}$, 又可以把 $\frac{1}{t}(1-e^{-\alpha t})$ 写成一个特殊的积分值, 即引入

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})\cos bt\,dt,$$

其中 $\alpha>0$, $b\neq 0$ 固定, 则 $F(\alpha)=I(0)$. 因为

$$\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})=-\int_\alpha^\beta e^{-ty}\,dy,$$

所以

$$I(\beta)=-\int_0^{+\infty}dt\int_\alpha^\beta e^{-ty}\cos bt\,dy.$$

形式上交换积分次序得

$$I(\beta)=-\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}e^{-ty}\cos bt\,dt=-\int_\alpha^\beta\frac{y}{y^2+b^2}\,dy=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{\beta^2+b^2}.$$

若上式对 $\beta=0$ 成立, 则可得 $F(\alpha)=I(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{b^2}$.

下面验证条件. 先考查对哪些 β 积分可换序.

(1) 设 $f(y,t)=e^{-ty}\cos bt$, 则 $\forall\alpha,\beta$, $f(y,t)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 设 $\beta>0,\alpha>0$, 由 $|e^{-ty}\cos bt|\leqslant e^{-\min\{\alpha,\beta\}t}$ 及 M 判别法知含参量广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ty}\cos bt\,dt$ 在$[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上关于 y 一致收敛. 因此当 $\beta>0$ 时, 积分可换序, 故

$$I(\beta)=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{\beta^2+b^2}.$$

最后验证在 $\alpha>0$, $b\neq 0$ 时, $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 处右连续. 令

$$f(t,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})\cos bt, & t>0,\ \beta\geqslant 0,\\ -\beta+\alpha, & t=0,\ \beta\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $f(t,\beta)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

下面用 Abel 判别法证明 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})\cos bt\,dt$ 关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而 $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 处右连续. 事实上

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\cos bt\,dt$ 关于 $\beta\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的;

(2) 对任意固定的 $\beta\geqslant 0$,

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})=-\beta e^{-\beta t}+\alpha e^{-\alpha t}=e^{-\alpha t}[\alpha-\beta e^{(\alpha-\beta)t}]$$

当 t 足够大时是定号的, 故 $e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}$ 当 t 充分大时是单调的, 又 $|e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}|\leqslant 2$, 由 Abel 判别法知 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})\cos bt\,dt$ 关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一

致收敛, 从而 $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 右连续. □

23.2.6 练习题

1. 设 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 对于 x 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 中收敛, $f_x(x,y)$ 在 $U(x_0)\times[a,+\infty)$ 中存在, 且当 $x\to x_0$ 时, $f_x(x,y)$ 关于 y 在任何有限区间上一致收敛于 $f_x(x_0,y)$, 又知积分 $\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $U(x_0)$ 上一致收敛. 证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\Big|_{x=x_0}$ 存在且等于 $\int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.
2. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\,\mathrm{d}x$, 证明 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续, 在 $\alpha=\pm1$ 处间断.
3. 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上连续.
4. 证明 $F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-yx}}{y}\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在, 且 $F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-yx}\right)\mathrm{d}y$.
5. 设 $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$, 证明 $F(\alpha)$ 在 $(0,2)$ 中连续.
6. 设 $F(y)=\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cos[x(1-y)]\,\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{y\to1}F(y)$.
7. 利用 Dirichlet 积分或 Euler-Poisson 积分求下列积分值:
   (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;
   (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$;
   (3) $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha>0)$;
   (4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.
8. 利用积分号下求导的方法求下列积分:
   (1) $I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (a\geqslant0)$;
   (2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha\geqslant0)$;
   (3) $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y}x\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}y\ \ (x\geqslant0)$.
9. 利用积分号下求积分的方法求下列积分:

(1) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha\geqslant 0)$ (提示: $\frac{\arctan\alpha x}{x}=\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2x^2}$);

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$ (提示: $\frac{1}{x^2+\alpha^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(x^2+\alpha^2)}\,\mathrm{d}t$).

10. 求含参变量瑕积分

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\quad(|\alpha|\leqslant 1).$$

11. 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2yx)\,\mathrm{d}x\ \ (-\infty<y<+\infty).$$

§23.3 B 函数与 Γ 函数

在计算积分或者解常微分方程时, 常常遇到其解不能表示为初等函数的问题. 解决这个问题的方法之一是引进一些新的函数, 它们可能是函数项级数的和函数, 或者是用含参量积分表示的函数, 然后研究它们的性质, 甚至做出函数值表. 这类函数一般称为**特殊函数**. 这一节介绍的 Beta 函数 (记为 B 函数) 与 Gamma 函数 (记为 Γ 函数) 就属于最重要特殊函数之列. 它们在数学的很多分支中都有应用. 有不少重要的定积分值可以用它们表示出来. 此外, Gamma 函数的一些性质本身也是数学分析中很好的训练, 在 23.3.4 小节中的部分内容可作为习题课的补充材料.

23.3.1 B 函数

B 函数也称为第一类 Euler 积分. B 函数是一个二元函数, 它的定义是

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,\quad p,q>0.\tag{23.9}$$

它还有下列等价的积分表示

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y,\\\mathrm{B}(p,q)&=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

B 函数的主要性质如下:

1. 对称性: $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$;
2. $\mathrm{B}(p,q)$ 在其定义域内连续, 且有任意阶连续偏导数;

3. 递推公式:

$$\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q),\quad \mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).$$

如果 m,n 都是自然数, 则

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$ (参见上册 326 页).

23.3.2　Γ 函数

Γ 函数也称为第二类 Euler 积分. 它是一元函数, 其含参积分定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ s>0. \tag{23.10}$$

它有如下的 **Gauss 无穷乘积**分解 (也称为 Euler-Gauss 公式) ①

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \tag{23.11}$$

Γ 函数的主要性质如下:

1. Γ 函数与 B 函数的关系

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\ q>0;$$

2. $\Gamma(s)$ $(s>0)$ 及其任意阶导数都连续, 且

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}(\ln t)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t;$$

3. 递推公式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad s>0; \tag{23.12}$$

4. $\ln\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为下凸函数 (见上册 243 页);

5. Legendre 加倍公式: 对于 $s>0$ 有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2});$$

6. 余元公式: 对于 $0<s<1$ 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi};$$

注 1　从积分定义 (23.10) 出发, 利用递推公式 (23.12) 可以将 Γ 函数的定义域开拓如下. 将 (23.12) 变形为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{23.13}$$

① 在上册 401 页已经以参考题形式引进了 Γ 函数的积分形式. 在第十三章介绍了无穷乘积之后, 于例题 13.4.4 中引进了 Γ 函数的无穷乘积定义 (13.37), 其中的 Γ 函数对于自变量不是 0 和负整数时均有定义. 在例题 16.1.4 中证明: 当自变量大于 0 时两个定义等价. Euler-Gauss 公式可由无穷乘积定义直接得到, 参见 (13.38).

注意到右边当 $-1 < s < 0$ 时也有定义, 于是我们用 (23.13) 的右边定义为 $-1 < s < 0$ 时的 Γ 函数的值, 以此类推, Γ 函数的定义域可以开拓到除去 0 和负整数的一切实数. 当然这样的开拓结果与 (13.37) 的无穷乘积定义完全一致.

注 2 在所列举的 Γ 函数的性质中, 前三个在教科书中都有. 为证明 $\ln\Gamma(s)$ 下凸, 从 §8.4 节中的下凸函数的定义出发, 用无穷限积分的 Hölder 不等式即可得到. 最后两个性质的证明比较困难, 见下面的 23.3.4 小节.

23.3.3 例题

例题 23.3.1 设平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 与 $x+y+z=1$ 围成四面体 V, 证明

$$\iiint\limits_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)}\quad (a,b,c>0).$$

证 作以下计算即可:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(y^{b-1}\frac{1}{c}z^c\right)\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{b-1}(1-x-y)^c\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

再令 $y=(1-x)t$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^1 (1-x)^{b-1}t^{b-1}(1-x)^c(1-t)^c(1-x)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}\,\mathrm{d}x\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^c\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{c}\mathrm{B}(a,b+c+1)\mathrm{B}(b,c+1)\\
&= \frac{1}{c}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+b+c+1)}\cdot\frac{\Gamma(b)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b+c+1)}\\
&= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)}.\quad\square
\end{aligned}$$

例题 23.3.2 确定 α,β,γ, 使

$$I = \iiint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma} < +\infty,$$

并求 I 的值, 其中 $D=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$.

解 首先应该有 $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$. 至于进一步的条件, 我们将在计算中得到, 令 $x=u^{2/\alpha},\ y=v^{2/\beta},\ z=w^{2/\gamma}$, 则

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\iiint\limits_{\Omega}\frac{u^{2/\alpha-1}v^{2/\beta-1}w^{2/\gamma-1}}{1+u^2+v^2+w^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,$$

其中 $\Omega=\{(u,v,w)\mid u\geqslant0,\ v\geqslant0,\ w\geqslant0\}$. 再作球坐标变换

$$u=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad v=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad w=\rho\cos\varphi,$$
$$\rho\geqslant0,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

则

$$\begin{aligned}I&=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\pi/2}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})-1}\varphi\cos^{2/\gamma-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&\qquad\times\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})-1}}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}\Big(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\Big)\mathrm{B}\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\Big)\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可见当且仅当 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}<1$ 时后一个积分收敛, 并且有

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{B}\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\Big)\Big),$$

这样便得到

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{\beta}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{\gamma}\Big)\Gamma\Big(1-\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\Big)\Big).\quad\square$$

例题 23.3.3 求积分 (见上册 395 页练习题 6(2))

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}\,\mathrm{d}x,\quad t>0.$$

解 1 由 M 判别法, $I(t)$ 关于 $t>0$ 是一致收敛的, 形式上求导得

$$I'(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}\Big(-\frac{2t}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

$\forall t_0>0$, 上述积分在 t_0 的邻域内一致收敛, 所以上面的求导可行. 令 $x=\dfrac{1}{y}$, 则

$$I'(t)=\int_{+\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{y^2}+y^2t^2)}2t\,\mathrm{d}y.$$

再令 $yt=z$, 则

$$I'(t)=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z^2+\frac{t^2}{z^2})}\,\mathrm{d}z=-2I(t).$$

所以

$$\ln I(t)=-2t+C,$$
$$I(t)=C\mathrm{e}^{-2t}.$$

考虑到 $I(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以

$$I(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2t}.\quad\square$$

解 2 下面的方法需要的工具不多, 但不容易想到: 令 $y=\dfrac{t}{x}$, 则

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{t^2}{y^2}+y^2)}\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

与原表达式相加得

$$2I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}(1+\frac{t}{x^2})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{t}{x})^2}\,\mathrm{d}(x-\frac{t}{x})$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2t}.\quad\square$$

例题 23.3.4 证明 Riemann 的 zeta 函数的积分形式

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x,\quad s>1.$$

证 对于 $x>0$ 有展开式

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}.$$

于是 $\forall A>0$ 有

$$\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^A x^{s-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

对于固定的 $s>1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的, 所以

$$\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{nA}(\frac{y}{n})^{s-1}(\frac{\mathrm{e}^{-y}}{n})\,\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{nA}y^{s-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

这个级数对于 $A\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的, 于是令 $A\to+\infty$, 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.\quad\square$$

例题 23.3.5 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x=\mathrm{e}^{-t}$, 则

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0\frac{-t}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}(-\mathrm{d}t)=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

在上题的结论中取 $s=2$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\Gamma(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{6}. \quad \square$$

例题 23.3.6 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中 $a>0,\ p\geqslant 0,\ \Omega$ 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 割下的区域 (Viviani 体).

解 见图 22.11 (现在 x,y 轴的位置有变化). 用柱坐标系, 则

$$\Omega=\{(r,\theta,z)\,\big|\,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a\sin\theta,\ -\sqrt{a^2-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-r^2}\}.$$

于是

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}}\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^p r\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}2r(a^2-r^2)^{\frac{p+1}{2}}\,\mathrm{d}r$$

$$=-\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{p+3}(a^2-r^2)^{\frac{p+3}{2}}\right)\Bigg|_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{4a^{p+3}}{p+3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^{p+3}\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4a^{p+3}}{p+3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma(\frac{p+4}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+5}{2})}\right). \quad \square$$

23.3.4 Γ 函数的特征刻画和几个重要公式的证明

前面已介绍过 Γ 函数满足如下三条性质:

1. 当 $x>0$ 时, $\Gamma(x)>0$, 且 $\Gamma(1)=1$;
2. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;
3. $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为下凸函数.

关于 Γ 函数的一个非常漂亮的结果是 Bohr 与 Mollerup 定理 (1922 年), 即上面的三条性质完全刻画了 Γ 函数.

命题 23.3.1 (Bohr-Mollerup 定理) 如果定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

(1) $f(x)>0$, 且 $f(1)=1$,

(2) $f(x+1)=xf(x)$,

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的下凸函数,

则 $f(x)\equiv\Gamma(x),\ x\in(0,+\infty)$.

证 已知 Γ 函数满足上述三条, 故只要证明 f 是由 (1), (2), (3) 惟一确定的函数就可以了. 而由 (2) 只要对 $x\in(0,1)$ 进行证明. 令 $\varphi(x)=\ln f(x)$, 则

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x,\quad 0<x<+\infty,\tag{23.14}$$

$\varphi(1)=0$, 且 φ 是下凸函数. 设 $0<x<+\infty$, 考虑 φ 在

$$[n,n+1],\quad [n+1,n+1+x],\quad [n+1,n+2]$$

三个闭区间上的差商, 有

$$\begin{aligned}\ln n=\varphi(n+1)-\varphi(n)&\leqslant\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\\&\leqslant\varphi(n+2)-\varphi(n+1)=\ln(n+1).\end{aligned}\tag{23.15}$$

另一方面, 重复 (23.14) 可得

$$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\ln[x(x+1)\cdots(x+n)].$$

代入 (23.15) 并整理得

$$0\leqslant\varphi(x)-\ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)\leqslant x\ln(1+\frac{1}{n}).$$

由对数函数的连续性, 令 $n\to\infty$, 得

$$\varphi(x)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right).$$

因此

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

利用例题 16.1.4 的结论知 $f(x)=\Gamma(x)$. □

注 既然这个定理完全刻画了 Γ 函数, 因此就可以由它出发导出 Γ 函数的基本性质 (参见 [7] 的第 7 章), 下面就是一个例子.

命题 23.3.2 (Legendre 加倍公式) 对于 $x>0$ 成立

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}).$$

证 设 $g(x)=\dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\dfrac{x}{2})\Gamma(\dfrac{x+1}{2})$, 利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 容易检验 $g(x)$ 满足 Bohr-Mollerup 定理中的条件 (1)–(3), 可见有

$$\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}),$$

将其中 x 换为 $2x$ 就得到所要的加倍公式. □

命题 23.3.3 (余元公式) 对于 $0<x<1$ 成立

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

根据本书前面的知识, 我们可以对余元公式给出下列三种证法:

证 1 利用 Γ 函数的 Euler-Gauss 无穷乘积表达式 (23.11) (即 (13.38)) 与正弦函数的无穷乘积表达式 (13.30). 具体细节见例题 13.4.4 以及 (13.40). □

证 2 首先利用 Γ 函数与 B 函数的关系得到

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\mathrm{B}(x,1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^x(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

然后利用例题 16.1.3 的 Euler 积分公式. □

证 3 利用上册 402 页参考题 8(2) 的结果: 当 $2m+1<2n$ 时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{2m+1}{2n}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{2m+1}{2n}\Big)&=\mathrm{B}\Big(\frac{2m+1}{2n},1-\frac{2m+1}{2n}\Big)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+y}\,\mathrm{d}y\\&=2n\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n},\end{aligned}$$

当 x 为无理数时, 通过形如 $\dfrac{2m+1}{2n}$ 的有理数取极限. □

命题 23.3.4 (Γ 函数的 Stirling 公式) 关于 Γ 函数有渐近公式:

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\ (x\to+\infty)\,^{①}. \tag{23.16}$$

证 (此证明取自 [45].) 在 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 中令 $t=x(1+u)$, 得到

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-1}^{+\infty}[(1+u)\mathrm{e}^{-u}]^x\,\mathrm{d}u. \tag{23.17}$$

令

$$h(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{u^2}[u-\ln(1+u)], & -1<u<+\infty,\quad u\neq 0,\\ 1, & u=0.\end{cases}$$

则 h 在 $(-1,+\infty)$ 上为单调减少的连续函数, 并满足

$$(1+u)\mathrm{e}^{-u}=\exp\Big(-\frac{u^2}{2}h(u)\Big).$$

于是, 对 (23.17) 作代换 $u=s\sqrt{\dfrac{2}{x}}$, 得

$$\Gamma(x+1)=x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中

① 对于 x 为正整数的情况, 在上册 364~365 页已给出了 $n!$ 的 Stirling 公式的证明. 在 13.4.3 小节练习题 10 中指出可以用无穷乘积方法证明关于 $n!$ 的 Stirling 公式. 又在上册 374 页的参考题 15 中指出如何可以得到更为精确的 Stirling 公式. 此外, 还在上册 363 页的 (11.31) 不加证明地给出了含有 Bernoulli 数的一般形式的 Stirling 公式.

$$\psi_x(s)=\begin{cases}\exp[-s^2h(s\sqrt{\dfrac{2}{x}})], & -\sqrt{\dfrac{x}{2}}<s<+\infty,\\ 0, & s\leqslant-\sqrt{\dfrac{x}{2}}.\end{cases}$$

可以验证

(1) 对每个 s 而言, 当 $x\to+\infty$ 时, $\psi_x(s)\to\mathrm{e}^{-s^2}$;

(2) 当 $x\geqslant1$ 时, 对 $s>0$, 有 $0<\psi_x(s)<\psi_1(s)$;

(3) 对 $s<0$, 有 $0<\psi_x(s)<\mathrm{e}^{-s^2}$;

(4) 对于任意 $A>0$, 含参量广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $x\in[-A,A]$ 上一致收敛;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_1(s)\,\mathrm{d}s$ 收敛.

因而, 就可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\sqrt{\pi},$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}x^x\mathrm{e}^{-x}}=1,$$

这就是关于 Γ 函数的 Striling 公式 (23.16). □

注 这只是关于 Γ 函数的 Stirling 公式的最简单形式. 与上册 363 页 (11.31) 类似的关于 Γ 函数的一般 Stirling 公式见 [19] (卷 2 第 501 小节) 等参考书.

23.3.5 练习题

1. 计算

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\dfrac{1}{x}}}$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. 试用 Γ 函数或 B 函数表示

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x\ \ (|\alpha|<1)$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1(1+x)^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x\ \ (a,b>0)$.

3. n 为正整数, $p>0$, 证明

$$\mathrm{B}(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}.$$

4. 证明 $\ln\Gamma(s)$ 是下凸函数.

5. 按照下列步骤证明公式 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(1) $\Gamma(p)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(q)=\lim\limits_{A\to\infty}4\iint\limits_{G(A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 其中

$$f(u,v)=u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)},$$

$$G(A)=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant A,\ 0\leqslant v\leqslant A\};$$

(3) 令 $D(R)=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$, 则

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q),$$

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q);$$

(4) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

§23.4 对于教学的建议

23.4.1 学习要点

1. 含参变量积分是我们遇到的又一种新的函数表示方式. 对于它的分析性质的研究, 如连续性、可微性和可积性等, 涉及积分运算和其他分析运算的运算次序的交换性. 一致收敛性给出了保证交换运算次序的重要条件. 在很多情况下, 可以用 M 判别法判断一致收敛性, 这是应该熟练掌握的.

2. 用嵌入法计算广义积分的值体现了数学中的"嵌入"思想. 我们要考虑一个 1 维的问题 (比如计算一个定积分). 我们不妨把这个问题放到更高维的框架中, 例如再引入一个参变量, 把这个积分作为含参变量积分的特例. 由于在引入的高维框架中, 我们可以有更多的可施展数学工具 (如积分、微分等) 的天地, 就有可能从另一个角度 (而这一个角度是我们引入高维框架后带来的) 把我们的问题简化, 从而达到解决原有问题的目的. 在具体计算过程中, 要作一些分析. 在什么地方引入参量比较合适, 用微分法还是用积分法, 都是有讲究的. 比如计算 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. 把它看成是含参量积分 $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha=0$ 时的值. 引入因子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 有两个作用, 对 α 求导可消去导致不可积的因子 $\frac{1}{x}$, 同时 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 又是收敛因子, 保证了在 $\alpha>0$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha\mathrm{d}x$ 的内闭一致收敛性. 故可在积分号内求导, 则有

$$\varphi'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

再积分就有 $\varphi(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha,\quad \alpha>0$. 如果 $\varphi(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\varphi(0)=\lim_{\alpha\to 0^+}\varphi(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

3. 含参量积分的一致收敛性的判别与函数项级数有许多类似之处, 同时也要注意到利用积分自身的特点, 如变量代换, 分部积分等. 以 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 为例, 作变换 $x^2=t$, 就化为 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}\,\mathrm{d}t$, 成为我们熟悉的类型.
4. B 函数的三个积分表达式, 各有各的长处, 应加以记忆. 这样, 遇到相应的积分, 就可写成特殊的 B 值, 再利用余元公式等得到积分值.
5. **对习题课的建议** 许多学生对讨论含参变量广义积分的一致收敛性有畏难情绪, 习题课上要由浅入深地进行引导, 分析难点, 找出办法. 大多数题目只需使用 M 判别法. 在用嵌入法计算一些特殊的广义积分的值时, 如果觉得证明计算合理性 (如检验一致收敛性等) 的过程较长, 可以在解题时先进行形式运算, 算出积分值后再给出运算合理性的证明.

本章的内容综合性强, 计算题大多具有一定的技巧性. 因此应在习题课上作比较系统的示范和总结.

23.4.2 参考题

1. 设 $f(x,t)$, $f_x(x,t)$ 连续, 记 $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$, 其中 a 为正常数, 证明 $u(x,t)$ 满足
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t).$$
2. 设 n 为正整数, 记
$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$
证明 $J_n(x)$ 满足
$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$
3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0)=0$, 定义
$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ 0<x\leqslant 1,\ \varphi(0)=0.$$
证明:

(1) $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶连续可微, 且
$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ 0<x\leqslant 1,\ \varphi'(0)=0;$$
(2) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ \ 0<x\leqslant 1.$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上单调 $(A>0)$, 证明

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

5. 设 $F(t)=t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有界可积 $(\forall b>0)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, 证明 $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=\alpha$.

6. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

(1) $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/(4\varepsilon)}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

7. 讨论下列函数在 $(0,1)$ 上的连续性:

(1) $f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$;

(2) $g(\alpha)=\int_0^1\dfrac{f(t)}{\sqrt{|t-\alpha|}}\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的有界可积函数.

8. 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围立体的体积.

9. 求立体

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant1,\quad x,\ y,\ z\geqslant0$$

的质心的 x 坐标.

10. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ 所包围的面积对 x 轴的惯性矩.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中连续, 证明

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0).$$

12. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13. 求 $\int_0^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>1$.

14. 求 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

15. 求 Laplace 积分

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\qquad J_k=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\ a,b>0,\ k\in\mathbf{N}_+.$$

16. 应用 Γ 函数的 Gauss 乘积分解证明 Euler 常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=-\Gamma'(1).$$

17. (1) 利用 n 次单位根分解式证明

$$1+x+\cdots+x^{n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}\right);$$

(2) 利用 (1) 证明

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}};$$

(3) 证明 Euler 乘积

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

第二十四章 曲线积分

本章在 §24.1 和 §24.2 两节中分别介绍第一型和第二型曲线积分的定义、计算、应用以及这两类曲线积分之间的关系. §24.3 节介绍重要的 Green 公式, 平面上曲线积分与路径无关的条件以及等周定理. 在 §24.4 节中介绍连续向量场的旋转度并用于证明 Brouwer 不动点定理和代数基本定理. 最后一节是学习要点和参考题.

§24.1 第一型曲线积分

24.1.1 第一型曲线积分的定义与计算

$\mathbf{R}^n$ 中以 A 点为始点, B 点为终点的连续不自交的曲线段 $\Gamma=\widetilde{AB}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一条**简单曲线**. 如果 $A=B$, 则称 Γ 为封闭曲线或闭曲线, 否则为不封闭曲线. 在 Γ 上从 A 到 B 依次取有限个点 $A=A_0, A_1,\cdots,A_k=B$, 它们确定了 Γ 的一个分割 T. 依次联结 $A_0, A_1,\cdots,A_k$ 的线段组成一条折线, 称为 Γ 的**内接折线**, 其长度记为 $l(\Gamma,T)$. 如果

$$\sup_T l(\Gamma,T)<+\infty,$$

则称 Γ 为**可求长曲线**, 而且 $l(\Gamma)=\sup\limits_T l(\Gamma,T)$ 称为 Γ 的**弧长**.

下面定义在简单可求长曲线上的第一型曲线积分. 设函数 f 定义在 Γ 上, 对于 Γ 的任一分割 $T: A=A_0, A_1, A_2,\cdots,A_k=B$, 记 ΔS_i 为从 A_{i-1} 到 A_i 的曲线段 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的弧长, $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\Delta S_i$. 任取 $\boldsymbol{\xi}_i\in\widetilde{A_{i-1}A_i}$, 如果

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta S_i$$

收敛, 且极限与 Γ 的具体分法无关, 则称函数 f 在 Γ 上的第一型 (或第一类) 曲线积分存在, 其极限值 I 称为 f 在 Γ 上的**第一型曲线积分**. 记为

$$I=\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s=\int_{\widetilde{AB}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

第一型曲线积分也称为对弧长的积分, 它与曲线的方向选取无关. 对于同一条简单可求长曲线 $\Gamma=\widetilde{AB}$, 也可选定 B 为始点, A 为终点, 记为 $\Gamma=\widetilde{BA}$, 则

$$\int_{\widetilde{AB}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s=\int_{\widetilde{BA}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

若 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中简单可求长曲线, f 在 Γ 上连续, 则 f 在 Γ 上的第一型曲线积分存在.

若 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中逐段光滑的简单曲线, 且有参数表示

$$\Gamma: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

则弧长微分

$$\mathrm{d}s = |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t = \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i'(t))^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

从而

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{24.1}$$

例题 24.1.1 求 $I = \oint_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

解 1 (常规方法) 先写出曲线 C 的参数表达式. 由于 C 是球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 与经过球心的平面 $x+y+z=0$ 的交线, 因此是空间的一个圆周. 它在 x, y 平面上的投影为一个椭圆, 这个椭圆方程可从两个曲面方程中消去 z 得到. 即以 $z = -(x+y)$ 代入 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 中, 得

$$x^2+xy+y^2 = \frac{R^2}{2}.$$

将左边配方成平方和

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (\frac{x}{2}+y)^2 = \frac{R^2}{2}.$$

令

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t, \qquad \frac{x}{2}+y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

即得到参数表示

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, \qquad y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t - \frac{R}{\sqrt{6}}\cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

代入 $z = -(x+y)$ 中, 得

$$z = -\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

由此得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \\
&= R\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t + \Big(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= R\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

故有

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad \square$$

解 2 (利用对称性) 由对称性有

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_C y^2\,\mathrm{d}s = \int_C z^2\,\mathrm{d}s,$$

则

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}R^2\int_C \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad \square$$

24.1.2 第一型曲线积分的应用

为方便起见, 在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑以下问题.

求弧长 在 (24.1) 中令 $f \equiv 1$, 则得到弧长公式

$$l = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

求曲线的质量 设曲线 Γ 的线密度为 $\rho(x,y,z)$, 则曲线 Γ 的质量

$$\begin{aligned} m &= \int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

求曲线的质心坐标 曲线 Γ 的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由下面的公式确定:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad y_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad z_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $m = \displaystyle\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 为曲线的质量.

例题 24.1.2 求曲线 Γ:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = a(x+y), \\ x^2-y^2 = \dfrac{9}{8}z^2 \end{cases}$$

从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长, 其中 $a>0$, $x_0>0$.

解 在曲线方程第一式两边乘 $(x-y)$, 并利用第二式得

$$(x-y)^3 = a(x^2-y^2) = \frac{9a}{8}z^2,$$

即

$$x-y = \frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}. \tag{24.2}$$

将 (24.2) 代入第一式得

$$x+y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}. \tag{24.3}$$

由 (24.2), (24.3) 把 z 看成参数, 得

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3} + \frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right),\quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3} - \frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right).$$

微分后得到

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3} + \sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3} - \sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z.$$

于是

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3} + \sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x,$$

所以弧长

$$\int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_0^{x_0} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}x_0. \quad \square$$

例题 24.1.3 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在第一卦限部分的边界的质心坐标 (x_0, y_0, z_0).

解 应用质心坐标公式, 其中 $\rho \equiv 1, m = \frac{3}{2}\pi a$. 如图 24.1 所示, 在 Γ_1 上用极坐标系 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$, 且

$$\int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} a\cos\theta a\,\mathrm{d}\theta = a^2.$$

由对称性 $\int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}s = a^2$, 且

$$\int_{\Gamma_3} x\,\mathrm{d}s = 0.$$

于是

$$x_0 = \frac{2}{3\pi a}\left(\int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}s\right) = \frac{4a}{3\pi}.$$

再用对称性得

$$y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}. \quad \square$$

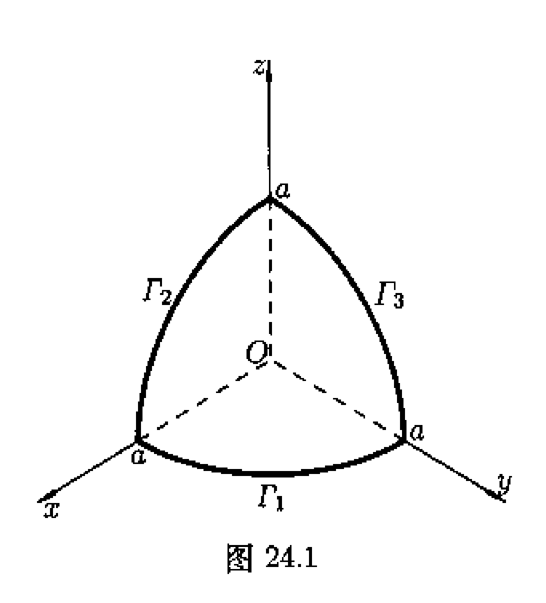


图 24.1

24.1.3 练习题

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

(2) $\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为由曲线 $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线;

(3) $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

(4) $\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$;

(5) $\int_C z\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ 从 $(0,0,0)$ 到 $(a, a, \sqrt{2}a)$ 的弧.

2. 求下列空间曲线的弧长:

(1) $y = a\arcsin\dfrac{x}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ 从 $(0,0,0)$ 到 (x_0, y_0, z_0);

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ch}(\arctan\dfrac{y}{x}) = a$ 从 $(a,0,0)$ 到 (x,y,z).

3. 计算均匀的曲线 $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ 从 $(0,a)$ 到 (b,h) 的弧的质心坐标.

4. 设 $\Gamma = \widetilde{AB}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的简单可求长曲线, Γ 的弧长记为 L. 对每一个 $s\in[0,L]$, 存在惟一的 $\boldsymbol{x}\in\Gamma$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, 使得 Γ 上从 A 到 $\boldsymbol{x}$ 的曲线段 $\widetilde{A\boldsymbol{x}}$ 的弧长等于 s, 由此定义了一个 $[0,L]$ 上的函数

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s), \quad 0\leqslant s\leqslant L. \tag{24.4}$$

即曲线 Γ 以弧长 s 为参数的参数方程为 (24.4). 设 f 是定义在 Γ 上的函数, 如果 f 在 Γ 上的第一型曲线积分存在, 则

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

§24.2 第二型曲线积分

24.2.1 第二型曲线积分的定义和计算

第二型曲线积分的物理背景之一是质点受力沿曲线运动所做的功. 因此我们给定了曲线的起点和终点. 这样的曲线称为**有向曲线**. 下面以 $\mathbf{R}^3$ 为例定义第二型曲线积分. 设 $\Gamma = \widetilde{AB}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条简单可求长的有向曲线

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

为定义在 Γ 上的向量值函数. 对于与 Γ 方向一致的任意分割 T

$$T: A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m = B,$$

记 $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, ΔS_i 为曲线段 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的弧长, $d(T) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta S_i$. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\widetilde{A_{i-1}A_i}$, 如果极限

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_i\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right]$$

存在且极限与 Γ 的具体分法以及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的具体取法无关, 则称 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的第二型曲线积分存在, 极限值称为 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的**第二型曲线积分**, 记为

$$I = \int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

或

$$I = \int_\Gamma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

第二型曲线积分又称为对坐标的积分.

若逐段光滑的有向曲线 Γ 有参数表示

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 $[a,b]$ 是实轴上的有向区间, 参数 t 从 a 变到 b 与 Γ 的定向一致, 设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, 则

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

例题 24.2.1 计算积分

$$I=\int_C (x^2+2xy)\,\mathrm{d}y,$$

其中 C 表示逆时针方向的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解 利用椭圆的参数表达式

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

按给定方向 t 由 0 变到 π, 将 x,y 用 t 的表达式代入并用 $b\cos t\,\mathrm{d}t$ 来代替 $\mathrm{d}y$, 得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)b\cos t\,\mathrm{d}t\\&=a^2b\int_0^{\pi}\cos^3 t\,\mathrm{d}t+2ab^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}ab^2.\quad\Box\end{aligned}$$

例题 24.2.2 求 $I=\int_{\Gamma} y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x^2+y^2=ax\end{cases}$$

上 $z\geqslant 0$ 的部分, 这里 $a>0$, 且从 x 轴正向看 Γ 是逆时针方向.

解 参见图 22.11. 先求曲线 Γ 的参数表达式. 若以 x, y, z 之一为参数, 则要涉及开方运算, 出现分支, 很不方便. 从第二个方程易见引入柱坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,$$

于是 Γ 的参数方程为

$$x=a\cos^2\theta,\quad y=a\cos\theta\sin\theta,$$
$$z=\sqrt{a^2-r^2}=a|\sin\theta|,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据曲线定向, 有

$$\begin{aligned}I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}&\big[a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot 2a\cos\theta(-\sin\theta)\\&+a^2\sin^2\theta\cdot a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+a^2\cos^4\theta\cdot z'(\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

第一项是奇函数, 且因子 $z(\theta)$ 是偶函数, 所以 $z'(\theta)$ 是奇函数, 故第三项也是奇函数, 于是

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \sin^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 2a^3\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta - 2\sin^4\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{4}a^3. \quad \square$$

有的时候空间曲线的参数方程不容易写出或写出来比较复杂, 我们可以借助下列命题把问题转化为平面曲线的曲线积分.

命题 24.2.1 设逐段光滑闭曲线 Γ 在光滑曲面 $z = f(x,y)$ 上, 曲线 Γ 在 XY 平面上的投影曲线为 γ, 函数 $P(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, 则
$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \oint_\gamma P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x,$$
其中 γ 的定向与 Γ 的定向一致.

证 设 γ 的参数方程为
$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$
则空间曲线 Γ 的方程为
$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = f(\varphi(t),\psi(t)).$$
于是
$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P\big[\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t))\big]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \oint_\gamma P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

24.2.2 两类曲线积分的关系

坐标微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$, 其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为曲线沿指定方向的单位切向. 因而就有
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\Gamma (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s.$$
对于空间曲线 Γ, 设 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是切方向余弦, 则
$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s. \tag{24.5}$$

当 Γ 为平面曲线时, 取法线的方向 $\boldsymbol{n}$ 与切线的方向 $\boldsymbol{\tau}$ 的夹角 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau}) = \frac{\pi}{2}$, 见图 24.2, 则
$$\angle(x,\boldsymbol{n}) = \angle(x,\boldsymbol{\tau}) + \angle(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n}) = \alpha - \frac{\pi}{2},$$
即
$$\cos\alpha = -\sin(x,\boldsymbol{n}),\quad \sin\alpha = \cos(x,\boldsymbol{n}).$$

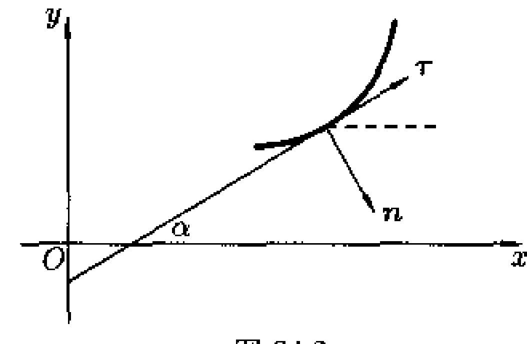


图 24.2

于是 Γ 为平面曲线时
$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma [-P\sin(x,\boldsymbol{n}) + Q\cos(x,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s. \tag{24.6}$$

24.2.3 第二型曲线积分的应用

求变力做功

例题 24.2.3 已知一平面力场, 它的方向指向坐标原点, 它的大小与它到原点的距离 r 的平方成反比:

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

其中 μ 为常数. 计算当质量 $m=1$ 的质点自位置 A 移动到位置 B (不通过原点) 时力场做的功.

解 以 (x,y) 表示点的坐标. 设力与 x 轴的夹角 θ, 则

$$\cos\theta = -\frac{x}{r}, \quad \sin\theta = -\frac{y}{r}.$$

于是力在 x, y 方向的分量分别为

$$F_1(x,y) = F\cos\theta = -\mu\frac{x}{r^3}, \quad F_2(x,y) = F\sin\theta = -\mu\frac{y}{r^3}.$$

而功可表示为曲线积分

$$w = -\mu\int_{\widetilde{AB}} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3}.$$

容易看出

$$-\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3} = \mathrm{d}\frac{1}{r}, \tag{24.7}$$

且如将 x, y 用参数表达式 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 代入, 其中 $a\leqslant t\leqslant b$, 并令

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}$$

时, 等式 (24.7) 仍成立. 于是

$$w = \mu\int_a^b \mathrm{d}\frac{1}{r} = \frac{\mu}{r}\bigg|_a^b = \mu\Big(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\Big),$$

其中 r_A, r_B 分别表示原点到 A, B 的距离. □

梯度曲线 设 f 是区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的 C^1 函数, 并设 ∇f 是在 D 上处处不为零的向量. 若 Γ 是自某点 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 出发的可微曲线, 它的每一点的切线方向与 f 的梯度方向一致, 就称 Γ 为 f 在 D 上的**梯度曲线**. 设 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

则可取 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 满足如下微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{24.8}$$

初始值为 $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$. 由常微分方程组解的存在性定理和延拓定理[①], $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 在 D 内存在并可延伸到 D 的边界. 由 (24.8), Γ 的弧长微分满足

① 可参考任何一本常微分方程的教科书, 我们所用的知识并没有超出大学二年级的范围. 这些材料均可作为曲线积分复习时的补充.

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.$$

下面我们借助 $\mathbf{R}^2$ 中的梯度曲线重新讨论例题 21.3.3. 这是著名的美国大学 Putnam 竞赛第二十八届的 B6 题, 它公布的标准答案就是例题 21.3.3 的解答. 我们现在可以将那里的梯度模的最小值的上界估计从 16 改进为 4.

例题 24.2.4 设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数, 且满足 $|f(x,y)| \leqslant 1\ \forall (x,y) \in D$. 试证: 存在点 $p_0(x_0,y_0) \in \mathrm{int}D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$, 使得 $(f_x^2 + f_y^2)\big|_{(x_0,y_0)} \leqslant 4$.

解 如果有点 (x_0,y_0), 使 $\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{0}$, 即 $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, 则估计式成立. 如果 ∇f 在 D 中处处不为零向量, 则 f 在 D 中的梯度曲线存在. 设 $\varGamma$ 是 f 在 D 中的梯度曲线, 其参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [0,T],$$

$\varGamma$ 的起点为原点, 终点为 $(x(T), y(T))$. 由曲线积分公式得到

$$\begin{aligned} f(x(T),y(T)) - f(0,0) &= \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\varGamma (\nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

设 l 是 $\varGamma$ 的弧长, 并且 $\varGamma$ 自原点出发到达 D 的边界, 则 $l \geqslant 1$. 如果在 $\mathrm{int}D$ 上处处有 $\nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{\tau} > 2$, 则就有

$$2 \geqslant |f(x(T),y(T)) - f(0,0)| > 2l \geqslant 2,$$

引出矛盾. 因此存在 $(x_0,y_0) \in \mathrm{int}D$, 使 $\nabla f(x_0,y_0) \cdot \boldsymbol{\tau} \leqslant 2$. 又因为 ∇f 与 $\boldsymbol{\tau}$ 相切, 故 $\nabla f(x_0,y_0) \cdot \boldsymbol{\tau} = |\nabla f(x_0,y_0)| \leqslant 2$, 即 $(f_x^2 + f_y^2)\big|_{(x_0,y_0)} \leqslant 4$. □

注 用梯度曲线来估计函数差的下界也是十分有效的, 其依据就是函数沿梯度方向增长最快. 用这样的方法可以证明如下的**高维中值定理** (见美国数学月刊 106 卷 (1999) 674~675 页, 其证明作为参考题):

设 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在 n 维球 $D = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2\}$ 上的连续可微函数, 则存在点 $\boldsymbol{p}_0 = (p_1^0, \cdots, p_n^0) \in \mathrm{int}D$, 使

$$\max_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x}) - \min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x}) = |\nabla f(\boldsymbol{p}_0)| \cdot 2r.$$

利用这个结果或修改例题中的证明可以将估计值 4 改进为最佳的估计值 1.

24.2.4 练习题

1. 计算 $\displaystyle\int_L xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为曲线 $\widehat{AB}$, 方向为由 A 到 B, $A = (1,1)$, $B = (2,3)$:

(1) $\widetilde{AB}$ 是直线 AB; (2) $\widetilde{AB}$ 的方程是 $y=2(x-1)^2+1$; (3) $\widetilde{AB}$ 是折线 $\widehat{ADB}, D=(2,1)$.

2. 求 $\displaystyle\int_C \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{y-a}\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 到 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 的一段.

3. 求 $\displaystyle\int_C (x+y)^2\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是以 $A(1,1),B(3,2),D(3,1)$ 为顶点的三角形, 取顺时针方向.

4. 求 $\displaystyle\int_C 4xy^2\,\mathrm{d}x-3x^4\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段.

5. 求 $\displaystyle\oint_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2ax$ 的交线 $(0<a<R, z>0)$, 且由 z 轴正向看是逆时针方向.

6. 求 $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面上的曲线:
$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$
$$R>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

并且使 (1) R,φ 为常数; 或 (2) R,θ 为常数.

7. 求 $\displaystyle\int_C (x^2+5y+3yz)\,\mathrm{d}x+(5x+3xy-2)\,\mathrm{d}y+(3xy-4z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为

 (1) $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\dfrac{bt}{2\pi}$ 自 $t=0$ 到 2π 的一段;

 (2) 直线段 AB, 起点 $A=(a,0,0)$, 终点 $B=(a,0,b)$.

8. 已知力场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$, 求质点沿曲线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\dfrac{b}{2\pi}t$ 从点 $A(a,0,0)$ 运动到 $B(a,0,b)$ 时, 力场 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功.

9. 质点在力场 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+y^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{2y(1-\mathrm{e}^x)}{(1+y^2)^2}\boldsymbol{j}$ 作用下, 沿 $x^2+(y-1)^2=1$ 由 $(0,0)$ 点沿顺时针方向运动到 $(1,1)$ 点, 求力场作的功.

§24.3 Green 公式

24.3.1 Green 公式

Green 公式是将平面上某区域内的二重积分与该区域边界上的一个特定的第二型曲线积分之间建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个有界闭区域, 其边界 ∂D 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成. 又设函数 P,Q 在 D 内有关于自变量 x 和 y 的连续偏导数, 则下列 Green 公式成立:

$$\iint\limits_D \Big(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y, \tag{24.9}$$

其中 ∂D 的方向关于 D 是正向的.

由平面上两类曲线积分之间的关系式 (24.6) 知, Green 公式 (24.9) 又可以写为

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int\limits_{\partial D} -Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y\\&=\int\limits_{\partial D}[Q\sin(x,\boldsymbol{n})+P\cos(x,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量. 利用 $\angle(x,\boldsymbol{n})=\angle(x,y)+\angle(y,\boldsymbol{n})=\frac{\pi}{2}+\angle(y,\boldsymbol{n})$ (参见图 24.2), 则

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D}[P\cos(x,\boldsymbol{n})+Q\cos(y,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s. \tag{24.10}$$

公式 (24.9), (24.10) 给我们提供了间接求平面上曲线积分的方法, 即利用 Green 公式将曲线积分化为二重积分. 即使曲线 C 不封闭, 也可以采用添加 "辅助线" 的方法去做.

例题 24.3.1 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的弧段, 求

$$I=\int_C(2xy^3-y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\,\mathrm{d}y.$$

解 令 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$, $Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$, 则

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

为了利用 Green 公式 (24.9), 添加辅助线 (如图 24.3), 则

$$I=\int_C+\int_{\overline{BA}}+\int_{\overline{AO}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{OA}}.$$

由 Green 公式, 前三项的积分为零, 于是

$$I=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{OA}}$$
$$=\int_0^1[1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3(\frac{\pi}{2})^2y^2]\,\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.\quad\square$$

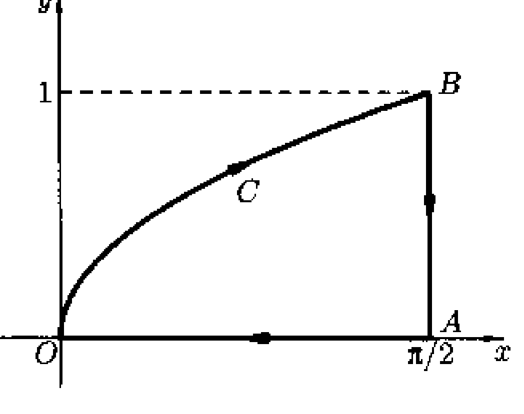


图 24.3

例题 24.3.2 计算积分

$$I=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{r}=(x,y), r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}, \boldsymbol{n}$ 是 C 上的单位外法向量.

解 由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\dfrac{1}{r}(x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y))$ 得到

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

当 (0, 0) 在 C 外时, 利用 Green 公式 (24.10), 则

$$I=\iint_D\Big[\partial_x\Big(\frac{x}{r^2}\Big)+\partial_y\Big(\frac{y}{r^2}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中 D 是以 C 为边界的区域.

当 (0,0) 在 C 内时, 以 (0,0) 为原心, 以充分小的 ε 为半径作圆 C_ε, 使得 C_ε 在 C 内, 以 C 及 C_ε 为边界的区域为 D_ε, 则

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s+\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

其中 C_ε 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向指向坐标原点. 对前两项用 Green 公式, 则

$$I=-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

在圆周 C_ε 上,

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=-\frac{x}{\varepsilon},\ \ \cos(\boldsymbol{n},y)=-\frac{y}{\varepsilon},\ \ r=\varepsilon,$$

从而

$$I=\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=2\pi.$$

当 $(0,0)\in C$ 时, 过原点作曲线 C 的切线 OA, OB, 设 OA, OB 的夹角为 θ (见图 24.4), 如果曲线 C 在原点光滑, 则 $\theta=\pi$.

作一个以 (0,0) 点为心, ε 为半径的圆 B_ε, 记 B_ε 的圆周在 C 内的部分为 C_ε, 由上面的计算知

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to0}\theta_\varepsilon=\theta,$$

其中 θ_ε 是 C_ε 所对应的圆心角. □

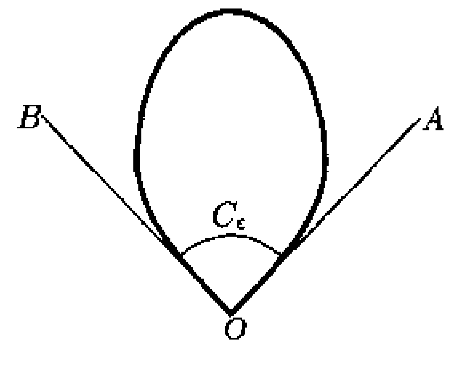


图 24.4

注 注意使用 Green 公式的条件: P, Q 在 D 上连续可微. 这正是在本题中要分 (0,0) 在 C 外, C 内和 C 上三种情况讨论的缘故. 许多学生并不注意到这

里的区别, 尤其是 $(0,0)$ 在 C 内时, 他们会错误地认为被积函数在 C 上是连续可微的, 因而 Grren 公式就可以用了.

例题 24.3.3 计算

$$I=\oint_C \frac{e^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,dx+(y\sin x-x\cos x)\,dy\right],$$

其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

解 令

$$P(x,y)=\frac{e^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x),$$
$$Q(x,y)=\frac{c^y}{x^2+y^2}(y\sin x-x\cos x),$$

由计算知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 从而可在不包含原点的区域上用 Green 公式. 为此取 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取逆时针方向, 则

$$I=\oint_C-\oint_{C_\varepsilon}+\oint_{C_\varepsilon}.$$

对等式右边前两项用 Green 公式, 于是

$$\begin{aligned}I&=\oint_{C_\varepsilon}\frac{e^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,dx+(y\sin x-x\cos x)\,dy\right]\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}e^y\left[(x\sin x+y\cos x)\,dx+(y\sin x-x\cos x)\,dy\right].\end{aligned}$$

记 C_ε 围成的区域为 D_ε, 再用一次 Green 公式, 则

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}-2e^y\cos x\,dx\,dy.$$

应用积分中值定理得到

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}(-2e^\xi\pi\varepsilon^2\cos\eta)=-2\pi e^\xi\cos\eta,$$

其中 $(\xi,\eta)\in D_\varepsilon$. 上述等式对 $\forall\varepsilon>0$ 都对, 令 $\varepsilon\to 0$, 得

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0+}(-2\pi e^\xi\cos\eta)=-2\pi.\quad\square$$

平面图形的面积 作为 Green 公式的直接推论, 可以得到如下的面积公式. 由逐段光滑的简单曲线 C 所界的面积 S 可用曲线积分表示为

$$S=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx,$$

其中曲线的正向为逆时针方向 (参见上册 336~340 页的公式 (11.1) 及例题).

例题 24.3.4 计算双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\tag{24.11}$$

所围区域的面积.

解 1 由对称性只需计算第一, 四象限的面积. 令

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},$$

代入方程 (24.11) 得 $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, 则参数方程为

$$x(\theta) = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \ y(\theta) = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

并且

$$x'(\theta) = a(-\sin\theta)\sqrt{\cos 2\theta} + a\cos\theta\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$y'(\theta) = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + a\sin\theta\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

所以

$$xy' - yx' = a^2\cos 2\theta.$$

由面积公式得到

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\oint x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2. \quad \square$$

解 2 (用定积分求面积) 在极坐标系中, 双纽线 (24.11) 的方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\theta,\ \ \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$$

于是

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2. \quad \square$$

24.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件

在力学上一种非常重要的力场是**保守场**. 质点在保守场中移动, 保守场所做的功只与质点的起点和终点的位置有关, 与移动的具体路径无关. 什么样的力场是保守场的问题从数学上看就是在什么条件下第二型曲线积分与路径无关, 这个问题不仅具有明显的实际背景, 而且在理论上也有很重要的意义.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, $P(x,y), Q(x,y)$ 在 Ω 上连续, 记

$$w = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

任取 $A, B \in \Omega$. Ω 内从 A 到 B 的一条逐段光滑的简单曲线称为 Ω 内从 A 到 B 的一条路径, 对于 Ω 内从 A 到 B 的任意路径 L, 如果第二型曲线积分

$$\int_L w = \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

只与 A, B 有关, 与 L 的具体选取无关, 则称一阶微分形式 w 在 Ω 的**积分与路径无关**.

如果平面区域 D 内的任意简单闭曲线所包围的区域都完全在 D 中, 则称 D 是**单连通区域**. 设 D 是平面上的单连通区域, $w = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 其中 P, Q 都在 D 内有连续的偏导数, 则下列结论等价:

(1) 对 D 内的任意一条闭曲线 C, 有

$$\int_C w = 0;$$

(2) 对 D 内的任一条路径 C, 积分 $\int_C w$ 仅与 C 的起点和终点有关, 而与所沿的路径无关;

(3) 在 D 内 (处处) 成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

(4) 存在函数 $\varphi(x,y)$, 使得在 D 内成立

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

即 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 是函数 φ 的全微分. 这时称 φ 是 w 的**势函数**, 又称 w 是一个**恰当微分形式**, 此时

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + C, \qquad (24.12)$$

其中 (x_0,y_0) 为 D 内任一点, C 为任意常数, 且

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \varphi\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} = \varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0).$$

注 回忆例题 24.2.3 的求解过程, 由 (24.7) 知 $-\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3}$ 是 $\dfrac{1}{r}$ 的全微分, 则积分与路径无关, 于是

$$w = \mu\Big(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\Big).$$

但当时我们不知道可以这样计算第二型曲线积分.

例题 24.3.5 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 有连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 的充要条件是

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (24.13)$$

证 先证充分性. 设 (24.13) 成立, 两边对 x 求导, 得

$$P(x,y) = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

两边再对 y 求导, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

再证必要性. 由条件知 $w = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关. 取路径为从 (x_0,y_0) 经 (x_0,y) 到 (x,y), 则势函数

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + C_1.$$

取路径为从 (x_0,y_0) 经 (x,y_0) 到 (x,y), 则

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + C_2.$$

令 $(x,y) = (x_0,y_0)$, 得 $C_1 = C_2$. □

例题 24.3.6 设 a,b,c 为常数, 满足 $ac - b^2 > 0$,

$$w = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{ax^2 + 2bxy + cy^2},$$

易见 w 在 $(0,0)$ 以外的区域有定义, 且为恰当微分形式. 求 w 关于原点 $(0,0)$ 的**循环常数** $\oint_C w$, 其中 C 可取围绕 $(0,0)$ 的任一简单封闭曲线, 并取逆时针方向为正向.

解 设 $P(x,y) = \dfrac{-y}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 可以看出, 沿椭圆 C:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

来计算曲线积分最为简便, 因为此时

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

上述积分值恰为椭圆的面积的两倍, 于是

$$\oint_C w = \frac{2\pi}{\sqrt{ac - b^2}}. \quad \square$$

24.3.3 练习题

1. 应用 Green 公式求下列第二型曲线积分.

   (1) $\oint_C (x^2 + xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$, C 为由 $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ 围成的正方形, 取正向;

   (2) 求 $\oint_C \ln\dfrac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y$, C 的定义同 (1);

   (3) 求 $\oint_C (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y$, C 是由 $x^2 + y^2 = 1$, $x = y$ 及 y 轴围成的曲边三角形, 取正向;

   (4) 求 $\int_C \dfrac{1}{x^2 + y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$, 其中 C 是: (a) 旋轮线 $x = a(t - \sin t) - a\pi$, $y = a(1 - \cos t)$ 对应于 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一拱; (b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 从 $(2,1)$ 经上半圆到 $(0,1)$ 的一段弧.

2. 设 $f(x)$ 连续可微, L 为逐段光滑闭曲线, 证明

   (1) $\oint_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = 0$;

   (2) $\oint_L f(x^2 + y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0$.

3. 求 $\oint_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$. 其中 $u = x^2+y^2$, C 为 $x^2+y^2=6x$, $\boldsymbol{n}$ 为 C 上的单位外法向量.

4. 设 C 为逐段光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{l}$ 为给定方向, 证明:
$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0,$$
其中 $\boldsymbol{n}$ 为 C 上的单位外法向量.

5. 设 C 为包围原点的按段光滑的简单闭曲线, a_{ij} $(i,j=1,2)$ 均为常数, $X = a_{11}x + a_{12}y$, $Y = a_{21}x + a_{22}y$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 证明
$$\oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y - Y\,\mathrm{d}X}{X^2+Y^2} = 2\pi\,\mathrm{sgn}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

6. 设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为逆时针, 求积分
$$\oint_L \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

7. 利用曲线积分求下述曲线所围区域的面积:

   (1) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

   (2) $x^3+y^3 = 3axy$, $a>0$;

   (3) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = C\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$, a, b, $C>0$, n 为正整数.

8. 先证明曲线积分与路径无关, 然后计算积分值:

   (1) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 是连续函数;

   (2) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 沿不通过原点的路径.

9. 对于以下一阶微分形式 w, 求函数 $M(x,y)\neq 0$, 使得在适当的区域内 Mw 为全微分, 并求其原函数:

   (1) $w = [-y\sqrt{x^2+y^2+1} - x(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x + [x\sqrt{x^2+y^2+1} - y(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}y$;

   (2) $w = x[(ay+bx)^3 + ay^3]\,\mathrm{d}x + y[(ay+bx)^3 + bx^3]\,\mathrm{d}y$.

24.3.4 等周定理

等周问题是一个古老而又十分有趣的几何问题. 它可以表述为: 在周长相等的一切简单闭曲线 (即封闭而不自相交的曲线) 中, 怎样的曲线包围的图形有最大的面积. 早在古代, 人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周①, 但这一事

① 等周问题的最早提出和研究见于古希腊数学家 Pappus (约公元 300–350 年间) 的《数学汇编》中, 但严格证明则要到 19 世纪才得到, 其中最早的是 Steiner 的证明. 参见 [30, 26].

实的严格的数学证明还是在近代才得到的. 下面的经典证明是由 E. Schmidt 在 1939 年给出的. 我们只讨论分段光滑曲线的情况.

设 Γ 是平面上长为 L 的分段光滑的简单闭曲线, Γ 所围区域的面积为 A. 取 Γ 的一对平行切线 l_1, l_2, 它们把 Γ 夹在里面. 再取一圆周 S, 也被 l_1, l_2 所夹, 取 S 的圆心为坐标原点, x 轴垂直于 l_1, l_2. 假设 $x=x(s)$, $y=y(s)$ 是 Γ 的弧长参数方程, 以逆时针方向为曲线的正向, $0\leqslant s\leqslant L$, 其中 x, y 为 s 的连续分段可微函数. 设 l_1, l_2 与 Γ 的两个切点的参数值分别为 $s=s_1$ 和 $s=0$, 即把 l_2 与 Γ 的一个切点取为曲线 Γ 的起始点. 下面我们借助圆 S 得到 A 与 L 的关系. 由 Green 公式, 曲线 Γ 所围区域的面积为

$$A=\int_0^L x(s)y'(s)\,\mathrm{d}s.$$

另一方面, 设圆 S 的半径为 r, 圆面积就为 πr^2. 定义

$$\tilde{y}(s)=\begin{cases}\sqrt{r^2-x^2(s)}, & 0\leqslant s\leqslant s_1,\\ -\sqrt{r^2-x^2(s)}, & s_1\leqslant s\leqslant L,\end{cases}$$

则方程 $x=x(s)$, $y=\tilde{y}(s)$, $0\leqslant s\leqslant L$ 描画出与 S 同样的轨迹. 一般地, 这不是圆周 S 的参数表达式. 但由定积分的定义, 可以证明 S 所围面积的代数和为

$$\int_0^L \tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^{s_1}\tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s+\int_{s_1}^L\tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s=-\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi r^2}{2}=-\pi r^2.$$

由于 s 是 Γ 的弧长参数, 又有 $(x'(s))^2+(y'(s))^2\equiv 1$, $0\leqslant s\leqslant L$. 利用 Schwarz 不等式 (见上册 346 页)

$$\begin{aligned}A+\pi r^2&=\int_0^L(x(s)y'(s)-\tilde{y}x'(s))\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^L|(-\tilde{y}(s),x(s))\cdot(x'(s),y'(s))|\,\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_0^L\sqrt{(x'(s))^2+(y'(s))^2}\cdot\sqrt{(-\tilde{y}(s))^2+(x(s))^2}\,\mathrm{d}s\\&=r\int_0^L\mathrm{d}s=Lr.\end{aligned}$$

再由算术平均值-几何平均值不等式得

$$\sqrt{A\cdot\pi r^2}\leqslant\frac{A+\pi r^2}{2}\leqslant\frac{Lr}{2}.$$

即

$$4\pi A\leqslant L^2.$$

这就是**等周不等式**.

为使 $4\pi A=L^2$, 就必须在上述计算过程中使不等号均取等号, 因此有 $A=\pi r^2$, 即 $L=2\pi r$. 由 Schwarz 不等式取等号条件有

$$(-\tilde{y}(s),x(s))=c(x'(s),y'(s)),$$

c 是某个常数 (参见上册 347~348 页). 于是 $\sqrt{x^2(s)+\tilde{y}^2(s)}=r=|c|$. 即

$$(-\tilde{y}(s),x(s))=\pm r(x'(s),y'(s)). \tag{24.14}$$

从圆周 S 的极坐标表达式

$$x = r\cos\theta,\quad \tilde{y} = r\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -r\sin\theta = -\tilde{y},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\theta} = r\cos\theta = x.$$

代入 (24.14) 得

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\theta}\right) = \pm\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right). \tag{24.15}$$

故$\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \pm\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)$. 由一阶微分的形式不变性, 可得

$$r\,\mathrm{d}\theta = \pm\,\mathrm{d}s.$$

再回到 (24.15), 得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

因此, $\tilde{y}(s) = y(s) + h$, 其中 h 是与 S无关的某常数. 这说明封闭曲线 Γ 与圆周 S 差一个沿 y 方向的平移. 这就证明了等周不等式取等号时, Γ 必定是半径为 $r = \dfrac{L}{2\pi}$ 的一个圆周.

§24.4 连续向量场的旋转度

连续向量场的旋转度可以通过曲线积分来定义, 它是多元微积分应用的一个重要例子. 本节可作为习题课的补充材料. 以 $\mathbf{R}^2$ 为例, 设 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是连续映射, 我们也称 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个**连续向量场**. 即对每一点 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, 确定一个随 (x,y) 连续变化的向量 $\boldsymbol{F}(x,y)$.

设 $\mathcal{L}\subset\mathbf{R}^2$ 是逐段光滑的定向封闭曲线. 如果 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathcal{L}$ 上恒不取零向量, 则称 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathcal{L}$ 上非退化. 定义 $\boldsymbol{T}(x,y) = \dfrac{\boldsymbol{F}(x,y)}{|\boldsymbol{F}(x,y)|}$, 则 $\boldsymbol{T}$ 把 $\mathcal{L}$ 映射到单位圆周 S. 当点 (x,y) 在 $\mathcal{L}$ 上逆时针方向绕 $\mathcal{L}$ 一周时, 向量 $\boldsymbol{T}(x,y)$ 在 S 上绕整数圈. 所绕圈数的代数和 (逆时针方向为正) 称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\mathcal{L}$ 的**旋转度**, 记为 $\gamma(\boldsymbol{F},\mathcal{L})$.

当 $\boldsymbol{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ 是一阶连续可微向量场时, 有

$$\gamma(\boldsymbol{F},\mathcal{L}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\arctan\frac{v}{u}. \tag{24.16}$$

若 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是单连通或多连通闭区域, ∂D 由有限条逐段光滑的封闭曲线组成, 即

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{n}\partial D_i,$$

规定 ∂D 上的定向按其与内法线成正直角的方向为正定向. 设 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 在 ∂D 上非退化, 定义 $\gamma(\boldsymbol{F},\partial D)$ 是 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿 D 的所有边界的旋转度的总和, 即

$$\gamma(\boldsymbol{F},\partial D) = \sum_{i=1}^{n}\gamma(\boldsymbol{F},\partial D_i).$$

以下我们都假定区域 D 的边界是逐段光滑的封闭曲线.

连续向量场的旋转度有下列几条性质.

性质 1 若两个闭连通区域 D_1 与 D_2 的内部不相交, $D = D_1 \bigcup D_2$, 则

$$\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D) = \gamma(\boldsymbol{F}, \partial D_1) + \gamma(\boldsymbol{F}, \partial D_2).$$

性质 2 若在有界闭连通区域 D 上 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 非退化, 则 $\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D) = 0$.

证 先设 D 是单连通区域, $\partial D = \mathcal{L}$.

当 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 是光滑向量场, 即 $u(x,y), v(x,y) \in C^1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{F}, \mathcal{L}) &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\arctan\frac{v}{u} = \frac{1}{2\pi}\oint_{S}\frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{U}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{U}\left(\frac{(u^2+v^2)-2u^2+(u^2+v^2)-2v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中 S 是 $\mathcal{L}$ 在 uOv 坐标面上的映像, U 是由 S 所包围的区域.

当 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 是连续向量场时, 我们要用到 n 维空间中的 **Weierstrass 逼近定理** (参见命题 16.3.1): *$\mathbf{R}^n$ 中紧集上的连续函数可以用多项式函数任意逼近.*

故 ∂D 上的每一连续非退化向量场可以由光滑非退化向量场一致逼近到任意精确度. 另外, 由于旋转度是一个整数, 于是充分接近连续向量场的光滑向量场与这连续向量场都具有同样的旋转度. 这样性质 2 既然对光滑向量场成立, 对连续向量场自然也成立.

当 D 是多连通区域时, 把 D 分割成若干个单连通区域证明. □

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域, $\boldsymbol{F}_0$, $\boldsymbol{F}_1$ 是 ∂D 上的连续非退化向量场. 如果存在连续依赖于参数 λ 的连续向量场 $\boldsymbol{G} : \partial D \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$, 且使 $\boldsymbol{G}(x,y,0) = \boldsymbol{F}_0(x,y)$, $\boldsymbol{G}(x,y,1) = \boldsymbol{F}_1(x,y)$, 则称 $\boldsymbol{G}$ 是自 $\boldsymbol{F}_0$ 到 $\boldsymbol{F}_1$ 的**连续形变**. 如果 $\boldsymbol{G}$ 在 ∂D 上关于 $\lambda \in [0,1]$ 均非退化, 则称 $\boldsymbol{G}$ 是**非退化形变**. 若存在自 $\boldsymbol{F}_0$ 到 $\boldsymbol{F}_1$ 的连续非退化形变, 则称 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ **同伦**. 容易证明同伦有传递关系, 即若 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 同伦, $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同伦, 则 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同伦.

性质 3 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域, 则 ∂D 上的同伦向量场有相同的旋转度.

证 因为 $\gamma(\boldsymbol{F}(x,y,\lambda), \partial D)$ 是一个整数, 且对 λ 连续, 所以当 λ 变化时它只能是一个常数, 即有

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{F}_0(x,y), \partial D) &= \gamma(\boldsymbol{G}(x,y,0), \partial D) = \gamma(\boldsymbol{G}(x,y,1), \partial D) \\ &= \gamma(\boldsymbol{F}_1(x,y), \partial D). \quad \square\end{aligned}$$

下面我们举出一些向量场旋转度应用的例子. 我们先用旋转度证明如下著名的 Brouwer 不动点定理在 $\mathbf{R}^2$ 中的形式:

例题 24.4.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界凸区域, 其边界 ∂D 是一条光滑闭曲线. $\boldsymbol{F}$ 是自 D 到 D 的连续映射, 则在 D 内必存在 $\boldsymbol{F}$ 的一个不动点, 即 $\exists\boldsymbol{\xi}\in D$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$.

证 由于 ∂D 是一条光滑闭曲线, 我们知 ∂D 上的沿逆时针方向的单位切向量组成 ∂D 上的一个光滑的非退化向量场 $\boldsymbol{\tau}(x,y)$, 且当 $(x,y)\in\partial D$ 逆时针一圈时, $\boldsymbol{\tau}(x,y)$ 也转了一圈, 即 $\gamma(\boldsymbol{\tau},\partial D)=1$. 同理, 设 $\boldsymbol{n}(x,y)$ 是 ∂D 上的内法向量场, 则 $\gamma(\boldsymbol{n},\partial D)=1$. 又 $\boldsymbol{F}$ 是自凸区域 D 映到 D 内的映射, 若 $\boldsymbol{F}$ 没有不动点, 则以 $(x,y)\in\partial D$ 为起点, $\boldsymbol{F}(x,y)\in D$ 为终点的有向线段指向切线的内侧. 即与内法向的夹角不大于 $\dfrac{\pi}{2}$. 于是有

$$(\boldsymbol{F}(x,y)-(x,y))\cdot\boldsymbol{n}(x,y)\geqslant 0,\quad \forall\,(x,y)\in\partial D.$$

设 $\boldsymbol{G}(x,y,\lambda)=\lambda(\boldsymbol{F}(x,y)-(x,y))+(1-\lambda)\boldsymbol{n}(x,y)$. 当 $\lambda=0$, 1 时, $\boldsymbol{G}(x,y,\lambda)$ 在 ∂D 上非退化. $\lambda\in(0,1)$ 时

$$\boldsymbol{n}(x,y)\cdot\boldsymbol{G}(x,y,\lambda)\geqslant(1-\lambda)|\boldsymbol{n}(x,y)|^2>0,\quad (x,y)\in\partial D,$$

所以 $\boldsymbol{G}(x,y,\lambda)$ 也在 ∂D 上非退化. 故 $\boldsymbol{F}(x,y)-(x,y)$ 与 $\boldsymbol{n}(x,y)$ 是在 ∂D 上的同伦向量场.

$$\gamma(\boldsymbol{F}-\mathrm{id},\partial D)=\gamma(\boldsymbol{n},\partial D)=1.$$

由性质 2 可知 $\boldsymbol{F}(x,y)-(x,y)$ 必定是 D 上的退化向量场. 即 $\exists\boldsymbol{\xi}\in D$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的不动点. □

一般形式的 Brouwer **不动点定理**为:

$\mathbf{R}^n$ 中的非空紧凸子集 B 上的连续自映射 $\boldsymbol{F}$ 必有不动点. 即存在 $\xi\in B$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$.

其证明要用到一些拓扑知识, 可参考 [47, 33].

第二个例子是用旋转度证明代数基本定理.

例题 24.4.2 (代数基本定理) 复数 z 的 n 次多项式 $P_n(z)$ 在复域上至少有一个根.

证 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $x,y\in\mathbf{R}$. $P_n(z)=R(P_n(z))+\mathrm{i}I(P_n(z))$, 其中 $R(\cdot)$ 与 $I(\cdot)$ 分别表示复数的实部和虚部. 构造一个映射

$$\boldsymbol{F}:(x,y)\to(R(P_n(x+\mathrm{i}y)),I(P_n(x+\mathrm{i}y))).$$

$\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 n 次多项式映射. $P_n(z)$ 在复域上有根的问题归结为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是否是退化向量场.

如果 $\boldsymbol{F}$ 是非退化向量场, 则由性质 2, $\gamma(\boldsymbol{F},S_r)=0$, 其中 S_r 表示以 r 为半径的单位圆周. 另一方面, 我们从其它性质计算 $\gamma(\boldsymbol{F},S_r)$.

我们先计算 $P_n(z)=z^n$ 的情况. 设对应的多项式映射为 $\boldsymbol{F}_0$, 则

$$\gamma(\boldsymbol{F}_0, S_r) = \frac{1}{2\pi}\oint_{S_r} \frac{R\,\mathrm{d}I - I\,\mathrm{d}R}{R^2 + I^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos nt(n\cos nt) - r\sin nt(-n\sin nt)}{r^2}\,\mathrm{d}t = n.$$

对于一般的 n 次多项式 $P_n(z)$, 不妨设其首系数为 1, 作复多项式的形变

$$G(z,\lambda) = \lambda z^n + (1-\lambda)P_n(z).$$

可知

$$\overline{z}^n \cdot G(z,\lambda) = \lambda|z|^{2n} + (1-\lambda)|z|^{2n} + Q(z).$$

其中 $Q(z)$ 满足 $\dfrac{|Q(z)|}{|z|^{2n}} \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$. 因此

$$\overline{z}^n \cdot G(z,\lambda) = |z|^{2n} + o(|z|^{2n}) \quad (|z| \to +\infty).$$

所以当 r 足够大时, $G(z,\lambda)$ 在复平面的单位圆周 S_r 上取不到零点. 这说明 $P_n(z)$ 对应的 n 次多项式映射 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_0$ 在 S_r 上同伦, $\gamma(\boldsymbol{F}, S_r) = n$. 这就证明 $\boldsymbol{F}$ 必定是 $\mathbf{R}^2$ 上的退化向量场. 也证明了 z^n 在复域中至少有一根. □

最后我们用旋转度解决 1995 年匈牙利的 Miklós Schweitzer 数学竞赛中的一个积分问题. 这个积分问题在几何学和博弈论中有有趣的背景. 我们的材料取自美国数学月刊 106 卷 (1999) 227~240 页.

例题 24.4.3 设 f 和 g 是 $[0,1]$ 上的两个可积函数, 满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明存在 $[0,1]$ 中的某个闭区间 $[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

证 我们定义

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\},$$

并令

$$\boldsymbol{G}(x,y) = \left(\int_x^y f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}, \int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\right).$$

由 f, g 的可积性, 可知 $\boldsymbol{G}$ 是闭的单连通区域 D 上的连续向量场. 如果 $\boldsymbol{G}(x,y)$ 在 D 的某一点 (a,b) 上取零向量, 就证明了我们所要的结论. 否则, 可以考虑 $\gamma(\boldsymbol{G}, \partial D)$. ∂D 由三条直线段组成. 在对角线 $x=y$ 上取常值, 故旋转角度为 0. 在水平边界和垂直边界上, 注意到

$$G(0,x) + \boldsymbol{G}(x,1) = (0,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因而

$$\boldsymbol{G}(x,1) = -G(0,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因此水平边界的任一点的向量恰好与垂直边界上对应点的向量反向. 这说明 G 沿水平边界的旋转角度与其沿垂直边界的旋转角度一样. 而 $G(0,0)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $G(0,1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 故 G 沿垂直边界的旋转角度为 $2k\pi+\pi$, k 为整数. 所以有

$$\gamma(G,\partial D)=\frac{0+2(2k\pi+\pi)}{2\pi}=2k+1\neq 0.$$

由旋转度的性质 2 知, G 必在 D 上某点 (a,b) 处取零向量, 也即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

注 这个问题表面上看可以利用积分值关于积分区间端点的介值性质来解决, 即: $\exists a_0$, 使 $\forall a\in(0,a_0)$, 有a 的连续函数值 $b(a)$, 使 $\int_a^{b(a)} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. 实际上不可行, 这是因为上述 $b(a)$ 并不一定连续. 比如我们考虑如下的 $f(x)$, 它的原函数 $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 满足: 当 $0<x<1$ 时, $0<F(x)<1$; $F(0)=0$; 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上严格单调增加并在 $x=\frac{1}{2}$ 时取到惟一极大值 $\frac{3}{4}$, 然后严格单调减少至 $x=\frac{2}{3}$ 时取到惟一极小值 $\frac{2}{3}$, 然后严格单调增加至 $F(1)=1$. 考察使 $\int_a^{b(a)} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ 的点 a 与 $b(a)$. 注意到此时必有 $F(b(a))-F(a)=\frac{1}{2}$. 设 $F(a_0)=\frac{1}{2}$, 则 $0<a_0<\frac{1}{2}$. 因而 $a\in(0,a_0)$. 对应地有 $b(a_0)=1$. 当 a 自 a_0 连续地移向 0 时, $b(a)$ 自 1 连续地减少. 至 $F(a_1)=\frac{1}{6}$ 时, $b(a_1)=\frac{2}{3}$. 另一方面 $F(a)<\frac{1}{6}$ 时, $F(b(a))<\frac{2}{3}$, 故必有 $b(a)<\frac{1}{2}$. 因此 a_1 不是 $b(a)$ 的连续点.

§24.5 对于教学的建议

24.5.1 学习要点

1. 本章的重点之一是计算两型曲线积分, 从计算公式可以发现, 写出曲线的参数方程是计算的关键部分. 一般来说, 一条曲线可以有多种参数方程的形式, 到底哪一种给计算带来方便, 要视具体情况, 对如何求曲线的参数方程总结如下.

平面曲线

$$F(x,y)=0. \tag{24.17}$$

方法 1 若能从 (24.17) 中解出 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$, 则平面曲线 (24.17) 以 x 或 y 为参数的参数方程分别为

$$x=x,\quad y=f(x)$$

或

$$x = g(y), \quad y = y.$$

方法 2 将极坐标表达式 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 代入 (24.17) 得

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0. \tag{24.18}$$

若能从 (24.18) 中解出 $r = f(\theta)$ 或 $\theta = g(r)$, 则平面曲线 (24.17) 的以 θ 或 r 为参数的参数方程分别为

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

或

$$x = r\cos g(r), \quad y = r\sin g(r).$$

空间曲线

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0. \tag{24.19}$$

方法 1 若能从 (24.19) 中解出两个字母, 不妨设可解出 y, z 为 x 的函数 $y = \varphi(x), z = \psi(x)$, 则空间曲线 (24.19) 的参数方程为

$$x = x, \ \ y = \varphi(x), \ \ z = \psi(x).$$

方法 2 将球坐标变换或柱坐标代换代入 (24.19) 得

$$F(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0, \tag{24.20}$$

$$G(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0 \tag{24.21}$$

或

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0, \tag{24.22}$$

$$G(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0. \tag{24.23}$$

若能从 (24.20), (24.21) 中或 (24.22), (24.23) 中解出两个字母为第三个字母的函数, 同样也可以得到参数方程.

方法 3 从 (24.19) 中消去一个字母 (例如 z), 得一条平面曲线

$$f(x, y) = 0. \tag{24.24}$$

它实际上是空间曲线 (24.19) 在 x, y 平面上的投影, 先写出 (24.24) 的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{24.25}$$

再将 (24.25) 代入 (24.19)中的某一个方程, 得

$$z = w(t). \tag{24.26}$$

(24.25), (24.26) 就是空间曲线 (24.19) 的参数方程.

2. 关于两类曲线积分之间的关系, 关系式 (24.5) 是基本的, 也是便于记忆的, 在平面上也是正确的. 但是在平面上常用的是法方向, 而不是切方向. 所以我们或者记住表达式 (24.6), 或者用图 24.2 临时再推导一下.
3. 关于 Green 公式, 比较方便于记忆的形式是

$$\int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. 总结求平面上第二型曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的几种方法.
   (1) 用 Green 公式化为二重积分. 若 C 为闭曲线, 可直接用, 若 C 不闭可添加辅助线后用 Green 公式;
   (2) 若满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 如果曲线 C 不封闭, 可考虑用求出原函数的方法;
   (3) 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

24.5.2 参考题

第一组参考题

1. 证明不等式

$$\left|\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant ML,$$

其中 L 是曲线 C 的弧长, $M=\max\limits_{(x,y)\in C}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$, 并利用这个不等式证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$, 其中

$$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

2. 求第一型曲线积分

(1) $$\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\mathrm{d}s\quad(|a|\neq R);$$

(2) $$\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\mathrm{d}s\quad(a^2+b^2\neq R^2).$$

3. 设 $f(x,y)$ 在 L 上连续, L 是逐段光滑的简单闭曲线, 证明

$$u(x,y)=\oint_L f(\xi,\eta)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}s$$

当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时趋于 0 的充要条件是

$$\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0.$$

4. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续, 证明

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

对 $\forall r>0$ 都成立的充要条件是

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s$$

对 $\forall r>0$ 都成立.

5. 设 $f(x,y)$ 在 G 内一阶连续可微, 在 ∂G 上 $f(x,y)=0$, $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 证明

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}a^3\max_G(f_x^2+f_y^2)^{1/2}.$$

6. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面上有连续偏导数,而且对以 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 为心, 以 $\forall r>0$ 为半径的上半圆周 $C: x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 都有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

证明: $P(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0\ \ (\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

第二组参考题

1. 给出旋转度性质 2 的一个不用曲线积分的证明.
2. 证明如下形式的高维中值定理: 设 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在以 r 为半径的球

$$D=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2\}$$

上的连续可微函数, 则存在 $\boldsymbol{p}_0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)\in\mathrm{int}D$, 使

$$\max_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})-\min_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot 2r.$$

3. 设 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 是 n 边形的 n 个顶点, 而且原点在其内部, 证明存在正实数 x 和 y,使得

$$(a_1,b_1)x^{a_1}y^{b_1}+(a_2,b_2)x^{a_2}y^{b_2}+\cdots+(a_n,b_n)x^{a_n}y^{b_n}=(0,0).$$

4. 设 D 是半径为 r 的一个圆所围成的平面区域, 对 D 内的点 (x,y), 用 $l(x,y)$ 表示以 (x,y) 为圆心, δ 为半径的圆在 D 外边的那段弧的长度. 试求

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_D l(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. 设 B 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆盘, C 是单位圆周. $\boldsymbol{g}: B\to\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 是二阶连续可微映射.

(1) 用 Green 公式把 $\displaystyle\iint\limits_B\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 表示成 C 上的第二型曲线积分;

(2) 如果 $\boldsymbol{g}$ 在 C 上的限制是恒等映射, 即 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$, 证明

$$\oint_C x_1\,\mathrm{d}x_2=\oint_C g_1\,\mathrm{d}g_2=\oint_C g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2;$$

(3) 证明不存在满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$ 及 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$ 的二阶连续可微映射 $\boldsymbol{g}$;

(4) 对上述命题给出一个几何上的解释.

6. (1) 设 B,C 与题 5 相同, $\boldsymbol{f}:\ B\to B$ 是二阶连续可微映射, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in B$, 从几何上可见以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为起点和 $\boldsymbol{x}$ 为终点的有向线段与 B 的边界 C 相交, 则交点可表示为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),$$

其中 $t(\boldsymbol{x})$ 是与 $\boldsymbol{x}$ 有关的参数, 证明 $t(\boldsymbol{x})$ 满足二次方程

$$t^2(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2+2t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2-1=0;$$

(2) 证明 (1) 中的 $\boldsymbol{g}$ 满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$ 及 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$;

(3) 结合上题证明满足 (1) 的 $\boldsymbol{f}$ 是不存在的, 即若 $\boldsymbol{f}:\ B\to B$ 是二阶连续可微映射, 则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in B$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$. 我们得到了 Brouwer 不动点定理的另一个证明. 你能否举几个运用 Brouwer 不动点定理的实际例子.

第二十五章 曲面积分

曲面积分与曲线积分一样也有两类: 与曲面的方向无关的第一型曲面积分和与曲面的方向有关的第二型曲面积分. 本章在 §25.1 和 §25.2 两节中讨论 $\mathbf{R}^3$ 中的这两类曲面积分以及它们之间的关系, 所有的概念和结果都可以推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n>3)$ 的情况. 在 §25.3 节中介绍 Gauss 公式 (第二型曲面积分与三重积分之间的关系), Stokes 公式 (第二型曲面积分与第二型曲线积分之间的关系), 以及在 $\mathbf{R}^3$ 中曲线积分与路径无关的条件. 在 §25.4 节中介绍一些外微分的初步知识. 最后一节是学习要点和参考题.

§25.1 第一型曲面积分

25.1.1 第一型曲面积分的定义和计算

在 22.5.1 小节中我们在假定曲面面积存在的情况下, 推导出了曲面面积的计算公式, 下面给出曲面面积的严格定义. 考虑一个以分段光滑的闭曲线 L 为边界的光滑曲面 S, 设这一曲面被一个分段光滑的曲线网分成许多部分 $S_1, S_2, \cdots, S_m$, 并在每一部分 S_i 内任取一点 M_i, 把元素 S_i 垂直地投影到曲面在点 M_i 处的切平面上, 得到在切平面内的平面图形 T_i, 其面积 ΔT_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 的和在各个元素 S_i 的直径趋于零时的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i \Delta T_i$$

称为**曲面 S 的面积**, 其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} d(S_i)$ 为 S_i $(i=1,\cdots,m)$ 中的最大直径. 如果极限为有限数, 则称曲面 S 为**可求面积的**.

设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的可求面积的曲面, 函数 f 在 S 上有定义. 对于 S 的任一分割 $T:\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$, 用 ΔS_i 表示 S_i 的面积, 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$, 如果当 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} d(S_i)\to 0$ 时, 和数

$$\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

收敛, 且极限不依赖于 S 的具体分割与 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$ 的具体选择, 则称函数 f 在 S 上的第一型曲面积分存在, 该极限值称为 $f(x,y,z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**, 记为

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{d(T)\to 0}\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

如果曲面 S 的参数方程是

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D,$$

D 是 u,v 平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数,则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

且

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{25.1}$$

特别地, 若曲面 S 的方程为

$$z = z(x,y),\quad (x,y) \in D,$$

则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.2}$$

例题 25.1.1 设 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 割下的部分, 求

$$I = \iint_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,\mathrm{d}S.$$

解 1 见图 25.1, 在直角坐标系中计算

$$z_x = \frac{x}{z},\quad z_y = \frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{2},$$

$$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax} [x^2y^2 + (x^2+y^2)^2]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

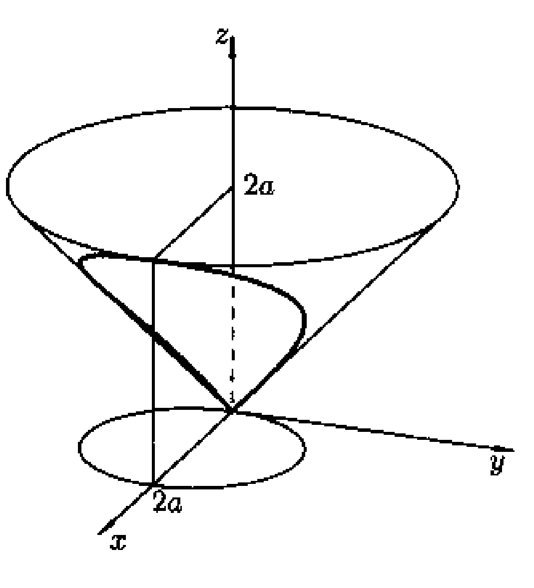


图 25.1

用极坐标变换求上述二重积分, 则

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}(r^4\cos^2\theta\sin^2\theta + r^4)r\,\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2\theta\sin^2\theta+1)\cdot\left(\frac{1}{6}r^6\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6}(2a)^6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\theta(\cos^2\theta\sin^2\theta+1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 用参数式计算. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在球坐标系中的方程为 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 因此 S 的参数方程为

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta,\ \ z=\frac{1}{\sqrt{2}}r,\ \ (r,\theta)\in D.$$

又 S 的边界线

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2=2ax$$

的球坐标表示为

$$\varphi=\frac{\pi}{4},\quad r^2\sin^2\varphi=2ar\sin\varphi\cos\theta.$$

于是

$$D=\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}a\cos\theta\}.$$

计算得

$$E=\frac{r^2}{2},\ \ F=0,\ \ G=1,$$

最后得到

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}a\cos\theta}(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{1}{4}r^4)\frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6.\end{aligned}$$ □

25.1.2 第一型曲面积分的应用

1. 求曲面的面积. 在 (25.2) 与 (25.1) 中令 $f\equiv 1$, 则曲面 S 的面积为

$$\iint\limits_S \mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

2. 求曲面的质量. 设曲面 S 的面密度为 $\rho(x,y,z)$, 则它的质量

$$\begin{aligned}m&=\iint\limits_S\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_D\rho(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

3. 求曲面的质心坐标. 曲面 S 的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由下面的公式确定:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

例题 25.1.2 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 被 $x^2+y^2=ax$ 截取部分的面积与质心坐标, 其中 $a>0$.

解 见图 22.11, 这就是 Viviani 体的上表面. 由于

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故所求面积

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r \\ &= (\pi-2)a^2. \end{aligned}$$

下面求质心坐标, 由对称性知 $y_0=0$, 且

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ y\geqslant 0}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r \quad (r=a\cos t) \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{a^2\cos^2 t}{a\sin t}(-a\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{\pi-2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2a}{3(\pi-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi a}{4(\pi-2)}. \quad \square \end{aligned}$$

25.1.3 练习题

1. 求 $\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}S$, 其中

   (1) S 为 $z^2=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的上半部分 $(z\geqslant 0)$;

   (2) S 为 $x=r\sin\alpha\cos\theta$, $y=r\sin\alpha\sin\theta$, $z=r\cos\alpha$, $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

2. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geqslant 0)$.

3. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

4. 求 $\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分.

5. 求 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中

   (1) S 为 $|x|+|y|+|z|=1$;

   (2) S 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 割下的部分.

6. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, S 为 $|x|+|y|+|z|=a$.

7. 求 $F(t)=\iint\limits_{x^2+z^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

8. 求 $F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为 $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=t^2$, $t>0$, (x,y,z) 为满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$ 的定点,

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases} 1, & \text{当 } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, & \text{当 } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

9. 求 $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为立体 $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的表面.

10. 求 $\iint\limits_S \dfrac{|x|}{z}\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=2ay$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=2a$ 所截下的部分.

11. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 割下的部分.

§25.2 第二型曲面积分

25.2.1 第二型曲面积分的定义和计算

设 S 是逐片光滑的**定向曲面**, P, Q, R 是定义在 S 上的函数. 在 S 所指定的一侧作分割 T, 它把 S 分为 n 个小曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$, 分割 T 的细度

$\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i$ 的直径$\}$, 以 $\Delta S_i^{(1)}, \Delta S_i^{(2)}, \Delta S_i^{(3)}$ 分别表示 S_i 在 yOz, zOx, xOy 三个坐标平面上的投影区域的面积. 它们的符号由 S_i 的方向来确定, 当 S_i 的法线正向与 z 轴正向成锐角时, S_i 在 xOy 平面的投影区域的面积 $\Delta S_i^{(3)}$ 为正, 反之面积为负. $\Delta S_i^{(1)}$ 与 $\Delta S_i^{(2)}$ 的符号可类似地定义. 在每个 S_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 若

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(1)} + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(2)} + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(3)}$$

存在, 且与曲面 S 的分割 T 以及 (ξ_i, η_i, ζ_i) 在 S_i 上的取法无关, 则称此极限为函数 P, Q, R 在曲面 S 上所指定的一侧上的**第二型曲面积分**, 记为

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

设 $R(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy}$$

上的连续函数, 以 S 的上侧为正侧, 则有

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果在正侧积分, 积分号前取正号; 如果在负侧积分, 积分号前取负号.

类似地, 当 $P(x,y,z)$ 在光滑曲面

$$S: x = x(y,z), \quad (y,z)\in D_{yz}$$

上连续时, 有

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 x 轴的正向成锐角的那一侧为正侧.

当 $Q(x,y,z)$ 在光滑曲面

$$S: y = y(z,x), \quad (z,x)\in D_{zx}$$

上连续时, 有

$$\iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 y 轴的正向成锐角的那一侧为正侧.

如果光滑曲面 S 由参数方程给出:

$$S: x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v)\in D,$$

且行列式

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \ C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不同时为 0, 则

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_D (PA + QB + RC)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{25.3}$$

其中积分号前正负号的选取法则如下: 若向量 (A,B,C) 与曲面 S 上预先选定的侧的法向量方向一致, 则取 "+" 号, 否则取 "−" 号.

例题 25.2.1 设 Σ 为上半单位球面 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, 取内侧, 求

$$I=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 1 用直角坐标系计算

$$I=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_\Sigma \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

计算 $I_1: \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2-z^2},\ \ (y,z)\in D_{yz}=\{y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0\},\quad \text{取后侧},$$

$$\Sigma_2: x=-\sqrt{1-y^2-z^2},\ \ (y,z)\in D_{yz},\quad \text{取前侧},$$

则

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0.$$

同理有

$$I_2=0,\ I_3=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi.$$

最后得到

$$I=-\pi.\quad\Box$$

解 2 用参数方程

$$\Sigma: x=\sin\varphi\cos\theta,\ \ y=\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=\cos\varphi,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

计算行列式

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=\sin^2\varphi\cos\theta,\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=\sin^2\varphi\sin\theta,$$
$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=\sin\varphi\cos\varphi.$$

因为 $C>0$, 则 (A,B,C) 的方向与上半球面 S 内侧的法线方向相反, 故积分号前取 "−" 号, 得

$$\begin{aligned}I&=-\iint_D(\sin^2\varphi\cos\theta+\sin^2\varphi\sin\theta+\sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=-\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}[\sin^2\varphi(\cos\theta+\sin\theta)+\sin\varphi\cos\varphi]\,\mathrm{d}\theta\\&=-2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\pi.\quad\Box\end{aligned}$$

例题 25.2.2 求

$$I=\oiint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由 $x^2+y^2=1$, $z=1$ 及三个坐标平面围成的立体在第一卦限的部分的表面, 取外侧.

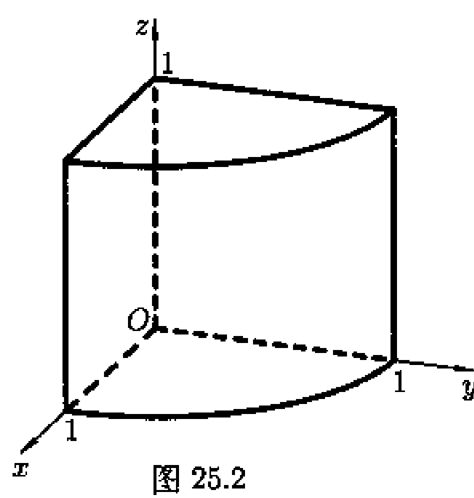


图 25.2

解 见图 25.2, 因为 Σ 分块较多 (需分 5 块), 不便于用参数式, 故应在直角坐标系中计算. 记 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5$. 其中 Σ_1 为圆柱面, Σ_2 为下底面, Σ_3 为上底面, Σ_4 为左侧面 $y=0$, Σ_5 为右侧面 $x=0$. 则有

$$I=\oiint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\oiint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\oiint_{\Sigma}(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

计算 I_1, 有

$$I_1=\sum_{i=1}^{5}\iint_{\Sigma_i}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

因为 $\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 在 yOz 平面上的投影面积为零, 于是

$$\iint_{\Sigma_i}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,\quad i=2,3,4,$$

而

$$\Sigma_1:\ x=\sqrt{1-y^2},\ (y,z)\in D_{yz}=\{0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\},\quad \text{取前侧},$$

$$\Sigma_5:\ x=0,\ (y,z)\in D_{yz},\quad \text{取后侧}.$$

于是

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_{\Sigma_1}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_5}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iint_{D_{yz}}(\sqrt{1-y^2}+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

用类似的方法可求出 $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

然后求

$$I_3 = \sum_{i=1}^{5} \iint_{\Sigma_i} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

显然有

$$\iint_{\Sigma_i} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad i = 1,4,5,$$

而

$$\Sigma_2:\ z=0,\ (x,y)\in D_{xy} = \{x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}, \quad \text{取下侧},$$

$$\Sigma_3:\ z=1,\ (x,y)\in D_{xy}, \quad \text{取上侧},$$

于是

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Sigma_2} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_3} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iint_{D_{xy}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} (1+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

最后得到

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{4}\pi. \quad \square$$

注 我们已经知道, 利用第二型曲线积分可以计算平面图形的面积. 类似地, 利用第二型曲面积分也可以计算空间立体的体积 (见表达式 (25.7)–(25.11)).

25.2.2 两类曲面积分之间的关系

设 S 是可定向曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 上选定的某一侧的法向量, 则

$$\begin{aligned} &\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad = \iint_S \left[P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y) + R\cos(\boldsymbol{n},z)\right]\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{25.4}$$

上述关系式的用处之一是可简化曲面积分的计算, 当某一类曲面积分的计算比较复杂时, 可利用公式 (25.4) 转化为另一类曲面积分进行计算.

例题 25.2.3 求

$$I = \iint_{\Sigma} xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\,\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$.

解 见图 25.3, 不论用参数式或直角坐标式, 直接计算均相当复杂, 取 Σ 的上侧, 则 (x,y,z) 处的法向量为 $(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$ 利用公式 (25.4),

$$\begin{aligned}I &= a\iint_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S\\&= a\iint_{\Sigma}y^3z^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^3x^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&= 3a\iint_{\Sigma}x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3a\iint_{D_{xy}}x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 作极坐标代换得

$$\begin{aligned}I &= 3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\\&= \frac{3}{64}a^9\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{32}a^9. \quad \square\end{aligned}$$

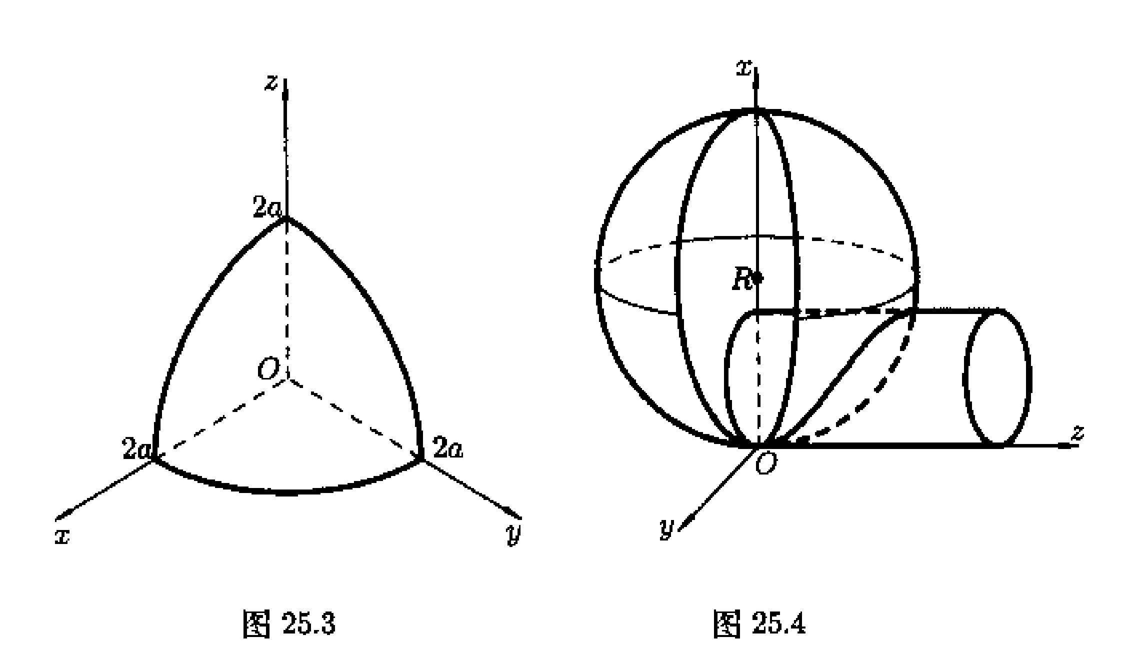


图 25.3　　　　图 25.4

例题 25.2.4 求

$$I=\iint_{\Sigma}(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx\ (0<r<R)$ 截下的位于 $z\geqslant 0$ 的部分, 取外侧.

解 见图 25.4, 改写球面方程为 $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$, 其外侧的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right).$$

由公式 (25.4), 有

$$I=\iint_{\Sigma}(y-z,z-x,x-y)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}\left[(y-z)(x-R)+(z-x)y+(x-y)z\right]\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{\Sigma}(z-y)\,\mathrm{d}S.$$

由于 Σ 关于 xOz 平面对称, 而函数 y 是奇函数, 于是

$$I=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=R\cdot\pi r^2=\pi Rr^2.\quad\square$$

25.2.3 练习题

1. 设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, 且 $z(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 中连续可微, 证明

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\pm\iint_{D}(-Pz_x-Qz_y+R)\Big|_{z=z(x,y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 Σ 取上侧时符号取 "+", 当 Σ 取下侧时符号取 "−".

2. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $f(x,y,z)$ 在 $\overline{\Sigma}$ 上连续, 且满足 $f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$,

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}2\displaystyle\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,\\0.\end{cases}$$

应选哪个结果? 其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分.

3. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $R(x,y,z)$ 在 $\overline{\Sigma}$ 上连续, 且满足 $R(x,y,z)=-R(x,y,-z)$,

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}2\displaystyle\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\0.\end{cases}$$

应选哪个结果? 其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分, 取侧与 Σ 取侧相一致.

4. 设 Σ 是平面 Π 上的一个有界区域, 其面积为 S, Π 取上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 且 $\cos(\boldsymbol{n},z)=\mu$. 证明 Σ 在 xOy 平面上的投影的面积为 μS, 并利用这个结果重新计算例题 21.4.2.

5. 求 $I_1 = \iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, I_2 = \iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 取外侧.

6. 计算 $\iint\limits_{S} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1 \leqslant z \leqslant 1$ 及 $x \geqslant 0$ 的部分, 取前侧.

7. 求 $\iint\limits_{S} x(z^2-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y(x^2-z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是 $y^2+z^2=1$ 被 $x=0, x=1, z+y=0, z-y=0$ 截取的上方部分, 取外侧.

§25.3 Gauss 公式与 Stokes 公式

25.3.1 Gauss 公式

Gauss 公式是将 $\mathbf{R}^3$ 中某区域内的三重积分与这一区域的边界上的特定的曲面积分建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 内的一个有界区域, 其边界 ∂D 由光滑曲面或逐片光滑曲面组成, 方向是外侧 (相对于区域 D 而言). 又设函数 P, Q, R 都在 D 内有关于 x, y, z 的连续偏导数, 则成立下列 **Gauss 公式**:

$$\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.5}$$

利用两类曲面积分之间的关系, Gauss 公式也可以写成

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ =& \oiint\limits_{\partial D} \big(P\cos(\boldsymbol{n}, x) + Q\cos(\boldsymbol{n}, y) + R\cos(\boldsymbol{n}, z)\big)\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{25.6}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 ∂D 上的外法向量.

可以看出, Green 公式 (24.9) 与 Gauss 公式 (25.6) 的表达形式是类似的, 仅仅是空间的维数不同而已.

与 Green 公式相仿, Gauss 公式 (25.5) 与 (25.6) 为我们提供了一种新的计算曲面积分的方法.

例题 25.3.1 求

$$I = \iint\limits_{\Sigma} 4xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲线 $z = \mathrm{e}^y$ $(0 \leqslant y \leqslant a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

解 Σ 的方程为

$$z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ (x^2+y^2\leqslant a^2).$$

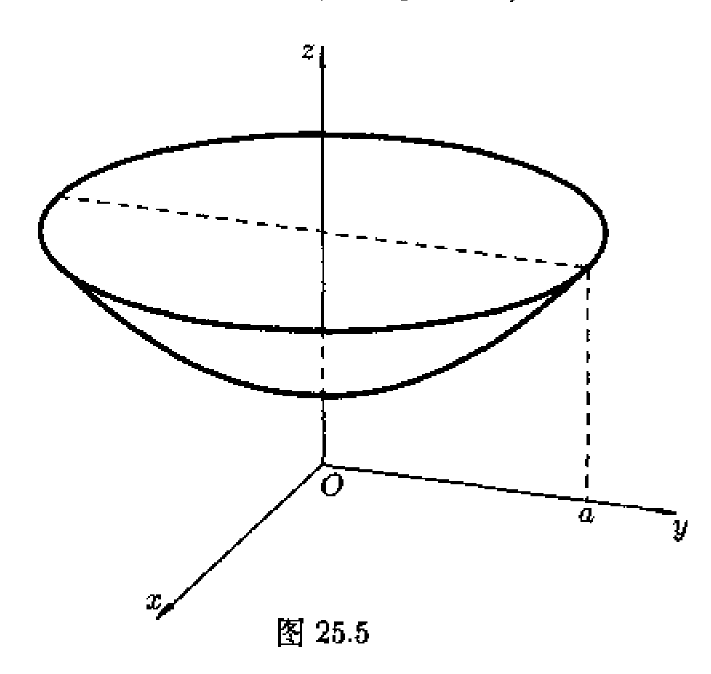


图 25.5

直接计算比较复杂. 考虑用 Gauss 公式. 由于 Σ 不闭, 需要添加辅助面

$$\Sigma_1: z=\mathrm{e}^a,\quad (x^2+y^2\leqslant a^2)\ \text{取上侧}.$$

见图 25.5, 设 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 D, 令

$$P=4xz,\ Q=-2yz,\ R=1-z^2.$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

由公式 (25.5), 得

$$I=\left(\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right)(1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma_1}(1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=(\mathrm{e}^{2a}-1)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2.\quad\square$$

例题 25.3.2 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}},$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧 $(a>0,b>0,c>0)$.

解 1 记 $P(x,y,z)=\dfrac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, $Q(x,y,z)=\dfrac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, $R(x,y,z)=\dfrac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, 则在不包含原点的任何区域上

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

为了利用 Gauss 公式, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 作闭曲面

$$S_\varepsilon = \{ax^2 + by^2 + cz^2 = \varepsilon^2\},$$

取外侧. 由 Gauss 公式

$$I = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iint\limits_{S_\varepsilon} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

上述积分在 S_ε 的外侧. 再一次用 Gauss 公式, 则

$$I = \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2 \leqslant \varepsilon^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

解 2 (不用 Gauss 公式而直接计算) 利用单位球面的参数方程

$$x = \sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \cos\varphi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

计算得到

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\cos\theta,\ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

容易看出, (A,B,C) 的方向与单位球面外侧法线方向一致, 故积分号前取 "+" 号, 由 (25.3) 得

$$I = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta + b\sin^2\varphi\sin^2\theta + c\cos^2\varphi)^{3/2}}.$$

先计算对 φ 的积分, 我们令 $\cos\varphi = t$, 则

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta + b\sin^2\varphi\sin^2\theta + c\cos^2\varphi)^{3/2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left[(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c)t^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)} \cdot \frac{t}{\left[(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c)t^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

最后得到

$$I = \frac{8}{\sqrt{c}}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{8}{\sqrt{c}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{a + bt^2} \quad (t = \tan\theta)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}. \quad \square$$

注 利用 Gauss 公式来计算曲面积分在很多情况下是一种有效的手段, 但要注意使用 Gauss 公式的条件, 要弄清楚在什么情况下要 "挖洞" (即用封闭曲面把 P, Q, R 无定义或不可微的点挖去) 以及选择什么曲面 "挖洞" 计算更简便.

利用 Gauss 公式可导出用曲面积分表示 $\mathbb{R}^3$ 中具有逐片光滑边界的有界闭区域 Ω 的体积公式

$$|\Omega| = \oiint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\partial\Omega} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \oiint_{\partial\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.7}$$

上述积分在 $\partial\Omega$ 的外侧进行. 由两类曲面积分之间的关系, 又有

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S, \tag{25.8}$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $\partial\Omega$ 有参数表示

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D,$$

则

$$V = \frac{1}{3}\left|\iint_D (Ax + By + Cz)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right|, \tag{25.9}$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \ C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

(25.9) 也可以写为

$$V = \frac{1}{3}\left|\iint_D \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right|. \tag{25.10}$$

特别地, 若一个立体的表面在球坐标系中由方程

$$r = r(\varphi,\theta), \quad (\varphi,\theta) \in D$$

给出, 则

$$x = r(\varphi,\theta)\sin\varphi\cos\theta,\ y = r(\varphi,\theta)\sin\varphi\sin\theta,\ z = r(\varphi,\theta)\cos\varphi,\ (\varphi,\theta) \in D.$$

代入公式 (25.10) 中得到

$$V = \frac{1}{3}\iint_D r^3(\varphi,\theta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta. \tag{25.11}$$

当然, 公式 (25.11) 也可以从三重积分中直接得到, 事实上

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\substack{(\varphi,\theta)\in D \\ 0\leqslant\rho\leqslant r(\theta,\varphi)}} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \iint_D \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \int_0^{r(\varphi,\theta)} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D r^3(\varphi,\theta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

25.3.2 练习题

1. 利用 Gauss 公式计算积分:

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为以 $(0,0,0),(a,a,a)$ 为对角顶点的正方体的表面, 取内侧.

(2) $\iint\limits_\Sigma (x^3+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^2-xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+\frac{z}{x^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$, 取外侧.

(3) 设 $A_1=x^3-x^2y+z^3, A_2=xy^2+y^3, A_3=xz+z^2, \Sigma$ 是由 yOz 平面上的抛物线 $z=1-y^2$ 与 $z=0$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转后所得的旋转体的表面, 取外侧. 试求

$$\iint\limits_\Sigma (\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. 先添加辅助面, 再用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_\Sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 的一段, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 上的单位法向量, 其方向为下方.

(2) $\iint\limits_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上半部分, 取上侧.

(3) $\iint\limits_\Sigma (\frac{x^3}{a^3}+y^3z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{y^3}{b^3}+z^3x^3)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{z^3}{c^3}+x^3y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x\geqslant 0$, 取后侧.

3. $F(x,y,z)$ 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的光滑函数, 且 $F(x,y,z)=0$ 是一个以原点为顶点的锥面 Σ, 如果 Σ 与平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$ 围成一个锥体, 证明此锥体的体积

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

其中 S 为平面 Π 上锥底部分的面积, H 为顶点到锥底的高.

4. 求由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 所围成的立体的体积.

5. 求 $\iint\limits_\Sigma (x^3+y^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^3+2x^2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 在 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{3}$ 的部分, 取外侧.

6. $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z<1\}, S=\partial V$, 求积分

$$\iint\limits_{S} yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

积分沿外法线方向.

7. 求第二型曲面积分

$$\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

25.3.3 Stokes 公式

Stokes 公式是将空间曲面上的第二型曲面积分与该曲面边界上的第二型曲线积分之间建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的分片光滑曲面, D 的边界 ∂D 由分段光滑曲线组成, 又设 P,Q,R 有关于 x,y,z 的连续偏导数, 则成立下列 **Stokes 公式**:

$$\oint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{25.12}$$

其中 ∂D 的方向和 D 的方向服从右手法则. 由两类曲面积分之间的关系(25.4), (25.12) 又可以写为

$$\oint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S, \tag{25.13}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 D 上法向量的方向余弦. 如果曲面 D 在 xOy 平面上, 则公式 (25.12), (25.13) 就是 Green 公式. 公式 (25.12) 与 (25.13) 给我们提供了一个求曲线积分与曲面积分的新方法.

例题 25.3.3 求

$$I = \oint_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是立方体 $\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a\}$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 的交线, 取向从 z 轴正向看去是逆时针方向.

分析 见图 25.6, 分六段积分的计算量很大, 且 C 也不便于表示为一个统一的参数式. 因 C 为闭曲线, 且 $P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$ 连续可微, 故考虑用 Stokes 公式.

解 令 Σ 为 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 被 C 所围的一块, 取上侧, 则 C 的取向与 Σ 的取侧相容. 应用 Stokes 公式 (25.13),

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}-4(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}a\,\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}a\cdot|\Sigma|$$

$$=-2\sqrt{3}a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.\quad\square$$

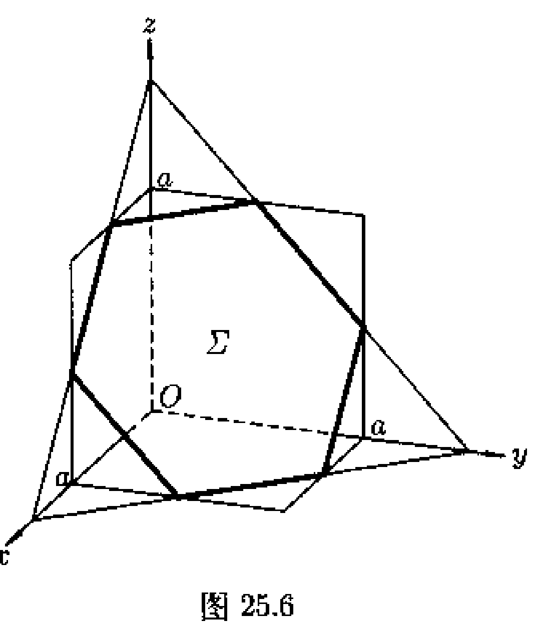


图 25.6

例题 25.3.4 设 Σ 是分片光滑的闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量, 试证明

$$I=\oiint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0,$$

其中分两种情形: (1) P, Q, R 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, Ω 为 Σ 所围的立体; (2) P,Q,R 在 Σ 上一阶连续可微.

证 对情形 (1) 用 Gauss 公式

$$I=\oiint_{\Sigma}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=0.$$

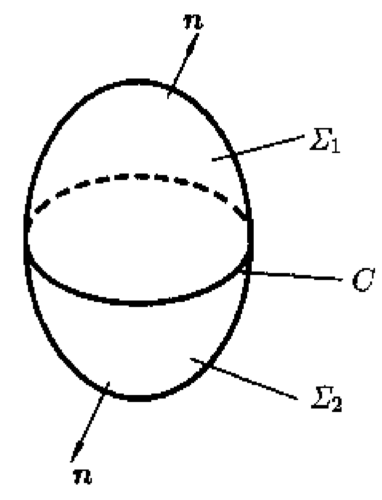


图 25.7

情形 (2) 参见图 25.7. 在 Σ 上任取一条逐段光滑的闭曲线 C, C 分 Σ 为两部分 Σ_1 与 Σ_2, 在 Σ_1,Σ_2 上分别应用 Stokes 公式, 则对于 $i=1,2$,

$$\iint_{\Sigma_i}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_{C_i}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

因 Σ_1,Σ_2 分居 C 两侧, 故 C_1,C_2 为同一条曲线 C, 只是它们的定向相反. 若记 C_1 为 C_+, 则 C_2 为 C_-, 从而

$$I=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}\right)\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\left(\oint_{C_+}+\oint_{C_-}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0.\quad\Box$$

例题 25.3.5 试用 Stokes 公式计算

$$I=\oint_C(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线 $(0<r<R,z>0)$, C 的定向使得 C 所包围的球面上较小区域保持在左边.

解 见图 25.4, 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ 所截部分的外侧, 由 Stokes 公式 (25.13)

$$I=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\dfrac{x-R}{R} & \dfrac{y}{R} & \dfrac{z}{R}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{2}{R}\iint\limits_S\big[(y-z)(x-R)+(z-x)y+(x-y)z\big]\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iint\limits_S(z-y)\,\mathrm{d}S=2\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=2R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi r^2R.\quad\Box$$

25.3.4 练习题

1. 设 C 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上逐段光滑的闭曲线, C 所界的面积为 S, C 的定向与 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 成右手系, 试计算积分

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

2. 求 $\oint_C(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, C 为 $x^2+y^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴正向看是逆时针方向.

3. 求 $\int_C(z^3+3x^2y)\,\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\,\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x=y$ 的交线, 自 $A(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},0)$ 到 $B(-\frac{a}{\sqrt2},-\frac{a}{\sqrt2},0)$.

4. 用 Stokes 公式求 $\int_C e^{x+z}\{[(x+1)y^2+1]\,dx+2xy\,dy+xy^2\,dz\}$, 其中 C 是右半柱面 $|x|+|y|=a$ $(y>0)$ 与平面 $y=z$ 的交线上从 $(-a,0,0)$ 到 $(a,0,0)$ 的一段 $(a>0)$.

5. 设 C 是空间任一逐段光滑的简单闭曲线, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是任意连续函数. 证明

$$\oint_C [f(x)-yz]\,dx+[g(y)-xz]\,dy+[h(z)-xy]\,dz=0.$$

6. 求

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3-yz & -3xy^2 \end{vmatrix}\,dS,$$

其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在 $z\geqslant 0$ 的部分, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 下侧的单位法向量.

7. 求 $\oint_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看是逆时针方向.

25.3.5 $\mathbf{R}^3$ 中曲线积分与路径无关的条件

利用 Stokes 公式可将 24.3.2 小节中平面曲线积分与路径无关的条件推广到 $\mathbf{R}^3$ 中, 但首先要清楚什么是 $\mathbf{R}^3$ 中的 "单连通区域", 为此我们要求无论 L 是区域 Ω 内的什么样的简单闭路, 总存在一个以 L 为边界而且全部包含在 Ω 内的曲面 S. 这时称空间区域 Ω 是 **曲面单连通区域**. 例如两个同心球面之间的部分是曲面单连通区域; 一个球打了一个贯通的柱形孔洞后剩下的部分, 如

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2\geqslant \frac{1}{2}\right\}$$

不是曲面单连通区域; $\mathbf{R}^3$ 中的圆环面

$$T^2:\ (\sqrt{x^2+y^2}-a^2)^2+z^2=b^2\ \ (0<b<a)$$

所围的区域也不是曲面单连通区域.

如果 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面单连通区域. $w=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$, 其中 P, Q, R 都在 D 内有连续偏导数, 则下列结论等价:

(1) 对 D 内任意一条闭曲线 C, 有

$$\int_C w=0;$$

(2) 对 D 内的任意一条路径 C, $\int_C w$ 仅与 C 的起点和终点有关, 而与所沿的路径无关;

(3) 在 D 内成立

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};$$

(4) 存在势函数 $\varphi(x,y,z)$, 使得在 D 内成立

$$\mathrm{d}\varphi(x,y,z)=P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

且

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=&\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,\mathrm{d}y\\&+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,\mathrm{d}z+C,\end{aligned}\tag{25.14}$$

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\varphi\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}=\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0).$$

例题 25.3.6 对于微分式

$$z\Big(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\Big)\,\mathrm{d}x+\frac{z}{xy^2}\,\mathrm{d}y+\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z,$$

判断原函数的存在性并求出之.

解 1 容易验证

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^2y^2},\\&\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2},\\&\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

因此该微分式有原函数. 根据微分式的特点, 为计算简单起见取 $z_0=0$, $x_0,y_0>0$, 积分路径为 $(x_0,y_0,0)\longrightarrow(x,y_0,0)\longrightarrow(x,y,0)\rightarrow(x,y,z)$, 则

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^z\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z+C=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.\quad\square$$

解 2 求原函数时也可用下面求不定积分的方法: 由

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy},$$

则

$$\varphi(x,y,z)=\int\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+\psi(x,y).$$

由此得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{z}{x^2+z^2}+\frac{z}{x^2y}+\frac{\partial\psi}{\partial x},\\&\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{z}{xy^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$, 得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

即 $\psi(x,y)$ 为常数, 所以

$$\varphi(x,y,z)=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.\quad\Box$$

25.3.6 练习题

1. 证明下列微分式为全微分, 并求出其原函数:

   (1) $(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$.

   (2) $\left[\frac{x}{(x^2-y^2)^2}-\frac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}-\frac{y}{(x^2-y^2)^2}+3y^3\right]\mathrm{d}y+5z^3\,\mathrm{d}z$.

2. 求 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$.

3. 设 C 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的任一点沿任一路径运动到球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(b>a)$ 上的任一点的轨迹, C 按段光滑, 证明

$$\int_C r^3(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=\frac{1}{5}(b^5-a^5),$$

   其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

§25.4 向量的外积, 微分形式的外微分与一般的 Stokes 公式

虽然在多数院校的教学计划中, 也许没有讲授这些内容的足够的教学时间. 但应该看到, 微分形式、外积和外微分已成为近代分析的基本工具, 其简练的表达, 精致的结构给微积分基本问题的处理带来了极大的方便. 因而, 我们觉得这些内容即使不在课上讲, 也很值得推荐给学生作为课外阅读材料 ①.

25.4.1 向量的外积

先考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$. Π 为由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形. 现在规定, 当自 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向旋转时, 其平行四边形的面积为正, 否则为负, 则由解析几何知识知, 二阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$ 就是上述意义下 Π 的有向面积.

① 近年来出版的数学分析教材大多数都 (或多或少地) 含有微分形式的外微分方面的材料. 就以本书参考文献中所收录的教科书为例, 在 [8, 9, 25, 28, 34, 36, 43, 45, 58, 60, 60, 61] 中全都是如此. 可以认为, 这是微积分教材改革方面的一个明显的动向. 此外还可以参考 [48].

值得提到的是著名数学家陈省身在 2001 年为南开大学的大学生开设的讲座《应用数学 (一), 微积分及其应用》中, 在第一讲 "微分和积分" 就引进外微分、外代数和一般的 Stokes 公式. 这就是本节要介绍的内容.

定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**为

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

可以证明外积运算具有以下性质:

(1) 反对称性:

$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\ \forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^2$. 由此得到 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}=0\ \forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$.

(2) 线性分配律:

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c},\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\wedge(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}),\quad \forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^2,\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

一般地, 定义 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的外积为

$$\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这样的外积运算满足反对称性和线性分配律.

当 $n=3$ 时, 可见三个线性无关向量 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ 的外积就是以它们为棱的平行六面体的有向体积. $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ 构成右手系时, 体积为正, 否则为负.

25.4.2 微分形式

先看一个 n 元连续可微函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i,$$

其中 $\mathrm{d}x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是各自独立的自变量增量, 与 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的具体取值是无关的. 这样把 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 看成一组基, $\mathrm{d}f$ 就可视为由这组基生成的线性空间的元素. 为此,我们构造如下一次微分形式的线性空间.

设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U$, $C^0(U)$ 是 U 上全体连续函数. 设 $a_i(\boldsymbol{x})\in C^0(U)$, $i=1,2,\cdots n$, 则称

$$a_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1+a_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2+\cdots+a_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n \tag{25.15}$$

为 U 上 C^0 类的**一次微分形式**, 简称 **1-形式**. 其全体记为 $\varLambda^1$ (或 $\varLambda^1(U)$).

注 1 如果 $a_i(\boldsymbol{x})\in C^k(U)$, $i=1,2,\cdots,n$, k 为某个自然数, 则称 (25.15) 为 U 上的 C^k 类的一次微分形式.

注 2 以 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots\mathrm{d}x_n$ 为基, 系数取 $C^0(U)$ 中的函数, 按通常的线性运算, 可证明 $\varLambda^1$ 是一个 $C^0(U)$ 上的线性空间.

下面形式地定义高次微分形式.

在 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\cdots$, $\mathrm{d}x_n$ 中任取 2 个组成有序元, 记为 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 称为 $\mathrm{d}x_i$ 与 $\mathrm{d}x_j$ 的外积 (暂时先将它看作一种记号).

仿照向量的外积, 规定

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

因此共有 C_n^2 个有序元

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

同 $\boldsymbol{\Lambda}^1$ 的构造类似, 以这些有序元为基就可以构造一个线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^2$, $\boldsymbol{\Lambda}^2$ 的元素称为**二次微分形式**, 简称 **2-形式**, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}^2$的元素就可表为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} g_{ij}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

这称为 2-形式的标准形式.

一般地, 在 $\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ 中任取 p 个组成有序元, 记为

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 是从集合 $1, 2, \cdots, n$ 中选取的任意 p 个整数 (同样地, 我们把 $\wedge$ 称为外积). 规定

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\\ =& -\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \quad 1 \leqslant r \leqslant p-1,\end{aligned}$$

而且如果 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 中有两个是相同的, 则 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = 0$. 因此共有 C_n^p 个有序元

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n.$$

以这些有序元为基构造一个线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\boldsymbol{\Lambda}^p$ 的元素称为 **p 次微分形式**, 简称 **p-形式**. 于是一般 p-形式就可表示为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} g_{i_1,i_2,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

这称为 p-形式的标准形式.

特别地, $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 是 $\mathrm{C}_n^n = 1$ 维的线性空间, 它的基为 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, 因此一般 n-形式为

$$g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

注意当 $p > n$ 时, 总有 $\mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = 0$. 因此当 $p > n$ 时, $\boldsymbol{\Lambda}^p = \{0\}$.

U 上的连续可微函数称为 (C^1 类的) 0-形式, 它们的全体记为 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, 它也是一个线性空间, 函数 $g \equiv 1$ 是它的一个基.

25.4.3 微分形式的外积

在上节我们定义了抽象的线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Lambda}^n$. 按线性空间的直积可

得到一个 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 维的线性空间

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^0+\boldsymbol{\Lambda}^1+\cdots+\boldsymbol{\Lambda}^n.$$

它的基是 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 的基的全体. $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的元素的一般形式为

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n,\quad \omega_i\in\boldsymbol{\Lambda}^i,\ i=0,1,\cdots,n.$$

现在在 $\boldsymbol{\Lambda}$ 上引入外积运算 $\wedge$:

记 $\mathrm{d}x_I=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$, 则 $\mathrm{d}x_I$ 与 $\mathrm{d}x_J$ 的外积定义为

$$\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

它是 $(p+q)$-形式. 如果 $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$ 有公共元素, 那么 $\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J=0$. 对于一般的 p-形式 $\omega=\sum\limits_I g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I$ 和 q-形式 $\eta=\sum\limits_J h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_J$, 定义 ω 和 η 的外积 $\omega\wedge\eta$ 为

$$\omega\wedge\eta=\sum_{I,J}g_I(\boldsymbol{x})h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J,$$

它是 $(p+q)$-形式.

对于 0-形式 f, 我们补充定义

$$f\omega=f\wedge\omega=\sum_I f(\boldsymbol{x})g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I,\quad \omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p.$$

这样 $\wedge$ 是微分形式空间上的一种运算, 它有如下性质.

性质 1 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p,\eta\in\boldsymbol{\Lambda}^q$, 则当 $p+q>n$ 时

$$\omega\wedge\eta=0.$$

这是因为当 $p+q>n$ 时, $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$ 必有公共元素.

性质 2 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\eta\in\boldsymbol{\Lambda}^q$, 则

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega.$$

推论 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\omega\neq0$, 则当 p 为奇数时, $\omega\wedge\omega=0$.

注 我们现在定义的外积 $\wedge$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的向量的外积 $\wedge$ 在形式上只是大家都符合反对称性和线性分配律, 至于其他的结论都是各自的推论. 比如, 我们在 $\mathbf{R}^n$ 空间中仅仅定义了 n 个向量的外积, 并且如果这 n 个向量中有两个相等, 则其外积为零. 特别地, $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$, 有 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}=0$. 但在 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $n>2$ 时, 我们并没有给出 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}$ 的定义. 在微分形式的外积定义中, 我们允许 n 个微分中任意 p 个组成 p-形式的外积, 从而有当 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\omega\neq0$, p 为偶数时, 不一定成立 $\omega\wedge\omega=0$.

例如取 $\mathbf{R}^4$ 上的微分形式, 如果 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$, 那么

$$\begin{aligned}\omega\wedge\omega&=(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\wedge(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4.\end{aligned}$$

性质 3 对于任意 ω, η, $\sigma\in\boldsymbol{\Lambda}$ 成立

$$\text{分配律:}\quad (\omega+\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma,$$

$$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta;$$

$$\text{结合律:}\quad (\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma).$$

25.4.4 微分形式的外微分

设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是区域, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 U 上的可微函数, 其全微分

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_i,$$

可理解为对 0-形式 f 作了微分运算后成为了 1-形式. 对 $\boldsymbol{\Lambda}^p$ 中一个形如

$$\omega=g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

的 p-形式, 定义

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},$$

然后按线性和数乘分配律定义微分运算 $\mathrm{d}:\boldsymbol{\Lambda}\to\boldsymbol{\Lambda}$, 即

$$\mathrm{d}(\alpha\omega+\beta\eta)=\alpha\mathrm{d}\omega+\beta\mathrm{d}\eta,\quad\forall\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^n,\ \omega,\ \eta\in\boldsymbol{\Lambda}.$$

并且称 $\mathrm{d}\omega$ 为微分形式 ω 的**外微分**.

例题 25.4.1 设 $\omega=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$, 则 $\mathrm{d}\omega=0$.

证 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(1\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})$

$$=(\mathrm{d}1)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0.\quad\square$$

例题 25.4.2 设 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的 C^1 类 1-形式, 计算 $\mathrm{d}\omega$.

解 $\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}P)\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge\mathrm{d}y+(\mathrm{d}R)\wedge\mathrm{d}z$

$$=\Big(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}y$$

$$+\Big(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\quad\square$$

例题 25.4.3 设 $f\in\boldsymbol{\Lambda}^0$ 是 C^2 类的 0-形式, 即 f 是二次连续可微的函数, 则 $\mathrm{d}^2f=0$.

证 由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\mathrm{d}^2f=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$$

$$=\sum_{i<j}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Big)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=0.\quad\square$$

外微分有如下两个常用的性质.

性质 1 设 ω 和 η 分别为 C^1 类的 p-形式和 q-形式, 则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

性质 2 设 ω 是 C^2 类的微分形式, 则 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.

证明作为练习.

在后几节的实例中, 我们将会看到以上这些抽象的运算是如何恰到好处地反映了不同的实际问题的实质内容, 而这正是数学的特点之一.

25.4.5 变换与 Jacobi 行列式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换, 其矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$, 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个立方体, 其边长分别是 α,β,γ, 则其体积为 $V=\alpha\beta\gamma$. 用向量外积的语言, 就是

$$V=\alpha\boldsymbol{i}\wedge\beta\boldsymbol{j}\wedge\gamma\boldsymbol{k}=\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}.$$

再考虑 Ω 在 $\boldsymbol{A}$ 下的象集 $\boldsymbol{A}(\Omega)$ 的体积, 注意 $\boldsymbol{A}(\Omega)$ 是由 $\boldsymbol{\xi}=a_{11}\alpha\boldsymbol{i}+a_{21}\alpha\boldsymbol{j}+a_{31}\alpha\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\eta}=a_{12}\beta\boldsymbol{i}+a_{22}\beta\boldsymbol{j}+a_{32}\beta\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\zeta}=a_{13}\gamma\boldsymbol{i}+a_{23}\gamma\boldsymbol{j}+a_{33}\gamma\boldsymbol{k}$ 所张成的平行六面体, 因而其有向体积为

$$\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta}\wedge\boldsymbol{\zeta}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\cdot\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}=\det\boldsymbol{A}\cdot\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}$$

当 $\det\boldsymbol{A}>0$ 时, 可知 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}$ 构成右手系, 或者说它们的方向与 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 一致.

现设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个可求体积的有界闭集, 由重积分的定义以及体积的平移不变性 (即一个平行四面体的体积在平移后不变), 就得到 $\boldsymbol{A}(\Omega)$的有向体积

$$V=\iiint\limits_{\boldsymbol{A}(\Omega)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\det\boldsymbol{A}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\det\boldsymbol{A}\cdot V.$$

因此, $\det\boldsymbol{A}$ 表示了线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的 (体积) "膨胀系数"; 当 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时, $\det\boldsymbol{A}$ 的符号表示了线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的 "方向". 特别地, $|\det\boldsymbol{A}|=1$ 称为**保体变换**; $\det\boldsymbol{A}>0$ 时称为**保向变换**.

这样的概念可推广到一般的变换 (映射). 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 是一个可微映射, 则在每个 (u_0,v_0,w_0) 附近, 可用一个线性映射 $\boldsymbol{A}(u_0,v_0,w_0)$ 近似替代, 其行列式就是 Jacobi 行列式 $\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{(u_0,v_0,w_0)}$. 如果 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}>0$ 恒成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是**保向**的; 如果 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$ 恒成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是**保体积**的.

25.4.6 重积分的变量代换

我们可以用微分形式的外微分来理解重积分的变量代换.

设三重积分的重积分元为 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 在 O–xyz 右手坐标系中, 正是边长为 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的小方体的体积. 故我们合理地把 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 记为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. 设坐标变换 $\boldsymbol{T}:\Omega\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

并记 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ 为 $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w$. 取微分, 并根据外积运算, 有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w. \tag{25.16}$$

由 (25.16), 前面讲过的重积分变量代换公式就很容易地变成

$$\int\limits_{\boldsymbol{T}(D)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\int\limits_{D}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w. \tag{25.17}$$

注 (25.17) 最大的好处是无需对 Jacobi 行列式加上绝对值. 这正是设计微分形式这个抽象的数学工具的目的之一. 注意到 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 中外积的次序是重要的, 而 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 被称为正体积元是因为外积的次序与 O–xyz 右手系的次序一致, 而 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$. 类似的结论对 n 重积分也成立.

例题 25.4.4 极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta=r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta.$$

25.4.7 一般的 Stokes 公式

先看 Green 公式. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, ∂D 是 D 的边界, 取右手系的诱导定向, 于是就有

$$\int\limits_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

如记 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 则可证 $\mathrm{d}\omega=\Big(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 因而有

$$\int\limits_{\partial D}\omega=\int\limits_{D}\mathrm{d}\omega.$$

再看 Stokes 公式. 设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, $\partial\Sigma$ 是 Σ 边界. 也取右手系的诱导定向, 如记 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$, 就有

$$\int\limits_{\partial\Sigma}\omega=\int\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\omega.$$

对于 Gauss 公式, 记 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域, $\partial\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的边界, 取右手系的诱导定向, 记 $\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 有

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

最后回顾 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x)=f(x)\Big|_a^b,$$

如果将上式右端视为 0-形式 $f(x)$ 在区间 $D=[a,b]$ 的诱导定向边界 $\partial D=\{a,b\}$ 上的积分, 那么上式就可以表为

$$\int_{\partial D} f=\int_D \mathrm{d}f.$$

这样, Newtow-Leibniz 公式, Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式就都可以统一地写成如下形式:

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega.$$

这个式子统称为**一般的 Stokes 公式**. 它说明了, 高次的微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在给定区域 M 上的积分等于低一次的微分形式 ω 在低一维的区域边界 ∂M 上的积分. Stokes 公式是单变量情形的 Newton-Leibniz 公式在多变量情形的推广, 是数学分析中最精彩的结论之一. 读者在今后的课程中还会看到它的广泛应用.

§25.5 对于教学的建议

25.5.1 习题课教案一例

作为大课的补充, 建议将下面的三个问题放在习题课上讲解.

1. 关于第一类曲题积分在正交变换下的不变性

第一类曲面积分在正交变换下的不变性, 即

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}\Sigma, \tag{25.18}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. 满足

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{25.19}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置. 曲面 Σ 是曲面 S 在正交变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像.

公式 (25.18) 的证明如下: 设 S 的参数方程为

$$S:\ x=x(s,t),\ y=y(s,t),\ z=z(s,t),\quad (s,t)\in D.$$

通过 (25.19) 可得 Σ 的参数方程为

$$\Sigma:\ u=u(s,t),\ v=v(s,t),\ w=w(s,t),\quad (s,t)\in D.$$

则

$$\iint\limits_S f(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(\boldsymbol{X}(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{25.20}$$

$$\iint\limits_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}\Sigma=\iint\limits_D f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}(s,t))\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{25.21}$$

其中

$$E=\boldsymbol{X}_s^2,\ \ F=\boldsymbol{X}_s\cdot\boldsymbol{X}_t,\ \ G=\boldsymbol{X}_t^2,$$
$$E_1=\boldsymbol{U}_s^2,\ \ F_1=\boldsymbol{U}_s\cdot\boldsymbol{U}_t,\ \ G_1=\boldsymbol{U}_t^2.$$

由 (25.19) 得

$$\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_s,\quad \boldsymbol{U}_t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t.$$

从而

$$E=E_1,\ \ F=F_1,\ \ G=G_1. \tag{25.22}$$

由 (25.20)-(25.22) 知 (25.18) 成立. □

例题 25.5.1 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, f 是连续函数, 证明

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u,$$

其中 a,b,c 是常数.

证 不妨设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$, 设 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的元素为 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 由 (25.18) 知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S&=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}S\\
&=2\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&=4\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\end{aligned}$$

$$= 4\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}t \qquad (v = \sqrt{1-u^2}\sin t)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u. \quad \square$$

2. **第二型曲面积分符号的确定** (公式 (25.3) 的证明)

在计算第二型曲面积分时, 要将第二型曲面积分化为二重积分, 其中的困难之一是如何决定二重积分前的符号. 在直角坐标系中计算时往往还比较容易. 当用参数方程计算时就要麻烦一些. 下面是公式 (25.3) 的证明:

首先由两类曲面积分之间的关系有

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

这里 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 S 所指定的一侧的单位法向量. 我们知道 S 在参数方程下的法向量

$$\boldsymbol{n} = \pm(A, B, C).$$

于是

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{pmatrix}.$$

由此可以看出, 其中 $\pm$ 号的选取应该是使 $\pm(A, B, C)$ 的方向与 S 所选的那一侧的法向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向一致. 另一方面,由$A^2+B^2+C^2 = EG-F^2$得到

$$\mathrm{d}S = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

于是 (25.3) 式成立. $\square$

例题 25.5.2 求第二类曲面积分

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 是柱体 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 被两个平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所截部分的边界, 积分沿边界的外侧.

解 设上底面为 S_1, 下底面为 S_2, 侧面为 S_3, 则

$$\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{S_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi.$$

在 S_2 上, $z = \mathrm{d}z = 0$, 于是在 S_2 上的积分为零. 下面计算在 S_3 上的积分. 令

$$x = \cos\theta, \ \ y = \sin\theta, \ \ z = z$$

$$(\theta, z) \in D = \{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 4\},$$

则

$$A=\cos\theta,\ \ B=\sin\theta,\ \ C=0.$$

于是

$$\iint\limits_{S_3} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=8\pi.$$

这里积分号前取正号是因为向量 (A,B,C) 与柱面外侧法方向一致, 最后得到

$$\iint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi.\quad\square$$

3. **球面上的曲面积分** (证明关系式 (25.28))

若曲面 S 是以 $\boldsymbol{M}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为球心, r 为半径的球面 $\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)$, 则其参数方程为

$$x=x_0+r\sin\varphi\cos\theta,\ \ y=y_0+r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=z_0+r\cos\varphi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

由此计算出

$$E=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=r^2\sin^2\varphi,$$
$$F=x_\theta x_\varphi+y_\theta y_\varphi+z_\theta z_\varphi=0,$$
$$G=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=r^2,$$

于是

$$\sqrt{EG-F^2}=r^2\sin\varphi.$$

与直角坐标系中三重积分化为球坐标积分的 Jacobi 行列式一样, 但这里的 r 是常数. 于是

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,y_0+r\sin\varphi\sin\theta,z_0+r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}\tag{25.23}$$

其中 $\mathrm{d}S_r$ 是半径为 r 的球面的面积元. 从上面的计算可以看出

$$\mathrm{d}S_r=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,\tag{25.24}$$

$$\mathrm{d}S_1=\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,\tag{25.25}$$

于是就有

$$\mathrm{d}S_r=r^2\,\mathrm{d}S_1,\tag{25.26}$$

如果记

$$\sin\varphi\cos\theta=\alpha_1,\quad \sin\varphi\sin\theta=\alpha_2,\quad \cos\varphi=\alpha_3,$$

注意这里 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 φ,θ 的函数, 则 (25.23)可改写为

$$\oiint\limits_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r = \oiint\limits_{\partial B_r(\mathbf{0})} f(x_0+r\alpha_1, y_0+r\alpha_2, z_0+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_r$$
$$= r^2 \oiint\limits_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(x_0+r\alpha_1, y_0+r\alpha_2, z_0+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1. \quad (25.27)$$

另一方面, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 恰是球面 $\partial B_r(\mathbf{0})$ (也是 $\partial B_1(\mathbf{0})$) 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$, 方向指向球面的外部, 因此上述表达式又可以简写为

$$\oiint\limits_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r = \oiint\limits_{\partial B_r(\mathbf{0})} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_r$$
$$= r^2 \oiint\limits_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1. \quad (25.28)$$

例题 25.5.3 设 $B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为心, r 为半径的球, $\partial B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为心, r 为半径的球面, 证明

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^r \oiint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_\rho\,\mathrm{d}\rho$,

(2) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint\limits_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r$

证 只证 (1), 因为在 (1) 的两边对 r 求导便得到 (2). 作球坐标变换

$$x=x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y=y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=z_0+\rho\cos\varphi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant r.$$

则

$$\iiint\limits_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta, z_0+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\int_0^r \oiint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

最后一个等号是由 (25.23) 得出. □

25.5.2 学习要点

1. 求空间第二型曲线积分 $\displaystyle\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 的几种方法.

(1) 用 Stokes 公式化为第二型曲面积分.

(2) 若满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$, 如果曲线 C 不封闭, 可考虑用求出原函数的方法.

(3) 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

2. 求空间第二型曲面积分的几种方法.

(1) 用 Stokes 公式化为第二型曲线积分.

(2) 用 Gauss 公式化为三重积分.

(3) 利用曲面的参数方程化为二重积分求解. 要特别注意积分号前正负号的确定, 这在 25.2.1 和 25.5.1 小节中已分析得比较透彻了.

3. 计算第一类曲面积分一般都直接应用公式 (25.1) 或 (25.2), 若计算过于复杂, 则可考虑利用两类曲面积分之间的关系转化为求第二型曲面积分.

4. 利用曲线积分与路径无关的条件可以判断原函数的存在并求出原函数, 求原函数的两种方法见例题 25.3.6. 同时利用曲线积分与路径无关的条件还可以简化曲线积分的计算, 当在原来的路径上曲线积分的计算较复杂时, 可换一条新的路径, 使得曲线积分在新的路径上的计算可能变得简单.

5. 在球面上的曲面积分看似简单,实际上有很多技巧.

(1) 若把球心移到坐标原点,用球坐标系中的 θ,φ 作为球面的参数方程中的参数时,向量

$$(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$$

的长度为 1, 方向与该点的矢径的方向相同, 因此它就是球面上的单位外法向量,这在应用 Gauss 公式时带来一些运算上的方便.

(2) 在公式 (25.28) 中的两个表达式

$$\oiint\limits_{\partial B_r(0)} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_r,\qquad r^2\oiint\limits_{\partial B_1(0)} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1$$

各有用处. 前者表达简捷, 但由于积分限与被积函数中都有 r, 因此需要对 r 求导数时, 用后者方便.

(3) 例题 25.5.3 中的两个结论是非常有用的关系式.

25.5.3　参考题

1. 设 S 是平面 $x+y+z=t$ 上被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所割下的部分

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & \text{当 } x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

证明

$$\iint_S \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} \dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & 当\ |t| \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & 当\ |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. 证明

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin y\, \mathrm{e}^{\sin y(\cos x - \sin x)}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

3. 设 Ω 为空间第一卦限中的区域, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续一阶偏导数. S 为 Ω 中任一光滑闭曲面, 试给出第二型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = 0$$

的充要条件, 并证明之.

4. 设 Σ 是光滑的闭曲面, 围成的区域为 Ω, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上单位外法向量, (x_0,y_0,z_0) 为 Ω 内固定一点, $(x,y,z)\in\Sigma$, $\boldsymbol{r} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 试证明

$$\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = 2\iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

5. 已给平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$, 对于 Π 的任一定向, 求 $w = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, 使得沿 Π 上任意逐段光滑简单封闭曲线 Γ (Γ 的定向与 Π 的定向一致) 恒有

$$\oint_{\Gamma} w = S(\Gamma),$$

其中 $S(\Gamma)$ 为 Γ 在 Π 上所围区域的面积.

6. 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中逐段光滑简单封闭定向曲线, 对于 $(x,y,z)\notin\Gamma$, 定义

$$P(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\zeta - z)\,\mathrm{d}\eta - (\eta - y)\,\mathrm{d}\zeta}{r^3},$$

$$Q(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\xi - x)\,\mathrm{d}\zeta - (\zeta - z)\,\mathrm{d}\xi}{r^3},$$

$$R(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\eta - y)\,\mathrm{d}\xi - (\xi - x)\,\mathrm{d}\eta}{r^3},$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Gamma$ 是积分变元,

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}.$$

证明

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

7. 在上题中求函数 $u(z,y,z)$, 使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

8. 利用 Gauss 公式证明 Archimedes 的流体静力学定律: 物体在液体中所受的浮力等于物体排开液体的重量, 方向垂直向上.

第二十六章 场论初步

场本来是物理学的研究对象, 如温度场、电磁场、重力场等. 这些场除了有各自不同的物理性质之外, 表现在数量关系上可分为数量场与向量场.

本章介绍场论的初步数学知识. 在 §26.1 节引入散度和旋度的概念, 然后将梯度、散度、旋度与 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式融合在一起, 展现多元积分丰富多彩的一面. 在 §26.2 中介绍 Laplace 算子和有关调和函数的一些知识. 最后一节是学习要点和参考题.

§26.1 散度和旋度

26.1.1 散度

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域, $\boldsymbol{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是定义在 D 内的向量值函数, 称 $\boldsymbol{a}$ 是定义在 D 上的一个**向量场**. 又设 P, Q, R 有连续的偏导数, 记

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

称之为向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**散度**, 它是一个数量, 有时也记为 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$. 注意与一个三元函数 f 的梯度 ∇f 的区别 (见 21.2.2 小节).

类似地在 $\mathbf{R}^2$ 中, 若 $\boldsymbol{a}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$, 则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y},$$

利用散度的记号, 可以将 Gauss 公式 (25.5), (25.6) 写为

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{26.1}$$

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S, \tag{26.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(P,Q,R)$, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量. 而将 Green 公式 (24.9), (24.10) 写为

$$\iint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D} -Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y, \tag{26.3}$$

$$\iint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{26.4}$$

又可将公式 (26.2) 与 (26.4) 统一写为

$$\int_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial D} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S. \tag{26.5}$$

上述公式称为**散度定理**, 它对任意维数都是成立的.

$n=1$ 时, 一元函数 $f(x)$ 的散度是 $f'(x)$, $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x$, 在区间的左端点 $\boldsymbol{n}=-1$, 在区间的右端点 $\boldsymbol{n}=1$, 在区间端点的点积分理解为被积函数在该点的值, 则 (26.5) 就是 Newton-Leibniz 公式.

$n=2$ 时 (26.5) 就是 Green 公式, $\mathrm{d}V$ 为面积元.

$n=3$ 时 (26.5) 就是 Gauss 公式, $\mathrm{d}V$ 是体积元, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量.

例题 26.1.1 证明重积分的分部积分公式

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iiint\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 是 Ω 的边界, 分片光滑, 取外侧. u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上连续可微.

证 在 (26.1) 中令 $\boldsymbol{a} = (uv, 0, 0)$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \quad \square$$

注 令 $v=1$, 则有

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

26.1.2 旋度

设 $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 是定义在区域 D 上的向量场, 又设 P, Q, R 在 D 内有连续偏导数. 记

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

称之为向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**旋度**. 它是一个向量, 有时也记为 $\nabla \times \boldsymbol{a}$. 利用旋度的记号, 可将 Stokes 公式 (25.13) 写为

$$\iint\limits_{D} \operatorname{curl} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s,$$

其中 D 是空间曲面, ∂D 是它的边界, $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, 等式左端的 $\boldsymbol{n}$ 为 D 的单位外法向量, 等式右端的 $\boldsymbol{\tau}$ 是 ∂D 的切向量. 它们二者的方向服从右手系法则.

在下面需要星形区域的概念.

定义 设 M 是区域 G 内一点, 称 G 是关于 M 的**星形区域**, 如果对任意一点 $P\in G$, 都有 P 与 M 之间的直线段 $PM\in G$.

例题 26.1.2 设 G 是 $\mathbf{R}^3$ 中关于其内一点 M 的星形区域. $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 是 G 内的光滑向量场, 且 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$. 证明: 存在 G 内的光滑向量场 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}.$$

证 不妨设 M 为原点. 由于 G 关于原点为星形区域, 于是对任何 $(x,y,z)\in G$, 有

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}[t^2P(tx,ty,tz)]\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 t^2\frac{\partial}{\partial t}P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{26.6}$$

由已知条件有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\dfrac{\partial R}{\partial z}$, 将它代入 (26.6) 中, 则

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\\&\qquad-\int_0^1 t^2x\Big[\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty,tz)+\frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big]\,\mathrm{d}t\\&\qquad+\int_0^1 t^2y\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 t^2z\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial}{\partial y}\Big[y\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t-x\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\Big]\\&\qquad-\frac{\partial}{\partial z}\Big[x\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t-z\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\Big].\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}A_1(x,y,z)&=z\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t-y\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t,\\A_2(x,y,z)&=x\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t-z\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t,\\A_3(x,y,z)&=y\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t-x\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

则

$$P(x,y,z)=\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}.$$

同理可证

$$Q(x,y,z)=\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x},\quad R(x,y,z)=\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

令 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3)$, 则

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}.\quad\square$$

26.1.3 Hamilton 算子 ∇

∇ 是一个算子符号, 称为 **Hamilton 算子**. 它的定义是

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

其具体含义如下: 设 f 是一个可微函数, 则

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z},$$

即

$$\nabla f = \mathrm{grad} f \quad (f \text{ 的梯度 }).$$

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量场, $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, 则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{a},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \mathrm{curl}\, \boldsymbol{a}.$$

因此, 我们也常用 $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{a}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ 的散度与旋度. 直接运算可以证明下列关系式 (其中 α, β 为常数, f, g 为数量函数, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为向量函数):

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g, \tag{26.7}$$

$$\nabla \cdot (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{a} + \beta \nabla \cdot \boldsymbol{b}, \tag{26.8}$$

$$\nabla \times (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha \nabla \times \boldsymbol{a} + \beta \nabla \times \boldsymbol{b}, \tag{26.9}$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g), \tag{26.10}$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{a}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{a}, \tag{26.11}$$

$$\nabla \times (f\boldsymbol{a}) = f(\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla f) \times \boldsymbol{a}, \tag{26.12}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{(即任一向量函数的旋度的散度为零)}, \tag{26.13}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0} \quad \text{(即任一数量函数的梯度的旋度为零向量)}. \tag{26.14}$$

例题 26.1.3 $\boldsymbol{A}, B$ 为可微的向量函数, 则

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}).$$

证 设 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3)$, 则有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \partial_x a_2 & \partial_x a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \partial_y a_1 & \partial_y a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_z a_1 & \partial_z a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&\qquad + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \partial_x b_2 & \partial_x b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \partial_y b_1 & \partial_y b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \partial_z b_1 & \partial_z b_2 \end{vmatrix} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

其中 I_1 为前三项, I_2 为后三项. 经计算验证有

$$I_1 = b_1(\partial_y a_3 - \partial_z a_2) + b_2(\partial_z a_1 - \partial_x a_3) + b_3(\partial_x a_2 - \partial_y a_1) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}),$$

同理可证

$$I_2 = -\boldsymbol{A}(\nabla \times \boldsymbol{B}). \quad \square$$

例题 26.1.4 设 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(\boldsymbol{M}_0)$ 上二阶连续可微, 其中 $\boldsymbol{M}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $B_R(\boldsymbol{M}_0)$ 是以 $\boldsymbol{M}_0$ 为心, 以 R 为半径的球. 对于 $0<\rho\leqslant R$, 如果都有

$$\oiint_{\partial B_\rho(\boldsymbol{M}_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\partial B_\rho(\boldsymbol{M}_0)$ 是以 $\boldsymbol{M}_0$ 为心, 以 ρ 为半径的球面, $\boldsymbol{n}$ 是球面上的单位外法向量, 则

$$u(\boldsymbol{M}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\partial B_R(\boldsymbol{M}_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

即球心的值等于球面上的积分平均值.

证 令

$$x = x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = z_0 + \rho\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

则在 $\partial B_\rho(\boldsymbol{M}_0)$ 上有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z) &= \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta, z_0 + \rho\cos\varphi) \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n}).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
0 &= \oiint_{\partial B_\rho(\boldsymbol{M}_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \rho^2 \oiint_{\partial B_1(\boldsymbol{0})} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1 \qquad (\text{由 } (25.28)) \\
&= \rho^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \oiint_{\partial B_1(\boldsymbol{0})} u(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1.
\end{aligned}
$$

由此可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\oiint\limits_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho^{-2}\oiint\limits_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho]=0.$$

因此对于 $0<\rho\leqslant R$,

$$\rho^{-2}\oiint\limits_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho=R^{-2}\oiint\limits_{\partial B_R(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_R.$$

另一方面, 当 $\rho\to 0^+$ 时,

$$\rho^{-2}\oiint\limits_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho\to 4\pi u(\boldsymbol{M}_0).\quad\square$$

26.1.4 几种常用的场

记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 是一个向量场. 以下是一些常用的场.

无源场: 如果 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**无源场** (或管形场).

无旋场: 如果 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**无旋场** .

梯度场: 如果存在数量场 $u(x,y,z)$, 使得 $\boldsymbol{A}=\nabla u$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为梯**度场** (或**有势场**), u 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**势函数**.

散度场: 一个数量场 $u(x,u,z)$ 称为**散度场**, 如果存在向量场 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$, 使得 $u=\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

旋度场: 如果存在向量场 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$, 使得 $\boldsymbol{A}=\operatorname{curl}\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**旋度场**.

在讨论线积分与路径无关时, 曾涉及保守场, 即如果存在 $u(x,y,z)$ (原函数), 使得 $\int_{\widetilde{AB}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=u(B)-u(A)$ (积分与路径无关), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**保守场**. 上述各种场之间的关系如下:

命题 26.1.1 (1) $\boldsymbol{A}$ 为梯度场 (即有势场) $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 为保守场 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 为无旋场 $\iff$ 对任意简单闭曲线 C, 环量 $\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 为无源场 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 为旋度场 $\iff$ 对任意闭曲面 Σ, 通量 $\oiint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的定侧单位法向量.

该命题的证明留作练习题 (见练习题 2).

26.1.5 练习题

1. 证明关系式 (26.7)-(26.14).
2. 证明命题 26.1.1.
3. $V \subset D \subset \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{A}$ 在 D 中连续可微, 证明: $\forall \boldsymbol{p}_0 \in V$, 成立

   (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$,

   其中 $\Sigma = \partial V$ 为 V 的边界, $\dim V$ 是 V 的直径, $|V|$ 为 V 的体积, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量;

   (2) $\operatorname{curl} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}S$;

   (3) $\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \varphi \, \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$, 其中 $\varphi(x,y,z)$ 在 D 上连续可微.
4. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的可微函数, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, 求 $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r})$ 和 $\operatorname{curl}(f(r)\boldsymbol{r})$.
5. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量, 证明:

   (1) $\operatorname{curl} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$;

   (2) $\operatorname{curl}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{c}$.
6. 求满足 $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r}) = 0$ 的函数 $f(r)$.
7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是无旋场, 证明 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 是无源场.

§26.2 Laplace 算子与调和函数

26.2.1 Laplace 算子

Laplace 算子 Δ 的定义如下:

$$\text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中}: \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\text{在 } \mathbf{R}^3 \text{ 中}: \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

简单的计算表明,

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u,$$

即 Laplace 算子对一个函数的作用等于这个函数的梯度的散度.

例题 26.2.1 (第一 Green 恒等式) 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, 试证明

$$\iiint\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 u 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的方向导数.

证 根据方向导数的计算公式,

$$\oiint\limits_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \oiint\limits_{\Sigma} v \Big[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\boldsymbol{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\boldsymbol{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\boldsymbol{n}, z) \Big] \, \mathrm{d}S.$$

利用公式 (26.2), 则

$$\begin{aligned} \oiint\limits_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S &= \iiint\limits_{\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial x}(v u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(v u_z) \Big] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z. \quad \square \end{aligned}$$

注 1 令 $v = 1$, 则有

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z. \tag{26.15}$$

注 2 由第一 Green 恒等式可以证明第二 Green 恒等式, 见练习题 2.

例题 26.2.2 设 $h(x, y, z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上二阶连续可微, $\partial B_r(\boldsymbol{M})$ 是以 $\boldsymbol{M} = (x, y, z)$ 为心, r 为半径的球面, 定义

$$\boldsymbol{M}_h(x, y, z, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M})} h(\xi, \eta, \zeta) \, \mathrm{d}S_r,$$

其中 $r > 0$, 证明

(1) $\boldsymbol{M}_h$ 是 x, y, z, r 的二次连续可微函数;

(2) $\Delta \boldsymbol{M}_h(x, y, z, r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \boldsymbol{M}_h(x, y, z, r)$,

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

(3) $\lim\limits_{r \to 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{M}_h(x, y, z, r) = 0$.

证 (1) 由 (25.27), $\boldsymbol{M}_h$ 的表达式可改写为

$$\boldsymbol{M}_h(x, y, z, r) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\partial B_1(\mathbf{0})} h(x + r\alpha_1, y + r\alpha_2, z + r\alpha_3) \, \mathrm{d}S_1,$$

其中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是球面 $\partial B_1(\mathbf{0})$ 的单位外法向量, $\mathrm{d}S_1$ 是 $\partial B_1(\mathbf{0})$ 的面积元. 由含参变量积分的性质知 $\boldsymbol{M}_h$ 是 x, y, z, r 的二次连续可微函数.

(2) 由含参变量积分的求导公式得

$$\Delta M_h(x,y,z,r)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial B_1(0)}\Delta h(x+r\alpha_1,y+r\alpha_2,z+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1, \tag{26.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_h}{\partial r}&=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial B_1(0)}(\frac{\partial h}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial h}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial h}{\partial z}\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(0)}(\frac{\partial h}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial h}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial h}{\partial z}\alpha_3)\,\mathrm{d}S_r.\quad(由\ (25.26))\end{aligned}\tag{26.17}$$

应用 Gauss公式 (26.2), 则

$$\frac{\partial M_h}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta. \tag{26.18}$$

应用例题 25.5.3 (2) 中的结果, 则

$$\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2}=-\frac{1}{2\pi r^3}\iiint\limits_{B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S_r. \tag{26.19}$$

由 (26.18), (26.19) 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_h}{\partial r}&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S_r\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(0)}\Delta h(x+r\alpha_1,y+r\alpha_2,z+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_r\\&=\Delta M_h(x,y,z,r).\qquad(由\ (26.16))\end{aligned}$$

(3) 利用 (26.18) 以及积分中值定理可知

$$\lim_{r\to0^+}\frac{\partial}{\partial r}M_h(x,y,z,r)=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{4\pi r^2}\Delta h(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=0,$$

其中 $(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)\in B_r(M)$. □

26.2.2 调和函数

如果在区域 Ω 内 $\Delta u=0$, 则称 u 是 Ω 内的**调和函数**. 调和函数有一些特殊的性质, 其中较重要的是下面的两条:

性质 1 (平均值公式) 设函数 $u(x,y,z)$ 是某区域 Ω 内的调和函数, $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是 Ω 中任一点, 以 M_0 为心, R 为半径的球 $B_R(M_0)$ 完全落在 Ω 的内部, 则

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial B_R(M_0)}u(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

证　对于 $0<\rho\leqslant R$, 由 Green 公式得

$$\oiint\limits_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_{B_\rho(M_0)} \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

由例题 26.1.4 知结论成立. □

性质 2 (极值原理)　记 $M=(x,y,z)$, 设函数 $u(M)$ 是区域 Ω 内的调和函数, 且不恒等于常数, 则 u 在 Ω 的任何内点上的值不可能达到它在 Ω 上的上界或下界.

证　用反证法. 设调和函数 $u(M)$ 不恒等于常数, 且在区域 Ω 上的上界为 K, (这里假定函数 $u(M)$ 在 Ω 上有上界, 否则结论自然成立), 而 $u(M)$ 在 Ω 内某点 M_0 取值为 K, 我们来找出矛盾.

因为 $u(M)$ 不恒等于常数, 则至少存在一点 $M_1=(x_1,y_1,z_1)\in\Omega$ 使得 $u(M_1)<K$. 在 Ω 中作一条连接 M_0,M_1 的连续曲线 Γ (见图 26.1), 设 Γ 的参数方程为

$$\Gamma: x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant T,$$

并且

$$x(0)=x_0,\ \ y(0)=y_0,\ \ z(0)=z_0,$$
$$x(T)=x_1,\ \ y(T)=y_1,\ \ z(T)=z_1.$$

定义

$$t^*=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{u(x(t),y(t),z(t))=K\},$$

则 $0\leqslant t^*<T$. 以 $M^*=(x(t^*),y(t^*),z(t^*))$ 为心, 充分小的 δ 为半径, 作一个完全落在 Ω 内部的球 $B_\delta(M^*)$, 并且曲线

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),\ \ t^*\leqslant t\leqslant T,$$

与球面 $\partial B_\delta(M^*)$ 至少有一个交点 P (见图 26.1), 也就是说 $u(P)<K$. 由函数 $u(M)$ 在 P 点的连续性知存在 P 点的一个邻域, 使得在该邻域上 $u(M)<K$, 因此 $u(M)$ 在 $\partial B_\delta(M^*)$ 上的积分平均值

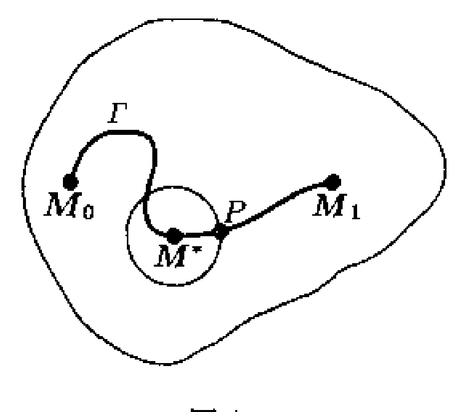


图 26.1

$$\frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint\limits_{\partial B_\delta(M^*)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S<\frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint\limits_{\partial B_\delta(M^*)} K\,\mathrm{d}S=K.$$

但由平均值公式有

$$\frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint\limits_{\partial B_\delta(M^*)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S=u(M^*)=K,$$

由此得到矛盾. 同理可证 u 也不能在 Ω 的内点取得 u 在 Ω 上的下界. □

注 1 上述两个性质对任意维数的调和函数都是成立的.

注 2 若 Ω 是有界区域, u 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内调和, 则 u 的最大最小值只能在 Ω 的边界上达到.

26.2.3 Poisson 积分公式

在这一节我们证明, 平面上每一个在单位圆周上的连续函数可惟一连续延拓成为单位开圆盘上的调和函数. 为此设 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 我们要在单位圆盘上证明存在惟一的连续函数

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

当 $0 \leqslant r < 1$ 时是调和函数, 且

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta).$$

证惟一性. 设 u, v 都满足条件, 则 $w = u - v$ 当 $0 \leqslant r < 1$ 时是调和函数, 且

$$w(\cos\theta, \sin\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

由极值原理 (性质 2) 知 $w \equiv 0$, 于是惟一性成立.

存在性的证明要困难得多. 考虑连续周期函数 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

由此提示定义函数

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos\, n(\theta - \varphi)\right] \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{Re}\left[\frac{1 + re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}}\right] \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

下面证明它的确提供了问题的解.

首先证明 u 在单位圆盘内是调和函数, 这只是一个对含参变量常义积分求二阶偏导数的计算, 所以留作练习, 其中要将 u 的表达式改写为

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

最后证明对每一个 θ_0,

$$\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,1^-)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\varphi = f(\theta_0),$$

这件事我们已经在例题 18.2.4 中证明过了. 这就完成了下面命题的证明.

命题 26.2.1 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 则

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

是单位圆盘上的调和函数, 且

$$\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,1^-)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi = f(\theta_0).$$

推论 若 u 是半径为 $R>0$ 的圆盘上的调和函数, 则对于 $0\leqslant r<R$ 有

$$\begin{aligned} &u(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{26.20}$$

称 (26.20) 为 **Poisson 积分公式**.

证 若 $R=1$, 结论就是命题 26.2.1. 对于一般情形只需作一相似变换, 具体细节留作练习. □

26.2.4 练习题

1. 证明

   (1) $\nabla\times(\nabla f)=0$;

   (2) $\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$, 其中 $\Delta\boldsymbol{a}=(\Delta a_1,\Delta a_2,\Delta a_3)$;

2. (**第二 Green 恒等式**) 设 Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二次连续可微. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量.

3. Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u 在 $\overline{\Omega}$ 上二次连续可微, 在 Ω 内调和. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

   并由此证明调和函数的惟一性.

4. 在调和函数性质 1 的条件下, 证明

$$u(\boldsymbol{M}_0)=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\iiint\limits_{B_R(\boldsymbol{M}_0)}u(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. 证明命题 26.2.1 的推论.

6. 证明 Poisson 积分公式 (26.20) 定义的函数是调和函数.

7. 证明调和函数无限次可微.
8. 若 f 和 $g\circ f$ 都是一连通开集上的调和函数, g 二阶连续可微, f 不是常值函数, 证明 g 是线性函数.
9. 证明: 问题

$$\Delta u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in D,\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=g(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\partial D$$

有解 u 的必要条件是

$$\iiint\limits_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial D} g\,\mathrm{d}S.$$

§26.3 对于教学的建议

26.3.1 学习要点

1. 本章涉及的定义和概念较多. 定义了散度, 旋度之后, Green 公式, Gauss 公式与 Stokes 公式从表面上看是简单化了. 散度定理 (26.5) (或者是 (26.2), (26.4)) 的用处非常之广, 当需要证明重积分与曲线 (面) 积分具有某种关系时, 散度定理是一个非常有效的出发点.
2. 由于 Laplace 算子对一个函数的作用等于这个函数的梯度的散度, 因此当积分号后面出现 Laplace 算子, 再应用散度定理时, 各类积分变得丰富多彩, 能够熟练运用 Laplace 算符与散度定理是本章的主要目的之一.
3. 调和函数是一类性质非常好的函数, 调和二字表现在处处满足平均值公式, 事实上反过来的结论也成立, 即处处满足平均值公式的连续函数一定是调和函数 (见第二组参考题 1). 在本章只介绍了调和函数的一点基本知识, 在复变函数、数学物理方程等后续课程中还要进一步学习.
4. **对习题课教学的建议**

   (1) 在习题课上证明命题 26.1.1, 虽然题目并不难, 但却是对各种算子的定义, 各种场的定义, Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式, 曲线积分与路径无关的一个综合练习.

   (2) 关于 Laplace 算子, 要求学生会证明第一和第二 Green 恒等式.

   (3) 关于调和函数, 要求学生会证明平均值公式, 并能利用 Poisson 积分公式证明调和函数的一些性质.

26.3.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $\boldsymbol{A}, B$ 为光滑向量场. 证明

(1) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$;

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

2. 设 G 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中关于原点 O 的星形区域, $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为 G 内的光滑无源场. 定义

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \int_0^1 [t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}t.$$

利用上题 (2) 证明

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的光滑向量场, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中二次连续可微的向量场, 满足

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = 0,$$

其中 L 是以原点为中心的球面上的封闭光滑简单定向曲线, $\boldsymbol{\tau}$ 是 L 上与其方向一致的单位切向量.

4. 设长度为 l 的平面简单闭曲线 C 由方程 $F(x,y)=0$ 确定. $F(x,y)$ 二阶连续可微, 且 $\nabla F(x,y)\neq 0$, 设 $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为曲线 C 围成的区域, 计算二重积分

$$\iint\limits_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. 设 $u(x,y,z)$ 是连续函数, 它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续二阶偏导数, 记

$$F(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial B_R(M)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\partial B_R(M)$ 是以 M 为心, R 为半径的球面. 证明

$$\lim_{R\to 0} F(R) = u(M),$$

若 $\Delta u(M)$ 不等于零, 求无穷小量 $F(R)-u(M)$ 的主要部分.

6. 设 u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, 且在 Ω 的边界上 $u=v$, 如果 u 是调和函数, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leqslant \iiint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

7. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 二阶连续可微, 且 $\Delta u = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

第二组参考题

1. 证明处处满足平均值公式的连续函数一定是调和函数.
2. 设 $\{u_n(x,y)\}$ 是定义在圆盘 B_R 上的调和函数序列, 都在 $\overline{B}_R$ 上连续, 若 $\{u_n(x,y)\}$ 在 B_R 的边界 ∂B_R 上一致收敛, 则 $\{u_n(x,y)\}$ 在 B_R 上也一致收敛, 并且极限函数也是调和函数.
3. 设 $u(x,y,z)$ 在区域 D 上二阶连续可微, 证明 $\Delta u \geqslant 0\ (\forall (x,y,z) \in D)$ 的充要条件是
$$u(\boldsymbol{M}_0) \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M}_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S \quad \forall B_R(\boldsymbol{M}_0) \subset D.$$
4. 设 $u(x,y,z)$ 是由光滑曲面 S 所包围的有界区域 Ω 内的调和函数, 则
$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S} \left[u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d}S$$
其中 $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$.
5. 利用 Poisson 积分公式证明不等式
$$\frac{R-r}{R+r}u(x_0,y_0) \leqslant u(x,y) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u(x_0,y_0),$$
其中 u 是以 R 为半径, (x_0,y_0) 为圆心的开圆盘上的非负调和函数, $r < R$ 是 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离.
6. 证明全平面上有界的调和函数一定是常值函数.

参考题提示

第十三章 数项级数

第一组参考题 (36 页)

1. 将该分式记为 u_n, 一种方法是用裂项法证明级数 $\sum u_n$ 收敛, 另一种方法是利用 u_n 的分母单调增加, 直接证明 $u_n \to 0$.
2. 可参考例题 12.4.2 的基本思路.
3. 先利用上题结论.
4. 前半题还是用 $na_n = o(1)$. 后半题当 n 为平方数时令 $a_n = 1/n$, 否则令 $a_n = 0$.
5. 对级数用等价量判别法, 或参考下一题.
6. (1) 记括号内为 d_n, 证明 $0 \leqslant d_n \leqslant f(1)$, 且单调减少. (2) 是 (1) 的应用.
7. 对 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 用等价量分析即可.
8. 二者都是正项级数, (2) 可用题 6.
9. 先证右边内层级数对每个 k 收敛.
10. 用上题结论.
11. 对 $n < m$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_m) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m}(a_k - a_m)$, 利用右边有界去估计 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
12. 可利用 $a_n^2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2) \leqslant (a_n - a_{n+1})\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})$.
13. 与题 2 类似, 又与 12.4.2 小节题 4 类似.
14. 若能证明 a_{n+1}/a_n 大于 3/2 即可.
15. 从 $a_{n+1} = (a_n - a_{n+1})/a_n^p$ 出发用微分中值定理 (参考例题 13.2.1 之证 1 和例题 13.2.5).
16. 前者用平均值不等式即可.
17. 只要证明级数通项不趋于 0 即可. 对于 (1), 若 $\sin n \to 0$, 则 $\sin(n+1) \to 0$, $\cos^2 n \to 1$, 由此即可引出矛盾. (2) 与此类似.
18. (1) 收敛, (3) 发散, 但对于 (2), (4), 收敛和发散都是可能的, 请举例.
19. (1) 用 Abel 变换, (2) 参考例题 13.2.7 中的证明.
20. 用反证法. 设有 M, 使得 $|n - f(n)| \leqslant M$ 对一切 n 成立. 然后估计两个级数的部分和之差 $|S_n - S_n'|$.

第二组参考题 (38 页)

1. 设 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 将通项写为 $\dfrac{n^2(A_n - A_{n-1})}{(A_n^2)} \leqslant \dfrac{n^2(A_n - A_{n-1})}{(A_n A_{n-1})}$ 作估计, 然后利用例题 13.2.6

2. 一种方法是用微分中值定理.
3. 对固定的 k, 考虑使 $a_k \leqslant Ma_n$ 成立的所有可能 n, 然后相加.
4. 先取两个通项单调减少趋于 0 的正项级数 $\sum c_n$ 和 $\sum d_n$, 使得前者收敛, 后者发散. 又使 $d_n > c_n \ \forall n \in \mathbf{N}_+$ 成立. 然后用它们的片段交替拼接成所求的两个级数.
5. 取对数后分析.
6. 这时级数与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散. 可试取满足 $x_n = \mathrm{e}^{x_{n-1}}$ 的数列, 用命题 13.1.2.
7. 利用 $\{a_n\}$ 单调减少趋于 0, 可见 $k > b_n$ 时 $a_k < \dfrac{1}{2^n}$, 而 $k \leqslant b_n$ 时 $a_k \geqslant \dfrac{1}{2^n}$, 利用这些对两个级数部分和作估计.
8. (1) 猜测部分乘积并作归纳证明; (2) 归纳得到 $2\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(2^{n-1}-1)!!(2^n)!!}{(2^{n-1})!!(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$ $= 2\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2^{n2^n+1}\left[\dfrac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$, 然后用 Stirling 公式即可.
9. 利用 $\ln(n+1) - \ln(n) \sim \dfrac{1}{n}$, 即相邻的 $\ln n$ 值之间的距离趋于 0.
10. (1) 将级数改写为 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(n-k)a_n = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} na_n\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$, 然后用 Abel 判别法; (2) 可以用 Abel 变换估计 (例如用 (13.23)).
11. 反证法, 利用 Abel 定理 (即命题 13.2.5 (2)).
12. 设法用上题的结果.
13. 正项级数和交错级数肯定都不行. 试用 $a_n - \dfrac{1}{n}a_n - \cdots - \dfrac{1}{n}a_n$ 的技巧.
14. 估计 $\left|\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)\right|$.
15. 利用 $1/x^p$ 为下凸函数, 证明 $S_{4n+1} > 1 - \dfrac{1}{2^p}S_{2n}$, 然后取极限.
16. 参考上册 57 页题 7 和 58 页题 10.
17. 用上题即可.
18. 用 Cauchy 命题 (上册 31 页).
19. 用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入即可.
20. (2) 不满足题 19 的必要条件. 其他题的答案为: (1) 1/2; (2) 2/3; (3) $\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}$.
21. 观察 $S_n - \sigma_n$.
22. 必要性已见一组参考题 19 (1), 与可否 Cesàro 求和无关. 充分性只要将该表达式用 S_n 和 σ_n 表出即得.

第十四章 函数项级数与幂级数

第一组参考题 (75 页)

1. 例如, 设 $D(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 (见上册 103 页及索引), 令 $S_n(x) = \dfrac{1}{n}D(x)\ (n = 1, 2, \cdots)$ 即可.

2. 这里的要点是可微性为局部性质，只要在所讨论的点的一个邻域中满足逐项可微定理的条件即可.
3. 这里需要 Dedekind 切割 (参见上册 96 页题 2).
4. 先求出极限函数，并利用 $\{x^n\}$ 于 $[0,1)$ 内闭一致收敛.
5. (2) 证明在无理点处可逐项求导，而在每个有理点处除了一项之外也可逐项求导.
6. 按条件存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) \neq 0$. 利用对每个 n 有 $f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x_0) x_0^n$，$0 < \theta < 1$.
7. 用 Abel 第二定理 (见 59 页底注).
8. (1) 由于 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上可展开为 Maclaurin 级数，因此 $(\arcsin x)^2$ 至少在 $(-1,1)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数. 它可以从计算 $(\arcsin x)^2$ 在 $x=0$ 的所有高阶导数值 (见 6.2.4 小节题 3) 得到. 然后逐项求导.
9. 先证明幂级数的收敛半径不小于 1，然后用三分法估计 $(1-x)f(x) - L$.
10. 利用在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界的多项式只能是 0 次多项式，即常数.
11. 可从常数项开始，证明 P_n 的同次幂项系数分别收敛.
12. 必要性部分用第 10 题.
13. 被积表达式是全微分.
14. 将通项分解为两个分式之差. 答案为 9/32.
15. 将甲成功的事件分解为第一次成功，第二次成功等等，然后分别计算它们的概率并相加.
16. 计算出第 n 年的 n 万元对应于一开始的钱是多少，然后相加. 答案为 $(100+a)^2/a^2$.

第二组参考题 (76 页)

1. 在 Arzela 定理 (即命题 14.2.4) 的证明中将一开始定义的集合 A_n 改为
$$B_n = \{x \in [a,b] \mid \exists i,j \geqslant n \text{ 使得 } |f_i(x) - f_j(x)| \geqslant \varepsilon\},$$
然后做下去.
2. 这里当然主要证明 $f \in R[a,b]$. 除了用可积条件 (见上册 301 页) 的传统证法外，也可试用 Lebesgue 定理 (见上册 304 页).
3. 先证明极限函数单调. 然后将区间作分划来做.
4. 用反证法. 对后两个问题的答案均为否定，不难构造反例.
5. 先证明有一个子函数列在一个点上收敛，这个点可取为 $\{x_n\}$ 的一个极限点.
6. 本题若用准一致收敛概念和 Arzela-Borel 定理 (命题 14.2.3) 则非常方便.
7. 学习例题 14.1.8 的方法，可取 $k = [\sqrt{\pi}/x]$. 若只要证明一致有界性，则还可以用 Dirichlet 积分的方法.
8. 展开后比较同次乘幂项的系数即可.

9. 其中需要在 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时成立不等式 $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \geqslant 1-\frac{k(k-1)}{n}$. 这是上册 1.3.2 小节题 1(3) 之特例.
10. (1) 利用第十三章第二组参考题 19 知 $a_n = o(n)$, 从而知收敛半径不小于 1. (2) 然后用级数乘积. (3) 令 $a_0 = 1$, $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 就从 (1) 得到在 $(-1, 1)$ 上的恒等式 $1 = (1-x)^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, 然后乘以 S, 用拟合法估计 $|S(x) - S|$.
11. 这里的方法见上册 §2.4 节.
12. 这是 $c_n \geqslant 0$ 条件下的 Abel 第二定理. 最简单的方法是用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 为优级数.
13. 本题为 Bernstein 定理, 但这里的结果比上册 225 页题 19 更好一些, 见美国数学月刊 90 卷 (1983) 130~131. 用 Taylor 公式的积分型余项 (见 11.4.3 小节) 证明在 $x \in [0, r]$ 时 $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{R_n(r)}{r^{n+1}}$, 又有 $R_n(r) \leqslant f(r)$. 于是得到 $R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{r}\right)^{n+1} f(r)$ 因此在 $0 \leqslant x < r$ 时 $R_n(x) \to 0$.
14. 先从 $\{a_n\}$ 的递推公式导出 $f(x) = 1/(1-x-x^2)$, 将它作部分分式分解后再展开, 就得到 Fibonacci 数列的 Binet-Lucas 公式:
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], n = 0, 1, \cdots,$$
由此可见 (或利用 f 的幂级数展开式的收敛半径), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.618$.
15. 本题的三个数列的生成函数为 $(1+x)^{\alpha}$, $(1+x)^{\beta}$ 和 $(1+x)^{\alpha+\beta}$.

第十五章 Fourier 级数

参考题 (103 页)

1. (1) 用积分第二中值定理; (2) 与 (3) 用分部积分, 或参考命题 15.1.2.
2. 以 a_1 为例, 将其积分公式中的积分区间 $[0, 2\pi]$ 分为 $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$ 等 4 个积分, 并通过变换成为 $[0, \pi/2]$ 上的一个积分, 然后利用凸性条件.
3. 本题中的函数 F_h 称为 Steklov 函数, 它表明平均后的函数性质比平均之前会有改善, 这与上册 334 页题 1 类似. (3) 可以用逐项积分定理.
4. F 是偶函数, 计算中需要用二元函数的二次积分交换顺序.
5. 用 Riemann 引理.
6. 这都可以认为是 Fourier 级数展开计算中的间接法的练习题.
7. 用偶延拓和奇延拓, 可认为是下题之特例.
8. 对 f 和 f' 用 Parseval 等式.
9. 不妨设在 $[-\pi, \pi]$ 内只有一个间断点 $x = 0$, 然后利用题 5(1) 中的 Fourier 级数.
10. 可以计算函数
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi-1}{2}x, & 0 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$
奇延拓后的 Fourier 级数.

11. 参考上册 317 页之证 2.
12. 需要积分第二中值定理.
13. 可用 Parseval 等式.
14. 本题表明, 没有收敛速度最慢的 Fourier 级数. 方法是使得 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ 收敛.
15. 本题可以看成是命题 15.1.2 的发展.
16. 以上题为基础, 本题成为计算 Fourier 展开式的一种方法.
17. 上题的一个应用. 最后计算需要二阶常系数线性微分方程的知识.
18. 本题很有意义. 可从反证法开始.
19. Weierstrass 第二逼近定理的一个证明, 对于 $(\cos\frac{u}{2})^{2n}$ 的计算可以用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.
20. 和函数为 $-\ln 2-\ln|\sin\frac{x}{2}|$. 在区间 $[0,\pi]$ 上讨论即可. 设法利用 $S_n(x)+S_{n-1}(x)$ 于 $[0,\pi]$ 上单调减少.

第十六章　无穷级数的应用

参考题 (134 页)

1. 参考例题 16.2.1, 两个方法都可以用.
2. 答案为 $\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2$.
3. 将通项分解为 $\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)$.
4. 开始有 $\sum_{q}\frac{1}{q-1}=\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}+\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^3-1}+\cdots$, 其中 n 取不是 (指数大于 1 的) 乘幂的所有大于 2 的正整数. 将此写成二重求和, 并交换顺序.
5. 证明 $a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=4\ \forall n\geqslant 2$, 然后用裂项相消法.
6. 通项可写成 $\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,dx$.
7. 试用多项式序列一致逼近 f.
8. 先证明结论对 g 为多项式时成立, 然后用逼近定理.
9. 用上题即可.
10. 可以参考上册 323 页例题 10.4.4.
11. 参考上册 140 页例题 5.4.5 和例题 14.1.3.
12. 作变量代换 $y=1/x$.
13. 作变量代换 $y=e^{-x}$.
14. 连续性的证明不难, 这里只对于可微性作简述. 对 $x\in(0,1)$, 构造点列 $\{x^{(n)}\}$, 记 $f(x^{(n)})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_k'}{2^k}$, 使得 $f(x)$ 和 $f(x^{(n)})$ 满足条件:

$$u_k'=u_k\ \forall 1\leqslant k\leqslant n,\ u_{n+1}'=1-u_{n+1},\ u_{n+2}'=u_{n+2},$$

然后估计差商 $\dfrac{f(x^{(n)})-f(x)}{x^{(n)}-x}$. 实现上述条件的方法是: 在 $x^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_k'}{10^k}$ 中, 对于 $k=n+1,n+2$ 采用以下规定:

$$x_{n+1}'\begin{cases}\neq x_n, & u_{n+1}=u_n,\\ =x_n, & u_{n+1}\neq u_n,\end{cases}\qquad x_{n+2}'\begin{cases}\neq x_{n+1}', & u_{n+2}=u_{n+1},\\ =x_{n+1}', & u_{n+2}\neq u_{n+1}.\end{cases}$$

15. 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.
16. 用上题即可.
17. 利用逐项求导定理.

第十七章 高维空间中的点集与基本定理

第一组参考题 (145 页)

1. 闭集 $S=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$, 其中 $S_k=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid d(\boldsymbol{x},S)<\dfrac{1}{k}\}$ 是开集. 开集证明类似.
2. 考虑以三角形 ΔABC 的三个中点 A', B', C' 为顶点的新三角形 $\Delta A'B'C'$, 以此类推, 得到一系列三角形组成的闭集套. 证明它们的惟一公共点就是原三角形中线的惟一交点.
3. 据定义.
4. 据包含关系.
5. 可用两种方法构造: (1) $O_i=\bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_i}O_{d_{\boldsymbol{x}}/2}(\boldsymbol{x})\ (i=1,2)$, 其中 $d_{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 到另一个闭集的距离; (2) $O_1=\{\rho(\boldsymbol{x})<\dfrac{1}{2}\}$, $O_2=\{\rho(\boldsymbol{x})>\dfrac{1}{2}\}$, 其中
$$\rho(\boldsymbol{x})=\frac{d(\boldsymbol{x},S_1)}{d(\boldsymbol{x},S_1)+d(\boldsymbol{x},S_2)}.$$
6. (2) 用反证法和聚点定理; (3) 结合 (1) 和聚点定理.

第二组参考题 (146 页)

1. 根据定义用反证法.
2. 注意 I 是 $\mathbf{R}$ 中区间的特征是: 若 a, $b\in I$, 则 $\forall c\in(a,b)$, 有 $c\in I$.
3. 用反证法. 设并集有非连通的分解, 考虑每个连通集与这个分解的交, 推出矛盾.
4. 对 A 中任何两点找折线相连.
5. 证明用反证法. 例子的讨论注意 $F=\overline{E}\setminus E$ 是线段, 证明不存在联结 E 中点与 F 中点的连续曲线.
6. (1) 从定义; (2) 证明在 $[0,1]$ 任意 k 等分的小区间中, 有形如 $m+l\alpha$ 的小数部分, 可设法找 $m_1+l_1\alpha$, 使 $0<m_1+l_1\alpha<\dfrac{1}{k}$.

第十八章 多元函数的极限与连续

第一组参考题 (163 页)

1. 用二分法证明任意 $x_0 \in [a,b]$ 的某个小邻域内收敛是一致的, 再用有限覆盖定理.
2. $\max\limits_{a\leqslant y\leqslant \xi} f(\xi,y) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant 1} f(\xi, a+k(\xi-a))$.
3. 证明有界闭.
4. 利用齐次线性方程组有非零解的条件. 先考虑 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \int_0^1 f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x = 0 \ (i = 1,\cdots,n)$ 的非零解, 再对 $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ 讨论.
5. 设 B 以 $\boldsymbol{a}$ 为圆心, 以 r 为半径, 最小覆盖圆盘应满足 $r^2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}_i)$, 证明 r 作为 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数能取到最小值.
6. (1) 考虑 $G(\boldsymbol{x})$ 在 S^1 上的最大值; (2) 利用 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 非奇异, 并证明对任意实对称矩阵 C, 有
$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \leqslant \lambda_{\max}, \quad \boldsymbol{y} \in E,$$
$\lambda_{\min}$ ($\lambda_{\max}$) 是 C 的最小 (最大) 特征值.

第二组参考题 (164 页)

1. 先证明 T^{n_0} 有惟一不动点, 再证明此不动点就是 T 的惟一不动点.
2. 令 $g(\boldsymbol{x}) = |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}|$, 证明 g 是 Ω 上的连续函数, 并且在 Ω 上取到零点.
3. 用反证法.
4. 根据定义.
5. 用上题.
6. 用上题.
7. (1) 根据定义; (2) 利用有界闭区间上连续函数性质.
8. (1) 根据定义; (2) 作实轴到区间 $(-1,1)$ 上的同胚 h, 再对复合映射 $h\circ f$ 讨论.
9. $\mathbf{R}$ 上定义在有界开集上的无界连续函数不可扩张到全空间. 先利用 Cauchy 准则把一致连续函数扩张到开集的闭包上, 再用 Tietze 扩张定理.
10. 利用有理点集在 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密性及 Cauchy 准则.

第十九章 偏导数与全微分

参考题 (186 页)

1. 计算.
2. 计算.
3. 证明必要性时可考虑 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u_x}{u}\right)$, 并注意 $\dfrac{\partial}{\partial x}(\ln u) = \dfrac{u_x}{u}$.

5. (1) 注意 $u=\prod\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}(x_k-x_j)$, 且 $\forall k\neq j$ 时, $(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i})(x_k-x_j)=0$; (2) 利用 u 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次齐次函数.
6. 根据链式法则和正交矩阵的行向量两两正交.
7. (1) r; (2) $r^2\sin\theta$; (3) $r^{m-1}\sin^{m-2}\theta_1\sin^{m-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}$, 引入中间变量 $t_1=r\cos\theta_1$, $t_2=r\sin\theta_1$.
8. 相对误差为 $\Delta f/f$.
9. 由 $a_{ij}\geqslant 0$, 矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 有满足 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant 0$ 的特征值 λ. 设其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$, 令 $y(t)=\alpha_1x_1(t)+\cdots+\alpha_nx_n(t)$. 由题设及 $x_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 满足的微分方程组推出 $y(t)\equiv 0$.
10. 利用行列式求导法则及 $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\partial x_k}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ 计算.

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

第一组参考题 (205 页)

1. 令 $F(x,t)=f(x,\int_0^t\sin x\,\mathrm{d}x)$, $F_t=f_y\sin t$, $F_t(0,\frac{\pi}{2})=f_y(0,1)$.
2. 利用命题 20.4.1.
3. 用隐函数存在定理.
4. 当 $x>0$ 时, $F(x,0)>0$, $F(x,-\infty)=-\infty$, 且当 $y<0$ 时 $F_y(x,y)=(3-y)y^2e^{-y}>0$, 于是存在惟一的 $y=y(x)$ 使得 $F(x,y(x))=0$.
5. 用介值定理惟一确定函数 $y=f(x)$.
6. (1) 当 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 附近对 $u=f(x,y)$ 用隐函数存在定理解出 x, 再用题设条件证明 $g(x(u,y),y)$ 与 y 无关, 从而找出 $F(u,v)$. 其它情况类似; (2) 对 F 求 x, y 的偏导数, 并用齐次线性方程组有非零解的条件.
7. 把问题归结为证明满足 E 中前两个关系式的局部连续隐函数 $t=t(x,y)$ 存在.
8. 用反证法, 聚点定理与隐函数存在定理.
9. 检验.
10. 用反证法. 由隐函数存在定理及题设证明 $f(\mathbf{R}^2\setminus\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\})$ 与 $\mathbf{R}^2\setminus f(\mathbf{R}^2)$ 均是非空开集. 再用 $f(\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\})$ 的有限性找到联结 $f(\mathbf{R}^2\setminus\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\})$ 中点与 $\mathbf{R}^2\setminus f(\mathbf{R}^2)$ 中点的线段, 由连通性推出矛盾.
11. 利用映射的有限增量公式与局部逆映射存在定理.

第二组参考题 (207 页)

1. 可微性的证明根据定义检验.
2. 由例题 19.4.1 及 Schwarz 不等式.

3. 依照命题 20.2.3 的注.
4. 自己动手做一遍就有体会.
5. 利用局部逆映射定理把 $\boldsymbol{h}$ 找出来.
6. 几何上的解释可局部地把 $\boldsymbol{f}$ 看成线性映射.

第二十一章 偏导数的应用

第一组参考题 (235 页)

1. (1) 写出曲面的切平面方程, 以 (a,b,c) 代入; (2) 隐函数求导.
2. 设顶点在三角形中的投影为 M, 其到 a, b, c 三边的距离分别是 x, y, z. 则 $ax+by+cz=2$ 倍三角形的面积, 且求侧面积 S 可化为在前述限制条件下的极值问题.
3. $u_{xx}\cos^2\alpha+u_{yy}\cos^2\beta+u_{zz}\cos^2\gamma+2u_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2u_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2u_{yz}\cos\beta\cos\gamma$.
4. (1), (2) 计算; (3) 利用 (1).
5. 对辅助函数 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 讨论.
6. 设二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\Big)\boldsymbol{\alpha}$, 证明 $Q(\cdot,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面上取最小值 m. 再证明 $\exists\delta\in(0,\delta_0)$, 使 $Q(\cdot,\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面上取最小值至少为 $\dfrac{m}{2}$, $\forall\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$. 再证 $F''(t)\geqslant 0$, $F(t)$ 同上题.
7. 仿例题 21.4.3 的注.
8. Lagrange 函数为
   $L(x,y,z,\lambda)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.
9. (1) 用 Lagrenge 乘子法, 用到行列式的求导公式; (2) 计算 $\boldsymbol{A}$ 的行向量是两两正交时 $(\det\boldsymbol{A})^2$ 的值; (3) 用到 (1), (2); (4) 考虑平行多面体.
10. (1) 用反证法. 设在内部取负的最小值, 利用方程找矛盾; (2) 考虑 $u(x,y)-c(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$, c 适当小.

第二组参考题 (237 页)

1. 利用第十八章第一组参考题 6(2) 的提示.
2. 给定 Π, 在 Π 上取点 $\boldsymbol{R}(a_0,b_0,c_0)$, 定义 $\boldsymbol{F}:[a,b]\to\mathbf{R}^3$ 为 $\boldsymbol{F}(t)=(x(t)-a_0,y(t)-b_0,z(t)-c_0)$, 就化为命题 21.5.2 当 $n=1$, $m=3$ 时的几何解释.
3. 由命题 21.5.2, $\exists\xi_1\in(a,b)$, 使 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}'(\xi_1)$ 正交, 再在 $[a,\xi_1]$ 上用命题 21.5.2. 依次类推.
4. 先考虑平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ 与曲面相切的条件, 再考虑切平面两两正交时的条件, 并计算原点到这些切平面的距离. 最后计算原点到交点的距离.
5. 证明 f 可以写成 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的函数.

6. 可通过证明 $ab \leqslant \mathrm{e}^{a-1} + b\ln b$ 或者 $a^2 \leqslant \mathrm{e}^{a-1} + a\ln a$ 来证明原不等式, 也可归结为求二元函数的最值 (在极值点取到). 取等号条件为 $a = b = 1$.
7. (1) 以 μ_1, μ_2 为斜率的两条直线夹角的斜率为 $k(\mu_1,\mu_2) = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{1+\mu_1\mu_2}$. 证明 $k(\mu_1,\mu_2)$ 在 T 下不变; (2) 方法同上; (3) 反演变换满足 $(\xi^2+\eta^2)(x^2+y^2) = 1$; (4) $-(x^2+y^2)^{-2}$; (5) 验证.
8. (1) 曲面间的夹角就是交点处相应法线之间的夹角; (2) 计算坐标关系式; (3) $-(x^2+y^2+z^2)^{-3}$.

第二十二章 重积分

第一组参考题 (275 页)

1. f 是二元 Riemann 函数, 可积的证明仿照一元 Riemann 函数的讨论.
2. 根据可积定义讨论.
3. (1) $A = \dfrac{3}{32} + \dfrac{\ln 2}{8}$; (2) 用反证法, 利用 (1).
4. 利用不等式 $100 + \cos^2 x + \cos^2 y \leqslant (10 + \dfrac{\cos^2 x}{10})(10 + \dfrac{\cos^2 y}{10})$.
5. 用正交变换.
6. 利用 $f(x,y) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{y} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t$ 及 Schwarz 不等式.
7. 利用 Hölder 不等式.
8. 取辅助函数 $g(x,y) = x(1-x)y(1-y)$, 注意到
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint\limits_D \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
按不同的次序计算累次积分, 并用分部积分.
9. 证明存在 $f(x,y)$ 的连续点 (x_0,y_0), 使 $f(x_0,y_0) > 0$.
10. 设左端积分为 I. M, m 分别为 f 在 Ω 上的最大最小值, 则 $m \leqslant I/\Omega \leqslant M$. 再应用多元函数介值定理 (命题 18.2.4).
11. 考虑差
$$\Delta = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
不同组合进行累次积分, 得到 $\Delta \geqslant 0$.
12. 仿上题证明方法.
13. 利用第 10 题.
14. 作变量代换 $x = x$, $u = xyt$, $s = xyz$, 并计算累次积分对 t 的导数.
15. (1) $x = f(s) + t\sin\theta(s)$, $y = \varphi(s) - t\cos\theta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi l$, $0 < t < l$;
(2) 作变换 $(x,y) \mapsto (s,t)$, 再计算积分.

第二组参考题 (277 页)

1. 利用上册 259 页练习题 10.

2. 利用上题与例题 22.5.9.

3. (1) 证明 $\forall\varepsilon>0, p\to+\infty$ 时, $\varPhi_p(u)$ 的下极限 $\geqslant(\max\limits_{\Omega}u)-\varepsilon$. (2) 利用 (1) 的结果.

(3) 利用 $\lim\limits_{p\to0}\dfrac{\displaystyle\iint\limits_{\Omega}u^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-|\Omega|}{p|\Omega|}=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\ln u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. (1) 设球心是坐标原点, $P_0=(0,0,a)$, P 点的轨迹形成的封闭曲面的方程为 $(x^2+y^2+z^2-az)^2=R^2[x^2+y^2+(z-a)^2]$, 所求体积 $V=\dfrac{4\pi}{3}R(R^2+a^2)$, (2) 如果 $P_0=(x,y,z)$, 则 $V=\dfrac{4\pi}{3}R(R^2+x^2+y^2+z^2)$.

5. 利用 $\displaystyle\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=(\iint\limits_{Q_a}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^{1/2}$, 其中 $Q_a=\{0<x<a,0<y<a\}\supset D_a=\{x^2+y^2<a^2,x>0,y>0\}$. 证明右端不等式时与 $D_{2a/\sqrt{\pi}}$ 上的二重积分比较, 此时被积函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 是原点到 (x,y) 的距离的严格减少函数.

6. 用函数 $f(x,y)$ 的无限接近的等位线把积分区域分为许多部分.

第二十三章 含变参量积分

参考题 (306 **页**)

3. (1) $\varphi(x)=-2\sqrt{x-t}f(t)\Big|_0^x+2\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}f'(t)\,\mathrm{d}t$, (2) 利用(1),然后将积分交换次序.

4. $\displaystyle\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha A}f(\frac{y}{\alpha})\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}f(\frac{y}{\alpha})\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ (将 f 零延拓), 利用广义积分对 α 一致收敛取极限.

5. $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y$, 利用广义积分对 t 一致收敛取极限.

6. (1) 固定 t, 由 Cauchy 不等式得

$$\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u\right]^2\leqslant\int_A^B f^2(t+u)\,\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\,\mathrm{d}u=\int_{A+t}^{B+t}f^2(u)\,\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 A,B 充分大或充分小, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u$ 对每一个 t 都存在, 且对 t 一致收敛.

(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon}g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}g(2\sqrt{\varepsilon}x)\,\mathrm{d}x$, 由 g 有界知后面的广义积分对 ε 一致收敛.

7. (1) 注意 $f(\alpha)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$;

(2) 由于 f 不一定是连续函数, 故要用定义证 g 的连续性.

8. 用柱坐标变换和余元公式, 或用球坐标变换, 体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

9. $\overline{x} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)}$.

10. 惯性矩 $I = 4\iint\limits_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{21}{2^9}\pi R^4$.

11. 与第 4 题的方法类似.

13. $\int_0^{+\infty} \cos x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{p}-1}\cos y \,\mathrm{d}y$, 利用 $y^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{p})}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{e}^{-yt}\,\mathrm{d}t$,

交换积分次序得 $\int_0^{+\infty} \cos x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\Gamma(\frac{1}{p})\cos\frac{\pi}{2p}$.

14. 用余元公式, 结果为 $\ln\sqrt{2\pi}$.

15. 利用 $\frac{1}{a^2+x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(a^2+x^2)}\,\mathrm{d}t$, 交换积分次序得 $I_1 = \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-ab}$, $I_{k+1} = -\frac{1}{2ak}\frac{\partial I_k}{\partial a}$, $J_k = -\frac{\partial I_k}{\partial b}$.

16. 考虑 $\ln\Gamma(x)$ 的导数.

17. (1) $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$; (2) 令 $x \to 1$; (3) 利用余元公式.

第二十四章 曲线积分

第一组参考题 (333 页)

1. 利用两型曲线积分之间的关系。

2. 可以直接计算, 也可以对 R 求导后计算, 答案为:

   (1) $2\pi R\ln R$ 当 $|a| < R$, $2\pi R\ln|a|$ 当 $|a| > R$.

   (2) $2\pi R\ln R$ 当 $a^2+b^2 < R^2$, $2\pi R\ln\sqrt{a^2+b^2}$ 当 $a^2+b^2 > R^2$.

3. $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}[\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}] = 0$ 对 $(\xi,\eta)\in L$ 一致地成立.

4. 等式两边乘以分母后求导或者积分.

5. 利用 Green 公式得 $\iint\limits_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_G xf_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_G yf_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 于是

$$\left|\iint\limits_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| = \frac{1}{2}\left|\iint\limits_G (xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_G (f_x+f_y)^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. 利用 Green 公式与中值定理.

第二组参考题 (334 页)

1. 先考虑对于任一点 $(x,y)\in D$, 存在以 (x,y) 为中心的开矩形, 使对于任一条位于开矩形及其边界上的逐段光滑定向闭曲线 Γ 有性质

$$\frac{\boldsymbol{F}(x_1,y_1)}{|\boldsymbol{F}(x_1,y_1)|} \neq -\frac{\boldsymbol{F}(x_2,y_2)}{|\boldsymbol{F}(x_2,y_2)|},\quad \forall (x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\in\Gamma.$$

从而有 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma) = 0$, 然后用有限覆盖定理.

2. 证明 $\min\limits_{x\in D}|\nabla f(x)|\leqslant \frac{1}{2r}(\max\limits_{x\in D}f(x)-\min\limits_{x\in D}f(x))\leqslant\max\limits_{x\in D}|\nabla f(x)|$, 再用多元函数介值定理. 可借助梯度曲线讨论.

3. 设 $f(v)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{(a_i,b_i)\cdot v}$, 当 $|u|+|v|$ 充分大时有 $(u,v)\cdot\nabla f(u,v)>0$, 用旋转度证明 $\nabla f(v)$ 有零点.

4. 不妨取 (x,y) 的极坐标为 $(\rho,0)$, 并计算出 $l(x,y)=L(\rho)$. 设小圆外弧对应的圆心角为 2φ, 则 $L(\rho)=0,\ 0\leqslant\rho\leqslant r-\delta$; $L(\rho)=2\delta\varphi,\ r-\delta\leqslant\rho\leqslant r$. 再利用余弦定理表达出 φ, 并在积分号下取 $\delta\to0$, 得极限值为 $4\pi r$.

5. (1) 利用 Green 公式; (2) 检验; (3) 对 $g_1^2(x)+g_2^2(x)=1$ 两边求微分, 并用不同的方法计算 $\iint\limits_{B}\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$; (4) 设曲面定义在圆盘上, 并保持边界圆周不动. 则这样的曲面不能退缩到边界上, 除非撕破曲面.

6. 利用上题.

第二十五章 曲面积分

参考题 (369 页)

1. 坐标旋转, 使 $x+y+z=0$ 变为坐标平面.

2. 所求积分等于 $\oiint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}\mathrm{e}^{u-v}\,\mathrm{d}S$, 然后作坐标旋转.

3. f 是 -3 次齐次函数, 即 $3f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

4. 记以 (x_0,y_0,z_0) 为心, 以 ε 为半径的球为 B_ε, 在 $\Omega\setminus B_\varepsilon$ 上用 Gauss 公式, 然后证 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\oiint\limits_{\partial B_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S=0$.

5. 用 Stokes 公式.

6. 记 $A=(\xi-x)/r^3, B=(\eta-y)/r^3, C=(\zeta-z)/r^3$, 则 $A_\xi+B_\eta+C_\zeta=0$, $A_x+B_y+C_z=0$. 于是 $P_y=\oint\limits_{\Gamma}C_y\,\mathrm{d}\eta-B_y\,\mathrm{d}\zeta=\oint\limits_{\Gamma}(C_y\,\mathrm{d}\eta+C_z\,\mathrm{d}\zeta)+A_x\,\mathrm{d}\zeta=$
$\oint\limits_{\Gamma}-(C_\eta\,\mathrm{d}\eta+C_\zeta\,\mathrm{d}\zeta)+A_x\,\mathrm{d}\zeta=\oint\limits_{\Gamma}C_\xi\,\mathrm{d}\xi+A_x\,\mathrm{d}\zeta=\oint\limits_{\Gamma}-C_x\,\mathrm{d}\xi+A_x\,\mathrm{d}\zeta=Q_x$.

7. 设 S 是以 Γ 为边界的光滑曲面, $(x,y,z)\notin S$, 由 Stokes 公式

$$\begin{aligned}P&=\iint\limits_{S}(-B_\eta-C_\zeta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+B_\xi\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi+C_\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\\&=\iint\limits_{S}A_\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+B_\xi\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi+C_\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\\&=-\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{S}A\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+B\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi+C\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

8. 设液体表面为 xy 平面, z轴方向向下, 液体比重为 ρ, 物体表面面积元 $\mathrm{d}S$ 的深度为 z, 则这一元素所受液体压力为 $\rho z\,\mathrm{d}S$, 它在 z 轴方向的分力为 $-\rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S$, 于是在 z 轴方向受力 $= -\displaystyle\oiint_S \rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S = -\rho\iiint_V \mathrm{d}v = -\rho V$.

第二十六章　场论初步

第一组参考题 (383 页)

2. 证明 $\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)]$.
3. 在 $\nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})$ 两边求散度, 利用 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{n}$ 可证明 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = 0$.
4. 注意到 $\nabla F/|\nabla F|$ 在边界上是单位内法向量, 用 Green 公式.
5. 类似于 (26.18), (26.19) 知 $F'(0) = 0, F''(0) = \dfrac{1}{3}\Delta u(M)$.
6. $0 = \displaystyle\iiint_\Omega (u-v)\Delta u = \oiint_{\partial\Omega}(u-v)\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint_\Omega \nabla(u-v)\nabla u$, 即
$$\iiint_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\iiint_\Omega |\nabla u|^2 + \iiint_\Omega |\nabla v|^2\Big).$$
7. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2<1}(xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} r^2\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta$, 再用 Green 公式计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi} r\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta$.

第二组参考题 (384 页)

1. 由极值原理的证明知 $u(M)$ 满足极值原理. 在任一球 B_R 上用 Poisson 积分公式作 B_R 内的调和函数 $v(M)$, 使得在 ∂B_R 上 $v(M) = u(M)$, 再利用极值原理知在 B_R 内 $u(M) = v(M)$.
2. 利用极值原理和 Poisson 积分公式.
3. 用证明平均值公式的方法.
4. 记 B_ε 是以 (x,y,z) 为心, ε 为半径的球, 在第二 Green 公式中取 $v = 1/r$, 积分区域为 $\Omega\setminus B_\varepsilon$.
5. 将被积函数放大,缩小.
6. 利用上题.

参 考 文 献

[说明] 以下文献按作者名 (编者名) 的 (拼音) 字母顺序排列. 为简明起见, 对翻译著作不列出原作的外文名和译者名. 对有多册或多卷的著作也只列出所见的最早版本.

[1] 阿赫叶慈尔. 逼近论讲义. 北京: 科学出版社, 1957
[2] 阿姆斯特朗. 基础拓扑学. 北京: 北京大学出版社, 1983
[3] 亚历山大罗夫. 集与函数的泛论初阶. 上海: 商务印书馆, 1956
[4] 白尚恕.《九章算术》注释. 北京: 科学出版社, 1983
[5] 巴尔霍民柯. 曲线是什么. 北京: 科学出版社, 1957
[6] Berggren L, Borwein J, Borwein P. Pi: a source book. New York: Springer, 1997
[7] Bourbaki N. Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire). Paris: Herman, 1965
[8] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 南京: 江苏教育出版社, 1998
[9] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 2000
[10] 陈传璋, 金福临, 朱学炎, 欧阳光中. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1983
[11] 柯朗, 约翰. 微积分和数学分析引论. 北京: 科学出版社, 1979
[12] 邓东皋, 尹小玲. 数学分析简明教程. 北京: 高等教育出版社, 1999
[13] 邓建中. 外推法及其应用. 上海: 上海科技出版社, 1984
[14] Dieudonné J. Calcul infinitésimal. Paris: Hermann, 1968
[15] 迪厄多尼. 现代分析基础 第一卷. 北京: 科学出版社, 1982
[16] 德林费尔特. 普通数学分析教程补篇. 北京: 人民教育出版社. 1960
[17] Dunham W. Euler: the master of us all. MAA, 1999
[18] 邓纳姆. 天才引导的历程. 北京: 中国对外翻译出版公司, 1994
[19] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 北京: 高等教育出版社, 1954
[20] 费史. 概率论及数理统计. 上海: 上海科学技术出版社, 1962
[21] 法尔科内. 分形几何——数学基础及其应用. 沈阳: 东北大学出版社, 1991
[22] 盖尔鲍姆, 奥姆斯特德. 分析中的反例. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.
[23] 哈代, 李特伍德, 波利亚. 不等式. 北京: 科学出版社, 1965
[24] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1991
[25] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002
[26] 克莱因. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 1979
[27] 匡继昌. 常用不等式. 长沙: 湖南教育出版社, 1989
[28] 李成章, 黄玉民. 数学分析. 北京: 科学出版社, 1999
[29] 刘文. 无处可微的连续函数. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1987
[30] 李文林. 数学史教程. 北京: 高等教育出版社, 2000
[31] 鲁金. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1954
[32] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982
[33] 米尔诺. 从微分观点看拓扑. 上海: 上海科学技术出版社, 1983
[34] 沐定夷. 数学分析. 上海: 交通大学出版社, 1993
[35] 那汤松. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1955
[36] 欧阳光中, 姚允龙. 数学分析. 上海: 复旦大学出版社, 1993
[37] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 北京: 高等教育出版社, 1993

[38] 波利亚. 怎样解题. 北京: 科学出版社, 1982
[39] 波利亚. 数学与猜想. 北京: 科学出版社, 1984
[40] 波利亚. 数学的发现. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1979
[41] 波利亚, 舍贵. 数学分析中的问题和定理. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
[42] 钱伟长. 应用数学. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1993
[43] 秦曾复, 朱学炎. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1991
[44] 黎茨, 纳吉. 泛函分析讲义. 北京: 科学出版社, 1963
[45] 卢丁. 数学分析原理. 北京: 人民教育出版社, 1979
[46] 沈燮昌, 邵品琮. 数学分析纵横谈. 北京: 北京大学出版社, 1991
[47] 斯玛特. 不动点定理. 重庆: 重庆出版社, 1982
[48] 斯皮瓦克. 流形上的微积分——高等微积分中一些经典定理的现代化处理. 北京: 科学出版社, 1981
[49] 斯特洛伊克. 数学简史. 北京: 科学出版社, 1956
[50] 梯其玛希. 函数论. 北京: 科学出版社, 1964
[51] Wagon S. Mathematica in action. New York: Springer, 1999
[52] 汪林, 戴正德, 杨富春等. 数学分析问题研究与评注. 北京: 科学出版社, 1995
[53] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数与泛函分析. 北京: 人民教育出版社, 1979
[54] 辛钦. 数学分析八讲. 武汉: 武汉大学出版社, 1998
[55] 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 北京: 商务印书馆, 1955
[56] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 1983
[57] 杨宗磐. 数学分析入门. 北京: 科学出版社, 1958
[58] 张筑生. 数学分析新讲. 北京: 北京大学出版社, 1990
[59] 周民强, 方企勤. 数学分析. 上海: 上海科学技术出版社, 2003
[60] 卓里奇. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1987
[61] 邹应. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1995
[62] 邹应. 数学分析习题及其解答. 武汉: 武汉大学出版社, 2001

中文名词索引 (汉语拼音字母序)

J

L

外文名词索引 (拉丁字母序)